Жаровський Р., Щербак Л. Моделі геофізичних сигналів на основі лінійних випадкових процесів // Вісник ТДТУ. – 2009. - Том 14. - №1. – ст.. 138-144. – (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 519.21

Р. Жаровський[1]; Л. Щербак[2], докт. техн. наук

[1]Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя
[2]Національний авіаційний університет

МОДЕЛІ ГЕОФІЗИЧНИХ СИГНАЛІВ НА ОСНОВІ ЛІНІЙНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

У роботі розглянуто методики підвищення інформативності результатів обробки сейсмічних даних. Розглянуто типи сейсмічних завад. Обґрунтовується використання класу лінійних випадкових процесів для моделювання сейсмічних завад. Розглянуто математичну модель неперервного і дискретного RLC-шуму. Наводяться результати з моделювання дискретного RLC-шуму.
***Ключові слова:** RLC-шум, лінійний випадковий процес, геофізика, формуючий фільтр.*

R. Zharovskiy, L. Scherbak

GEOPHYSICAL SIGNAL MODELS BASED ON PRIMARY LINEAR ACCIDENTAL PROCESSES

Methods of raising informational results of seismic data are presented in this article. Types of seismic noise are researched. The use of accidental linear processes is determined for the modeling of seismic noise. Mathematical models of continuous and discrete RLS noise are researched. The method of computer modeling is based using discrete RLS noise.
***Key words:** RLC-noise, linear accidental process, geophysics, forming filter.*

Вступ

Для вирішення задач пошуку корисних копалин і дослідження земних надр в геофізиці широко використовуються інформаційно-вимірювальні системи. Серед них особливе місце займають системи, призначені для проведення спектральних вимірювань - це корелометри, спектроаналізатори і фазовимірювальні системи.

Як відомо, коливання, які отримують з входів сейсмодатчиків, містять як корисний сигнал, так і різного виду завади. Більшість розроблених на сьогоднішній день вимірювальних систем працюють в умовах, коли потужність корисного сигналу перевищує потужність завади. Однак впровадження в сейсморозвідці екологічно чистих невзривних методів досліджень [1, 2] приводить до зниження інтенсивності корисних сигналів і збільшення інтенсивності завад, які отримують на входах сейсмодатчиків. В зв’язку з цим останнім часом в якості корисних хвиль все частіше використовують полігармонічні хвилі, які штучно утворюють з допомогою вібраторів. В точці прийому вони є корисними відбитими чи заломленими поздовжніми чи поперечними хвилями, всі інші хвилі, які перешкоджають виділенню і обробці корисних хвиль і вимірюванню їх параметрів, належать до розряду завад. Частіше за все, це розсіяні хвилі, які не мають вираженого фронту і утворилися на невеликих включеннях в досліджуваному середовищі. До завад також відносять мікросейсмічні коливання промислового характеру, а також завади, викликані природними джерелами (дощ, вітер і т. д.).

В даний час питання вимірювання взаємних спектрально-кореляційних характеристик сейсмічних сигналів за наявності детермінованих і випадкових завад набувають особливої актуальності. На перший план виносяться задачі з підвищення точності, завадостійкості і достовірності результатів вимірювань.

Перейдемо до основного змісту роботи.

При проведенні сейсмічних досліджень дані, які поступили на систему реєстрації, підлягають подальшій обробці для виділення інформації про структуру сейсмічного середовища [3]. Тому необхідно знати, яким чином будуть відбуватись зміни завад і яким чином їх можна відфільтрувати або послабити їх вплив на кінцевий результат обробки сейсмограм. Тому для проведення досліджень обробки завад зручно користуватись **математичними моделями випадкових завад**. Природно, що математична модель не може абсолютно точно відобразити всі фізичні процеси, які призводять до шумоутворення в реальних умовах, тому вона повинна розглядатись як деяке наближення, яке відображає основні сторони реальних фізичних явищ. Разом з тим такі моделі мають бути достатньо простими і зручними при їх практичному використанні, щоб уникнути громіздких математичних розрахунків.

