

РОЗДІЛ I. МЕХАНІКА

УДК 621.01

В.О. Харжевський, канд. техн. наук

Хмельницький національний університет, м. Хмельницький, Україна

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ШЕСТИКРАТНИХ ВУЗЛІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ СИНТЕЗУ ВАЖІЛЬНИХ КРУГОВИХ НАПРЯМНИХ МЕХАНІЗМІВ

В.А. Харжевский, канд. техн. наук

Хмельницкий национальный университет, г. Хмельницкий, Украина

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШЕСТИКРАТНЫХ УЗЛОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ СИНТЕЗА РЫЧАЖНЫХ КРУГОВЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ

Viacheslav Kharzhevskiy, PhD in Technical Sciences

Khmelnytskyi National University, Khmelnytskyi, Ukraine

METHOD OF SIXFOLD INTERPOLATION NODES DETERMINATION FOR THE SYNTHESIS OF CIRCULAR PATH GENERATING LINKAGE MECHANISMS

У роботі розглянуто питання синтезу важільних напрямних механізмів, ділянки шатунних кривих яких наближаються до дуги кола з високою точністю. Для проектування таких механізмів використані методи кінематичної геометрії шести нескінченно близьких положень механізму, що полягають у використанні шестикратних вузлів інтерполяції (точок Бурместера 5-го порядку), які математично забезпечують найвищий порядок дотику шатунної кривої шарнірного чотириланкового механізму до дуги кола в цій точці. Наведено аналітично-числовий метод визначення таких точок. Встановлено, що існують випадки, коли в шатунній площині існує лише одна точка Бурместера 5-го порядку, що може бути використана для проведення синтезу механізмів.

Ключові слова: важільні механізми, кругові напрямні механізми, синтез, шестикратні вузли інтерполяції, точки Бурместера 5-го порядку.

В работе рассмотрен синтез рычажных направляющих механизмов, участки шатунных кривых которых приближаются к дуге окружности с высокой точностью. Для проектирования таких механизмов использованы методы кинематической геометрии шести бесконечно близких положений механизма, в частности шестикратные узлы интерполяции (точки Бурместера 5-го порядка), которые математически обеспечивают наивысший порядок соприкосновения шатунной кривой шарнирного четырехзвенного механизма к дуге окружности в данной точке. Приведен аналитическо-численный метод определения таких точек. Установлено, что существуют случаи, когда в шатунной плоскости существует только одна точка Бурместера 5-го порядка, которая может быть использована для проведения синтеза механизмов.

Ключевые слова: рычажные механизмы, круговые направляющие механизмы, синтез, шестикратные узлы интерполяции, точки Бурместера 5-го порядка.

The article is dedicated to the synthesis of path generating linkage mechanisms which coupler points trace coupler curves with the approximation of the defined parts to the arc of the circle. For the designing of such mechanisms the methods of the kinematic differential geometry of the six infinitesimally close positions of the mechanism were used, in particular – sixfold interpolation nodes (Burmester points of the 5th order of tangency) which mathematically provides the highest order of tangency between the coupler curve of the four-bar linkage mechanism and approximation arc in this point. The analytical and numerical method of the determination of these points is considered in the article. It was found the cases where there is only one Burmester point of the 5th order in the coupler plane can be used for the synthesis of mechanisms.

Key words: linkage mechanisms, circular path generating mechanisms, synthesis, sixfold interpolation nodes, Burmester points of the 5th order.

Постановка проблеми. Під час проектування сучасних машин часто виникає проблема забезпечення руху виконавчих органів за певною траєкторією. Такі механізми називають напрямними, причому для цього можуть використовуватись важільні механізми. Крім того, важільні кругові напрямні механізми можуть застосовуватись як базові під час проектування циклових механізмів із періодичною зупинкою вихідної ланки. Такі механізми мають певні переваги перед іншими типами механізмів, зокрема кулачковими та мальтійськими, оскільки не містять у своєму складі вищих кінематичних пар, забезпечують більшу надійність у роботі, більші робочі швидкості та навантажувальну здатність. Серед прикладів впровадження важільних кругових напрямних механізмів на практиці можна відзначити механізм перекидача для багат шарових хлібопекарських подових печей, механізм для сортування зерна, механізми привода голлок основов'язальних машин та багато інших.

