

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGY

7. *Emerson E., Clark E.* Using branching–time temporal logic to synthesize synchronization skeleton // *Science of Computer Programming.* – 1982. – № 2.– P. 241–266.
8. *Стоянова О. В.* Метод поддержки принятия решений по управлению временными аспектами проектов на промышленных предприятиях / О. В. Стоянова, А. И. Васицына // *Программные продукты и системы.* – 2012. – № 3. – С. 178–184.
9. *Коршунов Ю. М.* Математические основы кибернетики : учеб. пособие для вузов / Ю. М. Коршунов. – 2 изд., перераб. и доп. – М. : Энергия, 1980. – 424 с.
10. *ABB* [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://new.abb.com/>.
11. *ArcGIS Tracking Analyst* [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://nrtb.ru/products/arcgis_distrib/arcgis_modules/tracking_analyst.php.
12. *Asta Powerproject* [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.astapowerproject.com/>.
13. *Битрикс24* [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.bitrix24.ru/>.
14. *ПО Microsoft* [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.microsoft.com/ru-ru/softmicrosoft>.
15. *Pnueli A.* The temporal logic of programs // In *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science.* – IEEE Computer Society Press, 1977. – P. 46–57.
16. *Pnueli A.* Applications of temporal logic to the specification and verification of reactive systems: a survey of current trends // In J.W. de Bakker, W.–P. de Roever, and G. Rozenberg, editors, *Current Trends in Concurrency, Lecture Notes in Computer Science.* – Springer–Verlag, 1986. – Vol. 224.– P. 510–584.
17. *Henzinger T. A.* Half–order modal logic: how to prove real–time properties // In *Proceedings of the Ninth Annual Symposium on Principles of Distributed Computing, ACM Press, 1990.* – P. 281–296.
18. *Henzinger T. A.* The temporal specification and verification of Real–Time Systems. PhD thesis, Stanford University, 1991. – 287 p.
19. *Henzinger T. A., Manna Z., and Pnueli A.* Temporal proof methodologies for real–time systems // In *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Principles of Programming Languages, ACM Press, 1991.* – P. 353–366.
20. *Казимир В. В.* Верификация реактивных систем с помощью формул темпоральной логики на E-сетевых моделях / В. В. Казимир // *Мат. машини і системи.* – 2002. – № 1. – С. 29–40.

УДК 004.942

О.М. Трофимчук, д-р техн. наук

О.О. Кряжич, канд. техн. наук

Институт телекоммуникаций і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ, Україна

КУСКОВО-ПОЛНОМИАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ЯРУЖНИХ ФУНКЦІЙ

А.Н. Трофимчук, д-р техн. наук

О.А. Кряжич, канд. техн. наук

Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины, г. Киев, Украина

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОБРАЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Oleksandr Trofymchuk, Doctor of Technical Sciences

Olha Kriazhych, PhD in Technical Sciences

Institute of Telecommunications and Global Information Space of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

PIECEWISE POLYNOMIAL APPROXIMATION OF GULLY FEATURES

Розглянуто підхід до вирішення задач кусково-поліноміальної апроксимації з застосуванням методу Дж. Зойтендейка. Запропоновано застосування методу можливих напрямків для вирішення задач чебишевського наближення з додатковими обмеженнями. Наведено алгоритм вирішення подібних задач для реалізації методу за допомогою обчислювальної техніки. Розглянуто можливі аспекти практичного застосування та зроблено висновки.

Ключові слова: функція, поліном, апроксимація, наближення, нерівність.

Рассмотрен подход к решению задач кусочно-полиномиальной аппроксимации с применением метода Дж. Зойтендейка. Предложено использование метода возможных направлений для решения задач чебышевского приближе-

ния с дополнительными ограничениями. Приведен алгоритм решения подобных задач для реализации метода с помощью вычислительной техники. Рассмотрены возможные аспекты практического применения и сделаны выводы.