В якості моделей сейсмічних процесів будемо розглядати випадкові функції з неперервним часом, а також зв'язані з ними послідовності відліків – часові ряди або випадкові процеси з дискретним часом. Модель випадкового процесу з неперервним часом найбільш повно відображає фізику реальних сейсмічних завад, що спостерігаються в природі і реєструються у вигляді електричних сигналів на виході сейсмодатчиків. Однак під час використання цифрової обробки сейсмограм приходиться мати справу не з неперервними сигналами, а з масивами чисел, які отримують шляхом дискретизації по часу реальних сейсмічних завад. Тому при побудові математичної моделі утворення сейсмічних завад, які присутні в зареєстрованому сейсмічному сигналі, будемо використовувати дискретний час.

Виходячи із загальних фізичних описів сейсмічних завад можна дійти до висновку, що шумові процеси в геофізиці можуть бути описані за допомогою лінійних випадкових процесів [4].

Лінійні випадкові процеси належать до класу так званих безмежно подільних випадкових процесів, тому найбільш повно їх властивості, які зумовлені характеристиками ядра $\varphi(\tau, t)$ та породжуючого процесу $\eta(\tau)$, описуються з використанням теорії безмежно подільних законів розподілу.

Клас лінійних випадкових процесів замкнений відносно лінійних перетворень, які зводяться до відповідних лінійних перетворень їх невипадкових ядер $\varphi(\tau, t)$. Назва процесу $\xi(t)$ утворюється із назви формуючого фільтра [4].

Лінійним випадковим процесом назвемо отриманий в результаті згортки процес

$$\xi(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\zeta(t-\tau),\ t \in (-\infty, \infty),$$

де $\varphi(\tau)$ - ядро представлення або імпульсна характеристика формуючого фільтра;
$\zeta(t)$ - дійсний стохастично неперервний випадковий процес із незалежними приростами (породжуючий процес).

Лінійний випадковий процес з неперервним часом. При побудові математичної моделі сейсмічних завад припустимо, що шумовий процес $\xi(t)$, який спостерігається в точці прийому сигналу – відгук лінійної системи (рис. 1) на дію породжуючого процесу, що представляє собою послідовність окремих імпульсів, які поширюються від різних випадкових джерел. Ці джерела знаходяться на різних відстанях від місця реєстрації, і сигнали від них приходять в точку прийому різними шляхами. Кожен з імпульсів має певну тривалість й інтенсивність, які носять випадковий характер.

Породжуючий процес $\zeta(t)$ можна описати випадковим процесом з незалежними приростами з безмежно подільним законом розподілу. Відгук $\xi(t)$ лінійної системи, у випадку дії на неї породжуючого процесу $\zeta(t)$ з незалежними приростами, також описується даним класом процесів.

Нехай $\pi_1(\tau)$ - узагальнений пуассонівський процес [5] з незалежними приростами, заданий на інтервалі часу $-\infty < \tau < \infty$. Припускаємо, що точки зростання реалізацій процесу співпадають з моментами появи імпульсу. В цих точках реалізації процесу $\pi_1(\tau)$ отримуємо скачки величиною $\hat{\lambda}_{\tau k}$. За час від τ до $\tau+\Delta\tau$ приріст процесу буде рівним сумі сачків за цей період $\pi_1(\tau+\Delta\tau)-\pi_1(\tau)=\sum\limits_{\tau_k\in(\tau,\tau+\Delta\tau)}\lambda_{\tau_k}$.