У випадку необхідності забезпечення високою точністю наближення, синтез таких механізмів являє собою складну задачу, яка може бути розв'язана лише з використанням сучасних аналітично-числових методів. Таким чином, розроблення таких методів є актуальним науково-технічним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує два напрямки у синтезі важільних напрямних механізмів: використання умов найкращого наближення за Чебишевим, що полягає у пошуку таких геометричних параметрів механізмів, які забезпечують максимально можливу кількість спільних точок на інтервалі наближення між шатунною кривою і дугою кола з рівномірним характером зміни відхилень. У цьому напрямку слід відзначити роботи Кіницького [4], Едіяна, Саркіяна [11]. Задача синтезу таких механізмів детально розглядалась для механізмів із симетричною формою шатунних кривих, а для прямолінійно-напрямних механізмів Гассманом [9] розроблено чисельний метод для визначення параметрів механізмів із несиметричною формою шатунної кривої. Другим напрямком у синтезі важільних напрямних механізмів є використання методів кінематичної геометрії, що започатковані німецьким ученим Бурместером. У цьому напрямку слід відмітити роботи Бейера [2], Мюллера, Ліхтенхельдта [6], Черкудинова [1]. Існує також багато сучасних робіт у цьому напрямку, зокрема Уанга [14], Іна, Хана [12; 13] та безліч робіт інших дослідників.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Незважаючи на велику кількість робіт із синтезу важільних кругових напрямних механізмів, наявні методи синтезу забезпечують, як правило, лише частковий розв'язок поставленої задачі. Як відомо, під час проведення синтезу таких механізмів методами кінематичної геометрії максимально можливу точність наближення можна забезпечити завдяки використанню вузлів інтерполяції якомога вищої кратності. Зокрема, для шатунної кривої шарнірного чотириланкового механізму такими шатунними точками будуть шестикратні вузли інтерполяції (точки, що забезпечують дотик 5-го порядку шатунної кривої та дуги кола у цій точці – точки Бурместера 5-го порядку). Однак наявні методи синтезу дозволяють визначати такі особливі точки лише в окремих випадках, зокрема у випадках розпаданя кривих Бурместера.

Мета статті. Метою цієї роботи є розроблення аналітично-числового методу синтезу кругових напрямних механізмів на базі несиметричного шарнірного чотириланкового механізму з дотиком 5-го порядку шатунної кривої до дуги кола в цій точці (тобто відповідно до умови наявності шестикратного вузла інтерполяції – точки Бурместера 5-го порядку). Це дозволить проводити проектування таких механізмів з ділянками наближення високої точності, оскільки в цих особливих точках спостерігається не лише збігання шатунної кривої та дуги кола, але і їх перших п'яти похідних.

Виклад основного матеріалу. Кінематичну схему кругового напрямного механізму на базі шарнірного чотириланкового механізму $OABCD$ наведено на рис. 1. При заданому положенні нерухомих шарнірів механізму O та C ($d = l_{oc} = 1$), змінними параметрами механізму є довжини його ланок: кривошипа r , шатуна b , коромисла c , а також параметри, що визначають положення його шатунної точки: довжина другого плеча шатуна k та кут його злому Ω . Кожна точка шатунної площини ABD механізму може бути прийнята за шатунну, причому рулетка такої точки буде шатунною кривою, яка в цій точці буде мати певну кривизну. Якщо провести з центра кривизни точки цієї кривої коло радіусом кривизни, побудоване коло буде мати з шатунною кривою дотик щонайменше 2-го порядку. Якщо при цьому обрана точка на шатунній кривій буде екстремумом функції кривизни – будемо мати дотик 3-го порядку. Геометричним місцем таких точок є крива кругових точок (рис. 1). Для наявності дотику 4-го порядку ця точка повинна бути точкою Бурместера. Зазначені точки визначаються як перетин кривої,

що є геометричним місцем точок з дотиком 4-го порядку з кривою кругових точок. А у випадку шести нескінченно близьких положень шатунної площини – точкою Бурместера 5-го порядку, що забезпечить дотик 5-го порядку та відповідно рівність перших п'яти похідних шатунної кривої та кола кривизни у цій точці. Як видно з рис. 1, ця точка визначається як перетин трьох кривих – кривих геометричного місця точок з дотиком 4-го та 5-го порядків та кривої кругових точок.

