А. Алілуйко. Стійкість та позитивність лінійних динамічних систем відносно світлового конуса / А. Алілуйко // Вісник ТНТУ. — 2012. — Том 68. — № 4. — С.202-208. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.983.27

А. Алілуйко, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет

СТІЙКІСТЬ ТА ПОЗИТИВНІСТЬ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВІДНОСНО СВІТЛОВОГО КОНУСА

Резюме. *Викладено методику дослідження стійкості та позитивності систем лінійних диференціальних та різницевих рівнянь відносно світлового конуса. Встановлено умови інваріантності світлового конуса у вигляді алгебраїчних нерівностей. Наведені умови отримано на основі спектральних оцінок для матричних коефіцієнтів. Розглянута методика дає підхід до розв'язування задачі позитивної стабілізації відносно класу світлових конусів.*

Ключові слова: *стійкість, інваріантний світловий конус, позитивна система.*

A. Aliluyko

STABILITY AND POSITIVITY OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS RELATIVE TO LIGHT CONE

Summary. *We propose a method for the investigation of differential and difference models of dynamic objects whose phase spaces contain invariant sets, cones in particular. Positivity and monotony sets for such systems are usually caused by the nature of the object of study or structure of designed control system. The construction of such sets is calculated and used in qualitative research methods of dynamical systems, for analysis of stability and control. Classes of positive and monotone systems also arise in the theory of stability in the application of method for the comparison of differential systems.*

For analysis the stability of dynamical systems special methods were developed that are based on spectral properties of positive and positive invertible operators. We formulate conditions for the stability and the invariance of the cones in linear dynamic systems. Special attention is paid to the ellipsoidal and the light cone. Necessary and sufficient conditions of stability and positivity for linear differential and difference systems with respect to ellipsoidal cones are given in the form of matrix inequalities. Sufficient conditions for the asymptotic stability and the invariance of the light cones for differential and difference systems are the result of the allegations and the general theorems on the stability of positive linear systems. The proposed stability and positivity conditions of the linear systems are stated in terms of the solutions of set of algebraic inequalities. Their evidences are obtained by means of spectral estimations of matrix coefficients.

Our method allows to specify an approach to the problem solving of positive stabilization relative to the class of light cones, that is, to build a control in the form of feedback or dynamic compensator, which provids both positivity relative to a given cone and the asymptotic stability of the closed system. This result can be used for the second-order differential systems. Numerical example of application of the proposed method to first-order differential systems is presented/

Key words: *stability, invariant light cone, positive systems.*

Вступ. При моделюванні складних технічних, економічних, біологічних та інших об'єктів використовуються диференціальні або різницеві системи рівнянь, у фазовому просторі яких існують інваріантні множини, зокрема конуси. Такі особливості систем слід враховувати й використовувати в якісних методах дослідження, задачах аналізу стійкості та керування (див., наприклад, [1 – 4]).

Зокрема, умови існування інваріантних конусів невід'ємних векторів для лінійних диференціальних систем вивчалися в [1, 5]. У роботах [4 – 7] сформульовано умови існування інваріантного еліпсоїдального конуса у вигляді матричних нерівностей. Умови існування інваріантних тілесних конусів у просторі лінійних диференціальних та різницевих систем, які описано за допомогою спектра матриці коефіцієнтів, розглянуто в [8, 9]. Дослідження стійкості та стабілізації лінійних систем з інваріантними конусами наведено в роботах [10, 11].

Метою роботи є знаходження умов інваріантності світлових конусів та експоненціальної стійкості лінійних диференціальних та різницевих систем.

Об'єктом дослідження є лінійна диференціальна система у банаховому просторі

$$\dot{z} = Mz, \quad z \in E, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

та лінійна різницева система

$$z_{k+1} = Mz_k, \quad z_k \in E, \quad k = 0, 1, \ldots \ , \tag{2}$$

де $M : E \to E$ – обмежений оператор.

Щодо таких систем розглядаються питання знаходження умов інваріантності еліпсоїдальних, зокрема світлових конусів. Це дозволяє розв'язати задачу експоненціальної стійкості систем відносно даного типу конусів.

Означення і допоміжні факти. Інерцією симетричної матриці $S = S^T \in R^{n\times n}$ будемо називати трійку чисел $i(S) = \{i_+(S), i_-(S), i_0(S)\}$, де $i_+(S)$, $i_-(S)$ і $i_0(S)$ – відповідно кількість додатних, від'ємних і нульових власних значень S, враховуючи кратності.

Наведемо деякі означення й факти з теорії конусів і операторів у напівупорядкованому просторі. Опуклу замкнену множину K дійсного нормованого простору E називають конусом, якщо $\alpha K + \beta K \subset K$ для будь-яких $\alpha, \beta \geq 0$ і $K \cap -K = \{0\}$. Простір з конусом напівупорядкований: $X \leq Y \Leftrightarrow Y - X \in K$.

Нехай у банаховому просторі $E_1(E_2)$ виділено конус $K_1(K_2)$. Оператор $M : E_1 \to E_2$ називають монотонним, якщо із $X \geq Y$ випливає $MX \geq MY$. Монотонність лінійного оператора рівносильна його позитивності: $X \geq 0 \Rightarrow MX \geq 0$. Якщо $ME_1 \subset K_2$, то оператор M – скрізь позитивний. Нехай $X(t) = \Phi(t, t_0, X_0) \in E$ – стан деякої динамічної системи, що описується неперервно-диференційованою функцією при $t \geq t_0 \geq 0$. Якщо задано оператор $\Omega(t, t_0) : E \to E$, що визначає перехід з початкового стану $X(t_0) = X_0$ у стан $X(t)$ при $t > t_0$, то $\Phi(t, t_0, X_0) = \Omega(t, t_0)X_0$. При цьому $\Omega(t_0, t_0)$ – тотожний оператор. Система має інваріантну множину $K_t \subset E$, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$ із $X_0 \in K_0$ випливає $X(t) \in K_t$ при $t \geq t_0$. Якщо K_t – конус, то ним породжені нерівності між елементами простору в кожен момент часу t позначимо символами $\overset{K_t}{\leq}$ або $\overset{K_t}{\geq}$. Динамічна система, що має інваріантний конус K_t , позитивна відносно даного конуса.