Ключевые слова: функция, полином, аппроксимация, приближение, неравенство.

The paper examines an option piecewise polynomial approximation using the application method "possible directions" by author's G. Zoutendijk. The method of the possible directions for solving Chebyshev approximation with additional restrictions. The algorithm of solving such problems for the implementation of the method with computations using computing technology. The possible aspects of practical application. The conclusions are made.

Key words: function, polynomial, approximation, approximation, disparity.

Постановка проблеми. Огляд моделей лінійного програмування доводить, що ці моделі не завжди адекватні реальним ситуаціям. Так, при лінійному підході часто ігноруються такі явища, як адекватність моделі, раціональність та інші. Часто обмеження, що застосовуються при побудові моделі, призводять до нелінійного формулювання задачі, тобто знаходження мінімального чи максимального значення функції при нелінійних обмеженнях.

Особливо актуальною постає задача апроксимації складних функцій під час роботи з програмами, що дозволяють візуалізувати на картах зони ураження сильнодіючими отруйними речовинами (СДОР), інструменти моделювання дозволяють наносити ці зони на карти і схеми у вигляді кола, півкола або сектора, який має кутові розміри і радіус, рівний глибині зараження. Зона фактичного зараження, здебільшого, має форму еліпса, включається у зону можливого зараження. Така візуалізація не дає картини, що є наближеною до реальності, адже є різні особливості місцевості, і хмара СДОР не буде чітким еліпсом чи колом. Наприклад, якщо на шляху хмари буде річка, хмару СДОР частково потягне за течією. Високі будівлі і споруди на шляху СДОР також частково розірвуть контур. Якщо відбувся викид речовини, що тяжіє до низу, заповненими будуть низини, що значно простягатимуться в боки від еліпса чи кола зони на карті подій, визначеної як зона ураження. Тобто особа, що приймає рішення (ОПР) з ліквідації техногенної аварії, отримує не точну інформацію про її розповсюдження.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Слід зазначити, що питання апроксимації функцій поліномами свого часу широко були досліджені В.О. Василенком [1], В.К. Дзядиком [2], Б.О. Поповим [6], Ю. Люком [5] та іншими українськими і зарубіжними вченими. Проте метод Дж. Зойтендейка [4] розглядався дуже мало з причин важкості розрахунків за цим методом. У наш час, коли навіть персональні комп'ютери дозволяють вирішувати складні задачі, цей метод є цікавим для подальших досліджень та застосування у практичній роботі.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Застосування широко розповсюджених градієнтних методів може бути неефективним у задачах «яружною» цільової функції, тобто коли лінії цільової функції сильно витягнуті (мають форму еліпсів) у межах оптимальної точки. Подолання такого випадку передбачено в методах можливих напрямків, серед яких є метод Дж. Зойтендейка. Загальна ідея підходу полягає у виборі мінімально можливого напрямку пошуку у граничній точці x_k , з врахуванням всіх обмежень та кута зі спрямуванням антиградієнта в цій точці.

Мета статті. Метою роботи є представлення варіанта опису апроксимації функції з використанням методу Дж. Зойтендейка для застосування його у вирішенні задачі чебишевського наближення з додатковими обмеженнями для опису яружних функцій, що дозволить деталізувати розповсюдження хмар небезпечних речовин при моделюванні можливої техногенної аварії на пересіченій місцевості.