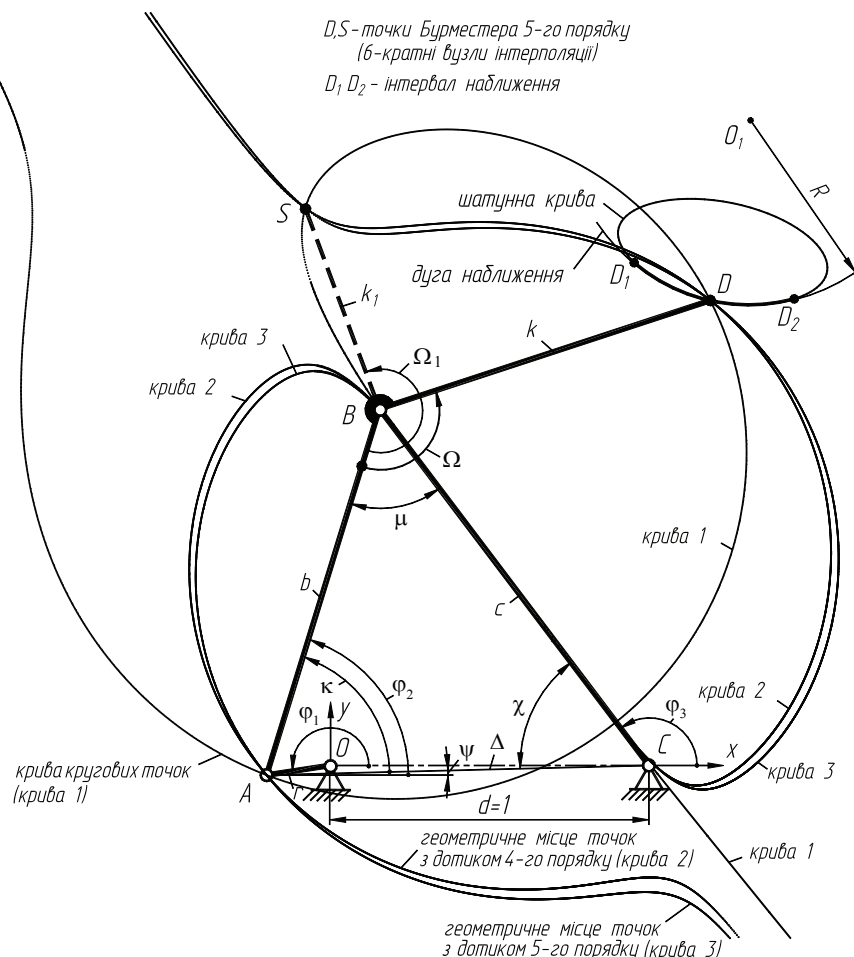


Рис. 1. Важільний круговий напрямний механізм та шестикратні вузли інтерполяції його шатунної площини (точки Бурместера 5-го порядку)

У цій роботі розглянемо метод синтезу важільних кругових напрямних механізмів на базі шарнірного чотириланкового механізму з найвищим порядком дотику шатунної кривої та кола наближення, що полягає у пошуку в шатунній площині точок Бурместера 5-го порядку. Тобто задача полягає у визначенні таких параметрів механізму, щоб деяка точка D його шатунної площини викреслювала шатунну криву, яка в цій точці мала б дотик 5-го порядку зі своїм дотичним колом.