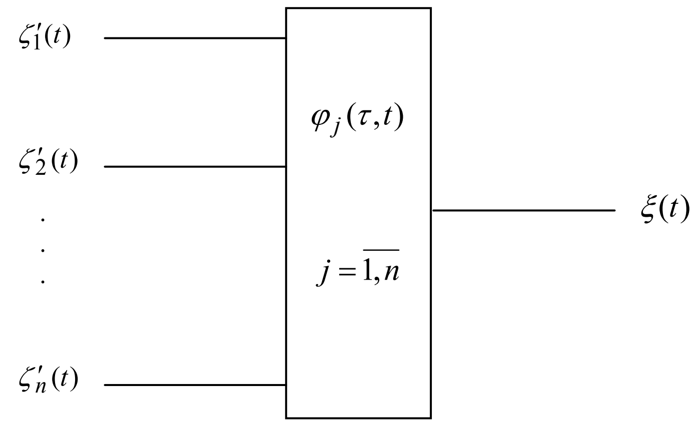

Рисунок 1 – Лінійна система з багатьма входами

Таким чином, шумовий процес в точці розміщення приймача для фіксованого моменту t можна представити у вигляді

$$\xi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{\tau_k}\varphi(\tau_k,t). \tag{1}$$

Використовуючи узагальнений пуассонівський процес $\pi_1(\tau)$, запишемо (1) у вигляді

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)d\pi_1(\tau). \tag{2}$$

Модель шуму також можна представити у вигляді електричної системи (рис. 1) з багатьма входами з вектором імпульсних перехідних функцій $\left\{\varphi_j(\tau,t),\ j=\overline{1,n}\right\}$. В даному випадку відгук досліджуваної системи можна розглядати як суму випадкових процесів

$$\xi(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j\xi_j(t),\ t\in(-\infty;\infty), \tag{3}$$

де a_j - вагові коефіцієнти, $\xi_j(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_j(\tau,t)d\zeta(\tau),\ j=\overline{1,\ n}$. Породжуючий процес $\zeta'(t)$ може бути заданий з допомогою характеристичних функцій.

Запишемо імпульсну перехідну характеристику для формування неперервного RLC шуму [6]:

$$\varphi_j(t)=\frac{\omega_j^2}{\psi_j}e^{-\beta_j t}\sin(\psi_j t)\cdot U(t),\ t\in(\overline{-\infty;\infty}),\ j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

де $\psi_j=\sqrt{\omega_j^2-\beta_j^2}$, $\beta_j=\dfrac{R_j}{2L_j}>0$, $\omega_j=\dfrac{1}{\sqrt{L_jC_j}}$, $\omega_j>\beta_j$.

Ймовірнісний аналіз запропонованої математичної моделі проведений з умовою, що на входи системи (рис.1) поступає процес, який можна розглядати як **накладання великої кількості незалежних імпульсів**, які виникають в різні випадкові моменти часу. Такий вхідний процес можна представити **моделями типу білий шум**. В цьому випадку запишемо компоненти $\xi_j(t)$ формули (3) у вигляді лінійного процесу

$$\xi_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(t-\tau) d\zeta_j(\tau),\ j = \overline{1,n}, \quad (5)$$

де $\varphi_j(t),\ t \in (-\infty, \infty)$ визначається за формулою (4), а $\left\{\zeta_j(\tau),\ j = \overline{1,n}\right\}$ - вектор породжуючих процесів з незалежними приростами.

Кореляційну функцію процесу (3) із врахуванням (5) запишемо у вигляді

$$R(s) = \sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j h_{kj}(s),\ s \in (-\infty, \infty), \quad (6)$$

де $h_{kj}(s)$ - взаємна кореляційна функція k-го і j-го каналів. Зауважимо, що (6) представляє собою автокореляційну функцію процесу (3), тому $R(s) = R(-s)$, отже, (6) можна записати у вигляді $R(s) = R(|s|) = \sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j h_{kj}(|s|),\ s \in (-\infty, \infty)$, де $h_{kj}(|s|) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(\tau)\varphi_k(\tau + |s|) d\tau$. Виконавши інтегрування, в останньому виразі отримаємо

$$h_{kj}(|s|) = \frac{\kappa_{2kj}}{2} \frac{\omega_k^2 \omega_j^2}{\psi_k \psi_j} e^{-\beta_j |s|} \left[a_{kj} \cos\psi_j s + b_{kj} \sin\psi_j |s|\right], \quad (7)$$