Виклад основного матеріалу. Функції із сильно витягнутими лініями у межах оптимальної точки можна уявити як дно яру, русла річки з певною крутизною стінок, положистістю при зниженні дна яру уздовж твірної та шириною дна. Саме дно може бути прямим або звивистим і являє собою підмножину точок, де поділ на існуючі і неіснуючі змінні зникає, отже, з будь-якого напрямку функція змінюється повільно.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \varepsilon \\ \sum_{i=0}^k a_{ij} x_i - \varepsilon \leq f(Y_i) \\ -\sum_{i=0}^k a_{ij} x_i - \varepsilon \leq -f(Y_i) \\ \sum_{i=0}^k a_{i,0} x_i = f(Y_0) \\ \sum_{i=0}^k a_{i,n+1} x_i = f(Y_{n+1}) \\ \sum_{i=0}^k i \cdot a_{i-1,0} x_i = f'(Y_0) \\ \sum_{i=0}^k i \cdot a_{i-1,n+1} x_i = f'(Y_{n+1}) \\ \varepsilon \geq 0; j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (2)$$

Специфіка наведеної задачі лінійного програмування полягає у тому, що матриця обмежень $A = (a_{ij})$; $i=0, k$; $j=0, n+1$ має прямокутний вигляд і кількість рядків домінує над кількістю стовпців, $K \ll N$. Тому для вирішення поставленої задачі обрано метод можливих напрямків Дж. Зойтендейка [4]. Через те, що метод передбачає наявність нерівності, то умова виразу (2) буде розписана як дві нерівності і на майбутнє буде припущено, що всі обмеження (2) мають вигляд нерівностей.

Тепер безпосередньо звернемося до методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка та представимо алгоритм вирішення поставленої задачі.

Нехай нам дана довільна задача лінійного програмування:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^k d_j x_j \\ \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0, i = \overline{1, P}; j = \overline{1, k} \end{array} \right. \quad (3)$$

Як і всі методи лінійного програмування, градієнтний метод вимагає відшукування точки, яка задовольняє обмеження задачі лінійного програмування. Позначимо її $X^0 = (x_1^0, \dots, x_k^0)$. Тоді для X^0 виконується:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^0 \leq b_i, \\ x_j^0 \geq 0 \quad i = \overline{1, P}; j = \overline{1, k}. \end{array} \right. \quad (4)$$

На відміну від симплексного і двоїстого методів [3], вирішення задачі лінійного програмування X^0 може й не бути базисною точкою, що значно спрощує вирішення задачі. У цьому дослідженні припустимо, що така точка нам відома. Тоді ірраціональна процедура знаходження рішення задачі (3) зводиться до наступного:

а) з точки X^0 обираємо напрямок S , за яким величина $\sum_{j=1}^k d_j S_j$ має найбільше значення і вектор $S = (S_1, \dots, S_k)$ задовольняє обмеження $\sum_{j=1}^k P_{ij} S_j \leq 0, i = \overline{1, P_1}$ ($P_1 \leq P + K$), де матриця $P = (P_{ij})$ складена з умов матриці обмежень (3), які для точки X^0 виконуються як рівняння, тобто для матриці P маємо:

$$\sum_{j=1}^k P_{ij} x_j^0 = b_i, \quad i = \overline{1, P_1},$$

додаючи сюди й умову невід'ємного невідомого. Після обрання напрямку S , обираємо довжину кроку λ для переходу в наступну точку X^1 , виходячи з умови, що X^1 повинна задовольняти (4);

б) вибір величини λ здійснюємо з відношення:

$$\lambda = \left\{ \min \frac{b_i - \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^0}{\sum_{j=1}^k a_{ij} S_j} \mid \sum_{j=1}^k a_{ij} S_j > 0, \quad i = \overline{1, P} \right\};$$

в) будуємо точку $X^1 = X^0 + \lambda S$, яка задовольняє умови (4). Величина, на яку збільшилася лінійна форма задачі (3), дорівнює $\lambda \sum_{j=1}^k d_j S_j$;

г) повторюємо пункти а) і б) відносно точки X^1 та отримуємо X^2 . Це повторюється доти, поки не буде існувати напрям, для якого величина $\sum d_j S_j$ стає від'ємною. Цей факт доводить, що немає точки, яка задовольняє (4), в якій лінійна форма набувала б значення попередньої форми. Тому точка, на якій зупинився процес, буде вирішенням задачі (3).