Відповідно до теоретичних основ кінематичної геометрії [3] умова наявності дотику кривої 5-го порядку до дуги кола є такою:

$$\frac{dK}{d\varphi_1} = \frac{d^2K}{d\varphi_1^2} = \frac{d^3K}{d\varphi_1^3} = 0, \quad (1)$$

де K – функція кривизни шатунної кривої, у вираз (1) входять її похідні за узагальненою координатою, за яку прийнято кут повороту кривошипа φ_1 .

Кривизна шатунної кривої як функції, заданої параметрично, визначається, як відомо [3], за формулою:

$$K = (x'_D y''_D - x''_D y'_D) / \sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^3}, \quad (2)$$

де x'_D, y'_D, x''_D, y''_D – відповідно проекції швидкості та прискорення шатунної точки. Перша похідна від кривизни шатунної кривої за узагальненою координатою [8]:

$$K' = \frac{dK}{d\varphi_1} = \frac{x'_D y'''_D - x'''_D y'_D}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^3}} - \frac{3(x'_D y''_D - x''_D y'_D)(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^5}}, \quad (3)$$

де x'''_D, y'''_D – швидкість зміни прискорення точки D у проекціях на осі координат. Друга похідна від кривизни шатунної кривої за узагальненою координатою:

$$K'' = \frac{d^2 K}{d\varphi^2} = \frac{x'_D y^{IV}_D - x^{IV}_D y''_D + x''_D y'''_D - x'''_D y'_D}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^3}} - \frac{3(x'_D y'''_D - x'''_D y'_D)(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^5}} - 3 \left[\frac{x''^2_D + y''^2_D + x'_D x'''_D + y'_D y'''_D}{x'_D x''_D + y'_D y''_D} + \frac{x'_D y'''_D - x'''_D y'_D}{x'_D y''_D - x''_D y'_D} - \frac{5(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{(x'^2_D + y'^2_D)} \right] \frac{(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^5}} \times (x'_D y''_D - x''_D y'_D), \quad (4)$$

де x^{IV}_D, y^{IV}_D – похідні 4-го порядку від переміщення шатунної точки D механізму. Третя похідна від кривизни шатунної кривої за узагальненою координатою:

$$K''' = \frac{d^3 K}{d\varphi^3} = \frac{x'_D y^V_D + 2x''_D y^{IV}_D - 2x^{IV}_D y''_D - x^V_D y'_D}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^3}} - \frac{15(x'_D x''_D + y'_D y''_D)^2 (x'_D y'''_D - x'''_D y'_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^7}} - \frac{6(x'_D x''_D + y'_D y''_D)(x'_D y^{IV}_D + x''_D y'''_D - x'''_D y''_D - x^{IV}_D y'_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^5}} - \frac{3(x'_D y'''_D - x'''_D y'_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^5}} \times (x''^2_D + y''^2_D + x'_D x'''_D + y'_D y'''_D), \quad (5)$$

де x^V_D, y^V_D – похідні 5-го порядку від переміщення точки D механізму у проекціях на осі координат. Для спрощення базових формул введемо такі коефіцієнти:

$$H_1 = \frac{x''^2_D + y''^2_D + x'_D x'''_D + y'_D y'''_D}{x'_D x''_D + y'_D y''_D}; H_2 = \frac{x'_D y'''_D - x'''_D y'_D}{x'_D y''_D - x''_D y'_D}; H_3 = \frac{5(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{x'^2_D + y'^2_D}. \quad (6)$$

Перші похідні зазначених коефіцієнтів (6) за узагальненою координатою:

$$H'_1 = \frac{3(x''_D x'''_D + y''_D y'''_D) + x'_D x^{IV}_D + y'_D y^{IV}_D}{x'_D x''_D + y'_D y''_D} - H_1^2; H'_2 = \frac{x'_D y^{IV}_D + x''_D y'''_D - x'''_D y''_D - x^{IV}_D y'_D}{x'_D y''_D - x''_D y'_D} - H_2^2; H'_3 = \frac{5(x''^2_D + y''^2_D + x'_D x'''_D + y'_D y'''_D)}{x'^2_D + y'^2_D} - \frac{10(x'_D x''_D + y'_D y''_D)^2}{(x'^2_D + y'^2_D)^2} = H_1 H_3 - 0,4 H_3^2. \quad (7)$$