де для всіх $k, j = \overline{1,n},\ \kappa_{2kj}$ - змішаний семіінваріант випадкових величин $\zeta_k(1)$ і $\zeta_j(1)$,

$$a_{kj} = \frac{\beta_{kj}}{\beta_{kj}^2 + \tilde{\psi}_{kj}^2} - \frac{\beta_{kj}}{\beta_{kj}^2 + \psi_{kj}^2} \geq 0,$$

$$b_{kj} = \frac{\tilde{\psi}_{kj}}{\beta_{kj}^2 + \tilde{\psi}_{kj}^2} + \frac{\psi_{kj}}{\beta_{kj}^2 + \psi_{kj}^2},$$

$$\beta_{kj} = \beta_k + \beta_j,\ \psi_{kj} = \psi_k + \psi_j,\ \tilde{\psi}_{kj} = \psi_k - \psi_j.$$

Таким чином, (6) з врахуванням (7) запишемо наступним чином

$$R(s) = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\kappa_{2kj}}{2} a_k a_j \frac{(\omega_k \omega_j)^2}{\psi_k \psi_j} e^{-\beta_j |s|} \left[a_{kj} \cos\psi_j s + b_{kj} \sin\psi_j |s|\right],\quad s \in (-\infty, \infty). \quad (8)$$

Якщо ввести позначення

$$A_{jn} = \frac{a_j \omega_j^2}{2\psi_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{kj} \omega_k^2}{\psi_k} e\kappa_{2kj} \geq 0,$$

$$B_{jn} = \frac{a_j \omega_j^2}{2\psi_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_{kj} \omega_k^2}{\psi_k} e\kappa_{2kj}$$

то кореляційну функцію процесу (3) в кінцевому варіанті запишемо у вигляді

$$R(s) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\beta_j |s|} \left[A_{jn} \cos\psi_j s + B_{jn} \sin\psi_j |s|\right],\ s \in (-\infty, \infty). \quad (9)$$

При $s = 0$ отримуємо дисперсію процесу (3)

$$R(0) = \sum_{j=1}^{n} A_{jn} = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{a_j a_k (\omega_k \omega_j)^2}{2\psi_k \psi_j} a_{kj} \kappa_{2kj}. \quad (10)$$

Процес (3) є стаціонарним і гільбертовим, $R(0) < \infty$, тому для нього існує спектральна щільність, яка визначається наступним чином

$$S(\omega) = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{A_{jn}\beta_j(\omega_j^2 + \omega^2) + B_{jn}\psi_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\psi_j^2}. \qquad (11)$$

Комп'ютерне моделювання лінійного RLC випадкового процесу з дискретним часом.

Проведемо моделювання реалізації лінійного RLC шуму. Скористаємось алгоритмом моделювання, який було описано в [5]. Згідно з даним алгоритмом моделювання розпочинаємо з формування реалізації дискретного білого шуму [6] (рис.2) фільтром з експонентно-синусною імпульсною перехідною характеристикою (12)

$$\varphi(t) = ue^{-\alpha t} \sin\theta \cdot t \cdot U(t);\ t \in (\overline{-\infty;\infty});\ \alpha > 0; \theta \neq \pi k;\ k \in (\overline{-\infty;\infty}), \qquad (12)$$

де $U(t)$ - функція Хевісайда.

Параметр u – коефіцієнт передачі формуючого фільтра вибирається рівним 1 або

$$u = \frac{2 \cdot (ch\alpha - \cos\theta)}{\sin\theta},$$

для формуючого фільтра, який не змінює математичного сподівання породжуючого процесу. Для даного випадку коефіцієнт було вибрано 1.