Для побудови алгоритму слід більш детально зупинитися на виборі напрямку S . Знаходження вектора $S = (S_1, \dots, S_k)$ зводиться до знаходження рішення наступної задачі математичного програмування:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k d_j S_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^k P_{ij} S_j &\leq 0, \quad (i = \overline{1, P_1}), \end{aligned} \quad (5)$$

до якої, як правило, додають ще одне обмеження (нормалізацію) на вектор $S = (S_1, \dots, S_k)$. Для дослідження обираємо обмеження:

$$\sum_{j=1}^k S_j^2 \leq 1. \quad (6)$$

Але можливі й інші варіанти нормалізації: а) $-1 \leq S_j \leq 1$; б) $S_j \leq 1$, коли $d_j \geq 0$; $S_j \geq -1$, коли $d_j < 0$.

Будь-яка з нормалізацій має свої особливості. Так, (6) призводить до більшого обсягу робіт над кожною з ітерацій, проте кількість ітерацій менше у порівнянні з іншими типами ітерацій. Оскільки розміри задачі (5)–(6) відносно невеликі, то кількість ітера-

цій для її рішення відносно незначна, що доводить непотрібність громіздких прийомів нормалізації інших типів. Задача (5)–(7) є задачею з одним квадратичним обмеженням. Для її вирішення можна застосувати методи квадратичного програмування, якщо попередньо записати двоїсті задачі означеним задачам. У монографії Дж. Зойтендейка [4] запропоновано один із підходів для розв'язання цієї задачі, який ґрунтується саме на основах теорії двоїстості і використовує прямий алгоритм симплекс-методу.

Оскільки застосовуючи запропонований метод на практиці дуже важко буде вибрати деяку точку X^0 , яка задовольнятиме (4), то замість задачі (3) можна вирішити задачу, яка у деякому сенсі є еквівалентною задачі (3), тобто застосувати метод можливих напрямків до вирішення задач чебишевського наближення з додатковими обмеженнями:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k d_j x_j - M_\xi \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j + \beta_i \xi \leq b_i & i = \overline{1, P} \\ x_j \geq 0, \quad \xi \geq 0 & j = \overline{1, K} \end{cases} \quad (7)$$

де M є великим невід'ємним числом, а величини визначаються системою

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i \geq 0 \\ -1, & \text{если } b_i < 0, \quad i = \overline{1, P} \end{cases}$$

Припустімо, значення невідомої ξ дорівнює $\xi_0 = \{\max(-b_i) / b_i < 0, \quad i = \overline{1, P}\}$. У зазначеному випадку вектор $X_\xi^0 = (O_1 O, \dots, O_1 \xi_0)$ стане початковим вирішенням задачі (7). А якщо область умов, що задана у (4), є не порожньою, то задача (8) матиме оптимальне рішення, а невідома ξ дорівнюватиме 0. Саме тому в разі отримання від'ємного рішення задачі (7) $X_\xi^{on} = \{X_1^{on}, X_2^{on}, \dots, X_k^{on}, O\}$ ми матимемо й оптимальне рішення задачі (3) $X_{on} = \{X_1^{on}, X_2^{on}, \dots, X_k^{on}\}$.

Враховуючи, що ентропія інформації описується моделлю, яка визначає невизначеність повної групи випадкових подій або випадкових станів $E = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$, а за змістом являє собою зворотну величину до кількості інформації, можлива деяка кількість n випадкових подій з імовірністю $p_1 \dots p_n$, які не відповідатимуть умовам, що прийняті. Наприклад, число M буде числом з плаваючою крапкою, коли неможна представити нуль для невідомої ξ . Враховуючи, що при розрахунках на обчислювальній техніці отримання нуля залежить від багатьох факторів, то для побудови початкового вирішення задачі (2) можна застосувати додаткові перетворення і розглянути наступну задачу (9).