Враховуючи введені позначення, формули (3)–(5) запишуться таким чином:

$$K' = (H_2 - 0,6H_3)K; K'' = K'^2/K + (H_2' - 0,6H_3')K. \quad (8)$$

$$K''' = \left[\frac{x_D' y_D'' + 2x_D'' y_D'' - 2x_D'' y_D'' - x_D'' y_D''}{x_D' y_D'' - x_D'' y_D''} - 1,2H_3 (H_2' + H_2'^2) \right] K - \\ - 0,6H_3 K \left[H_1 H_2 - H_2 H_3 + (H_1 + H_2 - H_3)^2 + H_1' + H_2' - H_3' \right]. \quad (9)$$

Всі величини, що входять у формули (1)–(9), є відомими та можуть бути розраховані, зокрема, числовим способом (наприклад, з використанням системи *Mathcad* [5]), або аналітично, зокрема, з використанням формул, виведених у [8].

Очевидно, що безпосереднє використання формул (1)–(9) для проведення синтезу кругових напрямних механізмів можливе лише методами числового аналізу завдяки добору значень геометричних параметрів або за допомогою направленої пошуку, що можливо, але є досить громіздкою процедурою й у випадку необхідності проведення багатокритеріального оптимізаційного синтезу є малоефективним. Тому для розв'язання поставленої задачі пропонується такий аналітично-числовий метод:

1. Змінюємо кут повороту кривошипа від 0 до 2π з деяким кроком. Для кожного положення механізму визначаємо у шатунній площині точки Бурместера. Як стверджується у теоретичних положеннях кінематичної геометрії, для будь-якого положення шатунної площини точок Бурместера може виявитись дві, чотири, або не виявитись зовсім [1]. Методика визначення точок Бурместера викладена автором у [7].

2. Оскільки точки Бурместера забезпечують дотик не нижче 4-го порядку, задача полягає у визначенні тих з них, які характеризуються наявністю дотику 5-го порядку. Для цього для всіх знайдених точок Бурместера за формулою (9) розраховуємо значення третьої похідної від кривизни шатунної кривої за узагальненою координатою.

Приклад отриманих результатів розрахунку показано на рис. 2. Точки 1–8 на цьому графіку відповідають значенням $K''' = 0$ і визначають шестикратні вузли інтерполяції (точки Бурместера 5-го порядку).

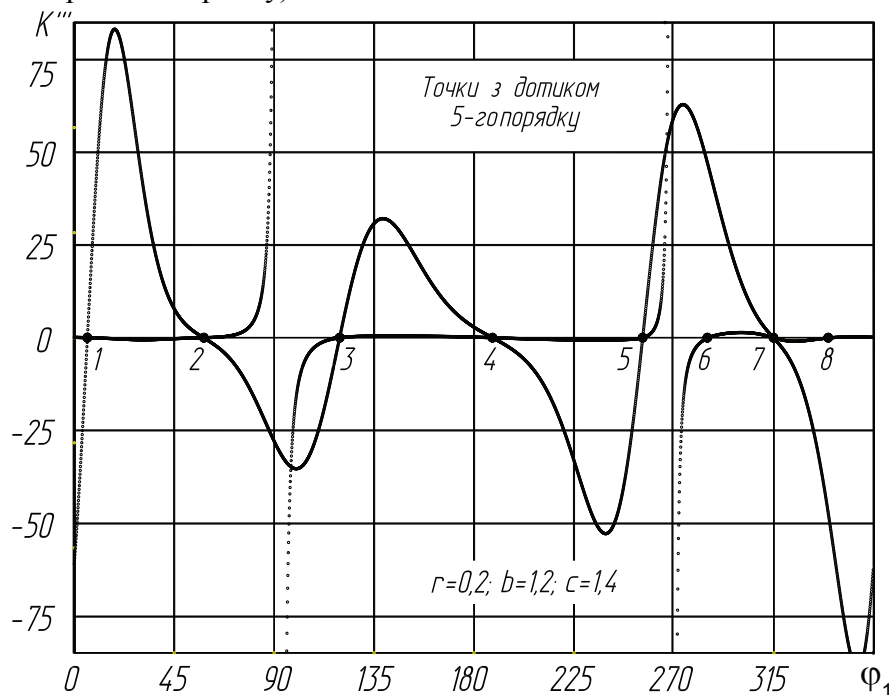


Рис. 2. Графік зміни третьої похідної від функції кривизни шатунних кривих точок Бурместера за узагальненою координатою – кутом φ_1