Комплексна передаточна характеристика фільтра має вигляд

$$K(\omega) = \frac{u\sin\theta}{2[ch(\alpha + j\omega) - \cos\theta]};\ \omega \in [-\pi;\pi).$$

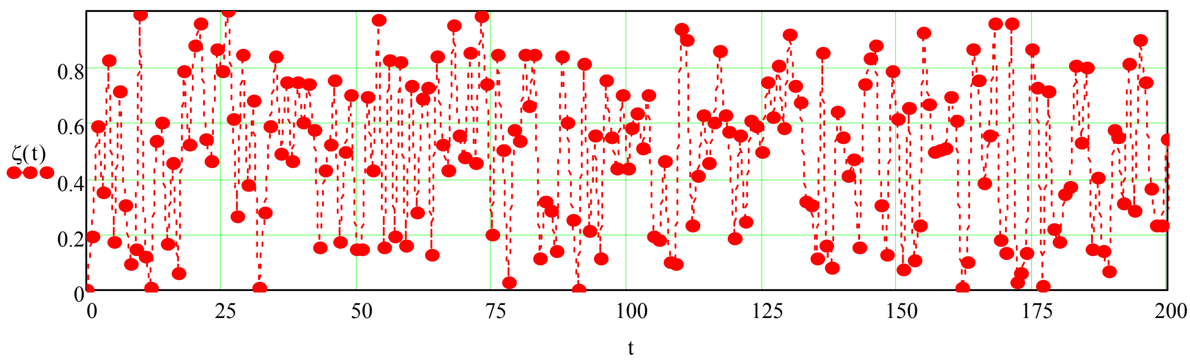

Рисунок 2 – Реалізація дискретного базового білого шуму

Дискретний RLC-шум як лінійний випадковий процес запишемо наступним чином:

$$\xi(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} ue^{-\alpha(t-\tau)} \sin[\theta(t-\tau)]\zeta(\tau)U(t-\tau);\ t \in (\overline{-\infty;\infty}), \quad t \in (\overline{-\infty;\infty}), \alpha > 0, \theta \neq \pi k,\ k \in (\overline{-\infty;\infty}) \qquad (13)$$

де $\{\zeta(t),\ t \in (\overline{-\infty;\infty})\}$ - породжуючий стаціонарний білий шум з математичним сподіванням $M\zeta(t) = æ_1$ і дисперсією $D\zeta(t) = æ_2$.