Перехід від задачі (2) до задачі (8) обумовлюється тим, що значення точок t_i та $f(t_i)$, а також обчислення похідних $f'(a)$, $f'(b)$ завжди мають деяку похибку. Саме тому, замість рівностей (2), можна обмежитися вимогами виконання відповідних умов нерівностей:

$$\begin{aligned} |\Pi_k(a) - f(a)| &\leq \alpha_1 \varepsilon, \\ |\Pi'_k(a) - f'(a)| &\leq \alpha_2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогічно будуються умови для точки b . Величини α_1, α_2 додатні та обрані залежно від необхідної точності виконання нерівностей.

Вибір початкового вирішення для системи (8) можна отримати таким чином.

Візьмемо $x_i = 0, i = 0, K$. Значення ε визначаємо за формулою

$$\varepsilon^0 \left\{ \max \frac{-f(Y_i)}{a_{i,\varepsilon}} \mid f(Y_i) < 0, i = \overline{0, N+1} \right\},$$

де $a_{i,\varepsilon}$ – коефіцієнт при ε ($a_{i,\varepsilon} = -1, -\alpha_1, -\alpha_2$).

У цьому випадку точка $X^0 = \left\{ \underbrace{0_1 0, \dots, 0}_{k+1} \varepsilon^0 \right\}$ буде задовольняти обмеженням задачі

(8), тобто її можна означити як початкову точку.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon \rightarrow \max \\ \sum_{i=0}^k a_{ij} x_i - \varepsilon \leq f(Y_j) \\ -\sum_{i=0}^k a_{ij} x_i - \varepsilon \leq -f(Y_j) \\ \sum_{i=0}^k a_{i,0} x_i - \alpha_1 \varepsilon \leq f(Y_0) \\ -\sum_{i=0}^k a_{i,0} x_i - \alpha_1 \varepsilon \leq -f(Y_0) \\ \sum_{i=0}^k a_{i,N+1} x_i - \alpha_1 \varepsilon \leq f(Y_{N+1}) \\ -\sum_{i=0}^k a_{i,N+1} x_i - \alpha_1 \varepsilon \leq -f(Y_{N+1}) \\ \sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,0} x_i - \alpha_2 \varepsilon \leq f'(Y_0) \\ -\sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,0} x_i - \alpha_2 \varepsilon \leq -f'(Y_0) \\ \sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,N+1} x_i - \alpha_2 \varepsilon \leq f'(Y_{N+1}) \\ -\sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,N+1} x_i - \alpha_2 \varepsilon \leq -f'(Y_{N+1}) \\ \varepsilon \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (8)$$

Таким чином, вирішуючи задачу (8) методом можливих напрямків, можна отримати вирішення задачі найкращого наближення поліномом $\Pi_k(x)$ функції $f(x)$ на $[a, b]$.

Практична цінність такого наближення дозволить розглядати випадки нелінійних обмежень нерівностей для побудови методом найскорішого спуску деякої зони яружної функції. Як приклад можна розглянути аварію на хімічному виробництві.

Виробничий майданчик ПАТ «Концерн «Стирол»» (м. Горлівка, Донецької області) розташований у безпосередній близькості з ДП «Горлівський хімічний завод», підприємством, яке було зупинене в аварійному режимі майже 12 років тому, з порушенням технологічного регламенту, у результаті чого в технологічних апаратах, сховищах та у

технічних мережах знаходиться за різними підрахунками близько 30 тонн тротилу та декілька сотень тонн високоотруйних речовин.

Моделювання ґрунтується на інформації з відкритих джерел відносно аварійних ситуацій, що виникали на вказаних об'єктах та за підсумками проведених польових досліджень. Для моделювання застосовуються умови, що отримання й оброблення інформації відбувається в режимі реального часу за допомогою запропонованого пакета програм.