3. Чисельним способом визначаємо положення шатунної площини механізму, що відповідають випадку наявності точки Бурместера 5-го порядку. В таблицю зведено геометричні параметри знайдених механізмів (для прикладу: $r = 0,2$; $b = 1,2$; $c = 1,4$). Для кожної знайденої точки в таблицю були внесені параметри механізму: довжина другого плеча шатуна k та кут його злому Ω , а також радіус кола наближення R .

Таблиця

Геометричні параметри механізмів, синтезованих за умовою дотику 5-го порядку

№	Кут повороту кривошипа φ_1	Перша точка Бурместера 5-го порядку		
		k	Ω	R
1	6,0640986063225	1,258514623823	63,6028995798841	0,09368679
2	58,060010002766	3,422586668992	227,380567442409	5,30065828
3	119,33177217463	1,755147857869	103,581693074752	0,16643301
4	188,62816846513	1,090690689529	125,264025684210	0,57833110
5	256,64693759052	0,015515406277	225,468836217159	1,43505590
6	279,81862592419	0	0	1.4
7	315,32782621366	0,676326243674	63,1793666197615	0,34985905
8	344,01530605997	1,084394870725	70,5188675280895	0,15684768
№	Кут повороту кривошипа φ_1	Друга точка Бурместера 5-го порядку		
		k_2	Ω_2	R_2
1	6,0640986063225	0,14138382101397	220,913536514927	1,58797146
2	58,060010002766	2,16364992330239	72,8021283488889	0,54227562
3	119,33177217463	1,87090599582944	226,131801375647	4,26080455
4	188,62816846513	0,67059629456367	217,394681683210	3,12030763
5	256,64693759052	0,77208840741504	97,1950841154885	0,10226790
6	279,81862592419	0,84695307820426	89,2593753735240	0,14609083
7	315,32782621366	0,40619201866240	51,0912206809169	0,72297295
8	344,01530605997	0	0	1.4

Як видно з наведених результатів, для заданого шарнірного чотириланкового механізму, що визначається довжинами кривошипа r , шатуна b та коромисла c , було знайдено 8 положень шатунної площини, що визначаються різними кутами повороту кривошипа φ_1 , для яких точки Бурместера мають властивість дотику 5-го порядку (шестикратні вузли інтерполяції).

Причому у всіх точках, крім 6 та 8, графік функції K''' проходить через зазначені точки двічі: це означає, що для кожного з цих положень шатунної площини можна знайти по дві точки Бурместера 5-го порядку. Пояснення цієї особливості є в роботі Геронімуса [3], який стверджував, що якщо три точки Бурместера мають властивість п'ятого порядку, то цю ж властивість має також четверта точка Бурместера.

Зазначимо, що як точки Бурместера 5-го порядку розглядаються також рухомі шарніри механізму A та B , оскільки вони описують ідеальні кола та забезпечують дотик не тільки 5-го, але і як завгодно більш високого порядку (проте ці точки з очевидних причин не можуть бути використані для синтезу кругових напрямних механізмів). Звідси випливає висновок: якщо одна з точок Бурместера буде 5-го порядку, то цю ж властивість буде мати також друга точка Бурместера.

У теоретичних основах кінематичної геометрії також стверджується [1], що для заданого положення механізму точок Бурместера може виявитись дві, чотири або жодної (враховуючи, що дві з них – рухомі шарніри механізму).