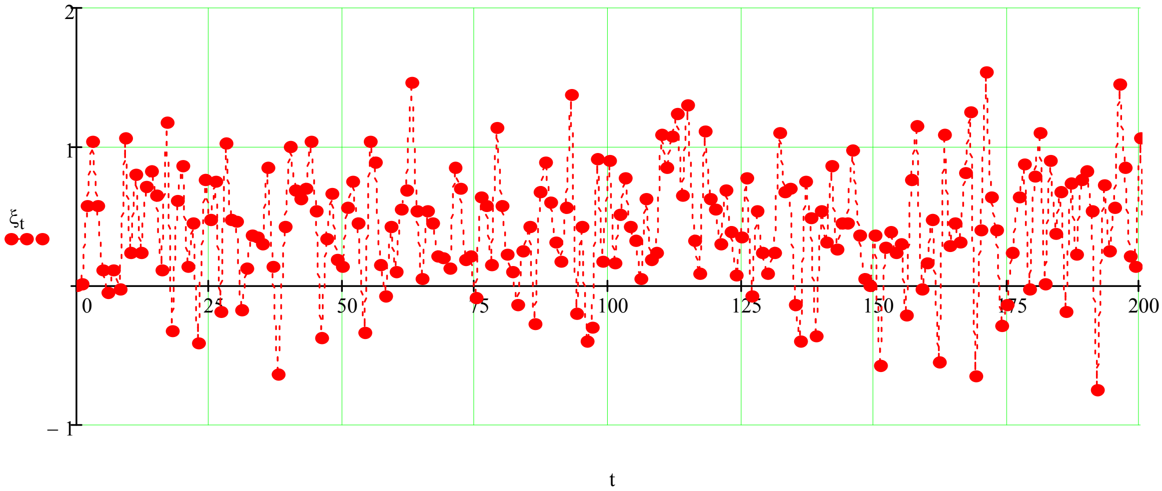

Рисунок 3 – Реалізація RLC – шуму $\alpha = 0{,}1; \theta = \frac{\pi}{3}$

Математичне сподівання RLC-шуму

$$M\xi(t) = æ_1 \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} ue^{-\alpha t} \sin\theta\tau = \frac{æ_1 u \sin\theta}{2(ch\alpha - \cos\theta)},$$

дисперсія дискретного RLC-шуму.

$$D\xi(t) = æ_2 \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} a^2 ue^{-\alpha t} \sin^2\theta\tau = \frac{æ_1 u^2}{2} \cdot \left[\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}-1} - \frac{e^{2\alpha} - \cos 2\theta}{2(ch2\alpha - \cos 2\theta)}\right]. \tag{14}$$

Кореляційна функція в даному випадку визначається наступним чином (рис. 4):

$$R(s) = R(0) \cdot e^{-\alpha|s|}\left[\cos(\theta \cdot s) + E(\theta,\alpha) \cdot \sin(\theta|s|)\right];\ s \in \left(\overline{-\infty;\infty}\right), \tag{15}$$

де

$$E(\theta,\alpha) = \frac{\left(e^{2\alpha}-1\right) \cdot \sin 2\theta}{\left(e^{2\alpha}-1\right)\left(1-\cos 2\theta\right)}, \tag{16}$$

$R(0) = D\xi(t)$ і визначається згідно виразу (14).

Спектральна щільність потужності RLC-шуму має вигляд:

$$S(\omega) = R(0)\left[\frac{e^{a} - \cos(\theta-\omega) + E(\theta,\alpha)\cdot\sin(\theta-\omega)}{2\left[ch\alpha - \cos(\theta-\omega)\right]} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{a} - \cos(\theta+\omega) + E(\theta,\alpha)\cdot\sin(\theta+\omega)}{2\left[ch\alpha - \cos(\theta+\omega)\right]}\right] - R(0);\ \omega \in [-\pi;\pi). \tag{17}$$