Можливий розвиток подій: у результаті спроби несанкціонованого демонтажу одного з технологічних апаратів виробництва тротилу, який уміщував у собі майже 500 кг тротилу, стався вибух, який спричинив руйнацію аварійної виробничої будівлі з викидом уламків на відстань понад 1500 м. Уламками були пошкоджені трубопроводи ПДР аміаку на технологічному блоці № 9 та розгерметизація виходу газоподібного аміаку з дефлегматора на технологічному блоці № 15. При найгіршому розвитку подій може відбутися руйнація ємностей зберігання аміаку, у навколишнє середовище може потрапити до 300 тис. т аміаку. Для ситуації, що аналізується, прийняті умови відносно руйнації однієї з ємностей зберігання аміаку, в якій на час події зберігалось лише 100 т аміаку.

Гідрометеорологічні умови на момент розвитку події: -9°C , вітер північно-східний, 1 м/с. Час виникнення події: березень, робочий день, 16 година 13 хвилин.

Засобами програмного виробу «Прогнозування та оцінка наслідків катастроф з хімічною речовиною на об'єктах збройних сил України» [7] було проведено розрахунок аварії. Візуалізація результатів представлена на рис.

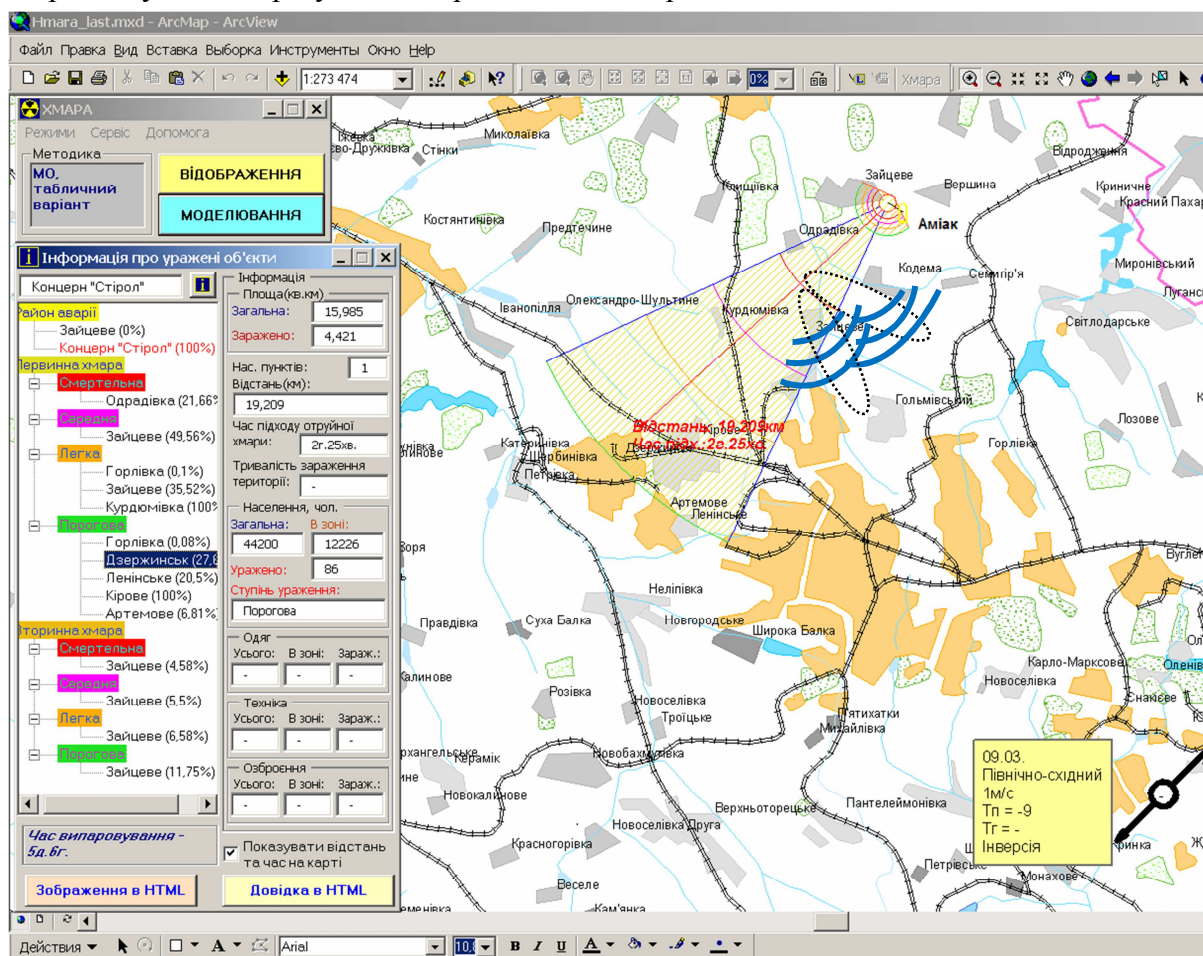


Рис. Візуалізація результатів розрахунку аварії

З рис. видно, що розповсюдження аварії наведено сектором. Проте представлена місцевість – пересічена ярами, річками, невеликими озерами. Враховуючи хімічні властивості аміаку, можна зазначити, що частина аміаку почне активно взаємодіяти з водою і піде за течією річок та осяде у межах вологих місць ярів та на озерах. Тобто у цих випадках слід окреслити саме яружні функції розповсюдження небезпечної хмари і сектор на карті (рис. – овальні окреслення) перетвориться на деяку зону з нелінійними обмеженнями, що можуть у підсумку допомогти описати територію у вигляді еліпсів, які частково входять у межі сектора зони розповсюдження.