Як видно з отриманих нами результатів, існують випадки, коли це твердження не завжди є справедливим, оскільки для прикладу, що розглядався вище, з 16 точок Бурместера 5-го порядку, які існують для механізму із заданими параметрами, 14 з них від-

повідують цьому твердженню, а 2 – ні. В таблиці показано, що в положеннях кривошипа № 6 та № 8 однією з точок Бурместера 5-го порядку є рухомий шарнір *B* механізму, тобто загальна кількість точок Бурместера 5-го порядку – три, а таких, що не збігаються з рухомими шарнірами механізму та можуть бути використані для синтезу кругового напрямного механізму – одна.

Висновки і пропозиції. В роботі наведено аналітично-числовий метод синтезу важільних кругових напрямних механізмів, що ґрунтується на теоретичних положеннях кінематичної геометрії шести нескінченно близьких положень шатунної площини з максимально можливим порядком дотику шатунної кривої до дуги кола на основі точок Бурместера 5-го порядку. Використання таких точок під час проведення синтезу механізмів дозволяє отримати теоретично точніші ділянки наближення. Розроблені алгоритми та відповідне програмне забезпечення. Наведено деякі результати проведеного синтезу. Роботу планується продовжити в напрямку визначення меж існування таких механізмів з метою проведення їх оптимізаційного синтезу за різними критеріями, зокрема кінематичними та кінетостатичними.

Список використаних джерел

1. *Артоболевский И. И.* Синтез плоских механизмов / И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. А. Черкудинов. – М. : Физматгиз, 1959. – 1084 с.
2. *Бейер Р.* Кинематический синтез механизмов. Основы теории метрического синтеза механизмов / Р. Бейер. – М. : Машгиз, 1959. – 318 с.
3. *Геронимус Я. Л.* Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов / Я. Л. Геронимус. – М. : Гос. издательство физ.-мат. литературы, 1962. – 400 с.
4. *Киницкий Я. Т.* Шарнирные механизмы Чебышева с выстоем выходного звена / Я. Т. Киницкий. – К. : Вища школа, 1990. – 232 с.
5. *Кіницький Я. Т.* Теорія механізмів і машин в системі Mathcad : навч. посіб. / Я. Т. Кіницький, В. О. Харжевський, М. В. Марченко. – Хмельницький : ХНУ, 2014. – 295 с.
6. *Лихтенхельдт В.* Синтез механизмов / В. Лихтенхельдт. – М. : Наука, 1964. – 228 с.
7. *Харжевський В. О.* Аналітично-числовий синтез кругових напрямних механізмів на базі шарнірного чотириланкового механізму з використанням точок Бурместера / В. О. Харжевський, Я. Т. Кіницький // *Машинознавство*. – 2005. – № 4. – С. 26–31.
8. *Харжевський В. О.* Методика визначення особливих точок Чебишева для синтезу важільних прямолінійно-направних механізмів / В. О. Харжевський // *Вісник Хмельницького національного університету*. – 2015. – № 3. – С. 34–41.
9. *Gassmann V.* Synthese von Geradföhrungen mit ebenen Viergelenkgetrieben, Hamburg, Universität der Bundeswehr Diss., 2000. – 102 p.
10. *McCarthy, J.*, Geometric Design of Linkages, 2nd edition / McCarthy J., Soh G., Springer-Verlag, New York, 2011. – 448 p.
11. Sarkissyan Y.L. Approximations in Synthesis of Mechanisms / State Engineering University of Armenia Proceedings. Series “Mechanics, Machine Science, Machine-building”, Issue 15, № 2. – 2012. – P. 9–21.
12. *Yin L.* Synthesis research of straight-line mechanisms by analyzing solution regions / L. Yin, J. Han // *Journal of University of Science and Technology, Beijing*. – 2011. – № 33(2). – С. 237–243.
13. *Yin L.* Synthesis method based on solution regions for planar four-bar straight-line linkages / L. Yin, J. Han, C. Mao, J. Huang, T. Yang // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2012. № 26 (10). – P. 3159–3167.
14. *Wang D.* Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages / Wang D., Wang W. – John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2015. – 450 p.