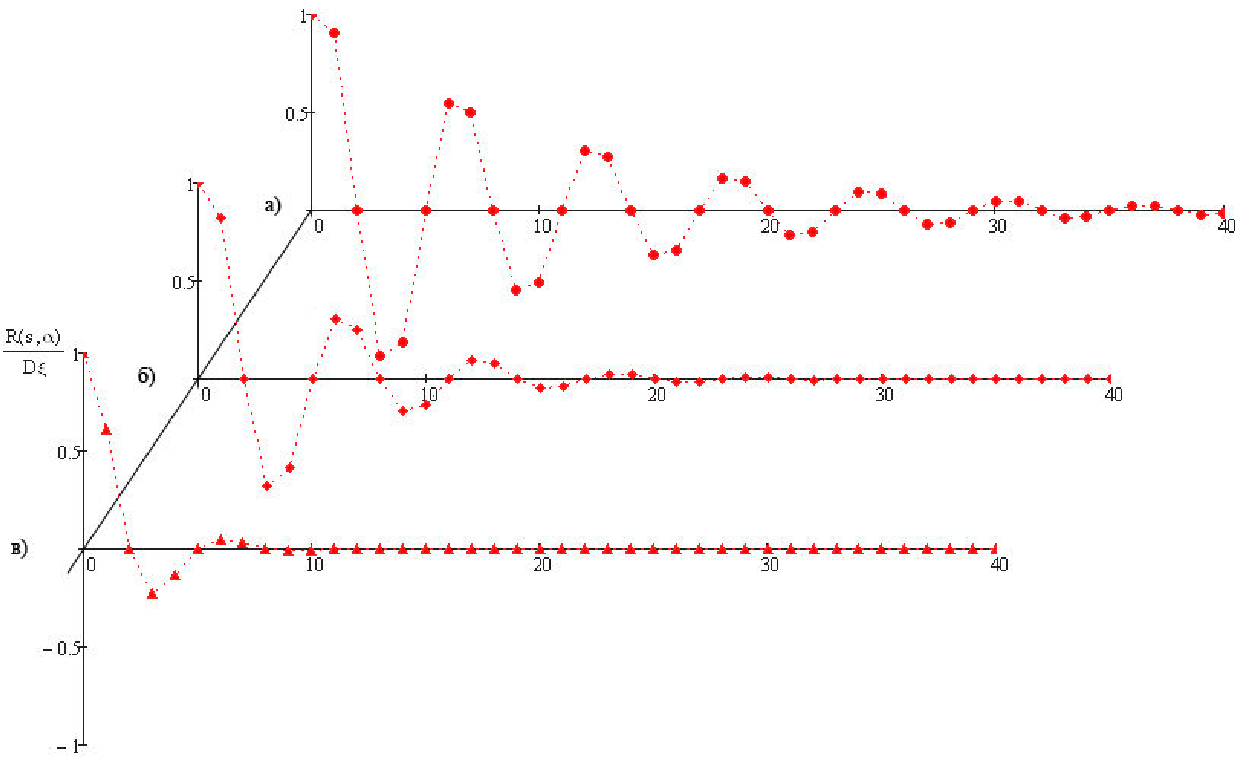

Рисунок 4 – Нормована кореляційна функція RLC – шуму $s \in [\overline{0,40}); \theta = \pi / 3$;
а) при $\alpha = 0{,}1$; б) при $\alpha = 0{,}3$; в) при $\alpha = 0{,}5$.

Висновки

Отже, на основі запропонованих моделей шумовий процес $\xi(t)$ в точці прийому може розглядатись як відгук багаторезонансної лінійної системи, що описується вектором імпульсних перехідних функцій при взаємодії на її входи породжуючого процесу $\zeta(t)$. При цьому для математичного опису процесу $\xi(t)$ можна використовувати клас лінійних випадкових процесів. Було розглянуто неперервний і дискретний варіант моделі RLC шуму. Наведено приклад реалізації дискретного RLC шуму. В основу побудови моделі випадкових завад було покладено метод формуючих фільтрів.

Дана стаття є завершальною з циклу статей [7, 8], присвячених моделюванню дискретних лінійних випадкових процесів. Результати, отримані в даних роботах, будуть в подальшому використані при дослідженні поведінки завад при фільтрації сейсмічних сигналів з використанням дискретних ортогональних фільтрів.

Література

1. Шерифф Р., Гелдарт Л. Сейсморазведка. Т.1 – М.: Мир, 1987. – 448с.
2. Чичинин И.С. Вибрационное излучение сейсмических волн. – М.: Недра, 1984. – 224 с.
3. Вуд, Трейтел Обработка сейсмических сигналов. //ТИИЭР. – 1975. - Т.63, №4.
4. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. – К.: Наукова думка, 1992. – 212с.
5. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. – К.: Техніка, 2004. – 288с.
6. Марченко Б.Г. Мыслович М.В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. – К.: Наукова думка, 1992. – 193 с.
7. Жаровський Р.О. Комп'ютерне моделювання стаціонарного RC шуму з дискретним часом. //Вісник ТДТУ. – 2008. – №1. – С. 157-161.
8. Жаровський Р.О., Марченко Б.Г., Марченко Н.Б. Моделювання білого шуму з дискретним часом. //Вісник ТДТУ. – 2007. – №4. – С. 152-157.

Одержано 02.02.2009 р.