Висновки і пропозиції. У статті наведено попередній результат роботи щодо застосування кусково-поліноміальної апроксимації з застосуванням методу можливих напрямків. Враховуючи те, що задачі отримання рівномірних наближень сплайнами з мінімальною погрішністю розвивалися у багатьох роботах лише у теоретичному плані, практична розробка з метою програмної реалізації є необхідною.

У роботі представлено:

1) застосування деяких підходів для опису яружних функцій, використаних Дж. Зойтендейком у методі можливих напрямків;

2) з метою полегшення вибору початкової точки в розрахунках при градієнтному спуску запропоновано застосування методу можливих напрямків до вирішення задач чебишевського наближення з додатковими обмеженнями.

Слід зазначити, що наведений підхід та первинний алгоритм може буде застосований у сфері підтримки прийняття рішень для вирішення задач, пов'язаних з описом складних об'єктів, розроблення програм управління вибухопожежною технікою у складних умовах. Практичне значення наведеного в роботі полягає у можливості розширення інструментарію опису зон ураження пересічених територій при техногенних аваріях.

Список використаних джерел

1. *Василенко В. А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / В. А. Василенко. – Новосибирск : Наука, 1983. – 218 с.
2. *Дзядик В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядик. – М. : Наука, 1977. – 512 с.
3. *Довгий С. О.* Системи підтримки прийняття рішень на основі статистично-ймовірнісних методів / С. О. Довгий, П. І. Бідюк, О. М. Трофимчук. – К. : Логос, 2014. – 419 с.
4. *Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений / Г. Зойтендейк. – М. : Издательство иностранной литературы, 1963. – 178 с.
5. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М. : Мир, 1980. – 608 с.
6. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами / Б. А. Попов. – К. : Наук. думка, 1989. – 272 с.
7. *Програмний виріб «Прогнозування та оцінка наслідків катастроф з хімічною речовиною на об'єктах ЗС України».* Керівництво з адміністрування. ІКПЛ.466452.009 32. – К. : ПІММС НАНУ, 2008. – 37 с.
8. *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения / Е. Я. Ремез. – К. : Наук. думка, 1969. – 620 с.