Нехай $X \equiv 0$ – ізольований стан рівноваги динамічної системи, тобто $\Phi(t, t_0, 0) \equiv 0$. Стан $X \equiv 0$ системи називаємо стійким в K_t , якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що із $X_0 \in S_\delta(t_0)$ випливає $X(t) \in S_\varepsilon(t)$ при $t > t_0$, де

$S_\varepsilon(t)=\{X\in K_t:\|X\|\le\varepsilon\}$. Якщо при цьому для певного $\delta_0>0$ із $X_0\in S_{\delta_0}(t_0)$ випливає $\|X(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$, то стан $X\equiv 0$ системи є асимптотично стійким у K_t. Якщо стан $X\equiv 0$ системи з інваріантним конусом K_t стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, то він стійкий (асимптотично стійкий) у K_t.

Аналогічно означаються інваріантні множини, властивості позитивності й монотонності відносно конуса і стійкості в K_t для динамічних систем із дискретним часом.

Умови позитивності лінійних систем. Лінійна диференціальна система (1) має інваріантний конус K, тобто є позитивною відносно K, якщо $e^{Mt}K\subset K$ для будь-якого $t\ge 0$. Лінійна різницева система (2) має інваріантний конус K, якщо оператор $M\overset{K}{\ge}0$ – позитивний відносно конуса K.

Розглянемо у просторі R^{n+1} множину

$$K(Q)=\{z\in R^{n+1}:z^TQz\ge 0,\ z^Th\ge 0\},\tag{3}$$

де $Q=Q^T$ – симетрична матриця з інерцією $i(Q)=\{1,n,0\}$; h – нормований власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню γ. Дана множина є конусом еліпсоїдального типу [7].

Умови позитивності систем (1) і (2) відносно еліпсоїдальних конусів описуються у вигляді матричних нерівностей (див., наприклад, [6, 7, 11]). Система (1) має інваріантний конус $K(Q)$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $\alpha\in R^1$ виконується матрична нерівність

$$M^TQ+QM\ge\alpha Q\,.\tag{4}$$

Система (2) має інваріантний конус $K(Q)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$M^TQM\ge\alpha Q,\quad h^TMh\ge 0,\quad h^TMQ^{-1}M^Th\ge 0,\tag{5}$$

де $\alpha\ge 0$ – деяке невід’ємне число.

Класу конусів типу $K(Q)$ належить так званий світловий конус [12]

$$K_a=\{z\in R^{n+1}:\|z\|\le(a,z)\},\tag{6}$$

де $(a,z)=a^Tz$ – скалярний добуток, a – заданий вектор із нормою $\|a\|>1$. Можна переконатися, що множина (6) описується у вигляді (3) при $Q=aa^T-I$ і $h=\|a\|^{-1}a$. При цьому $\gamma=a^Ta-1$, $i(Q)=\{1,n,0\}$.

Нехай R – ортогональне доповнення вектора a, тобто $a^TR=0$, $R^TR=I$. Нерівність (4) еквівалентна нерівності $G^T(M^TQ+QM-\alpha Q)G\ge 0$, де $G=[R,a]$.

Перетворивши її, отримаємо

$$\begin{bmatrix}-A^T-A+\alpha I & \gamma c-b\\ \gamma c^T-b^T & 2\gamma d-\alpha\gamma(\gamma+1)\end{bmatrix}\ge 0,\tag{7}$$

де

$$A = R^T MR, \quad b = R^T Ma, \quad c^T = a^T MR, \quad d = a^T Ma.$$

Якщо $\alpha < \frac{2d}{\gamma+1}$, то відповідно до леми Шура отримаємо еквівалентну нерівність

$$\alpha^2 S_0 + \alpha S_1 + S_2 \ge 0, \tag{8}$$

де

$$S_0 = -\gamma(\gamma+1)I, \quad S_1 = 2\gamma dI + \gamma(\gamma+1)(A^T + A), \quad S_2 = -2\gamma d(A^T + A) - (\gamma c - b)(\gamma c - b)^T.$$

Матрична нерівність (8) виконується лише тоді, коли для довільного вектора $q \in R^n$ $(q^T q = 1)$ виконується нерівність

$$\alpha^2 q^T S_0 q + \alpha q^T S_1 q + q^T S_2 q \ge 0. \tag{9}$$

Коефіцієнти квадратного тричлена (9) обмежені найбільшим ($\lambda_{\max}$) і найменшим ($\lambda_{\min}$) власними значеннями відповідних матриць. Враховуючи це, введемо позначення

$$\lambda_0 = \gamma(\gamma+1), \qquad \lambda_1 = 2\gamma d + \gamma(\gamma+1)\lambda_{\min}(A^T + A), \qquad \lambda_2 = \lambda_{\max}\left(2\gamma d(A^T + A) + (\gamma c - b)(\gamma c - b)^T\right).$$

Для того, щоб виконувалася нерівність (9), достатньо виконання нерівності $-\lambda_0\alpha^2 + \lambda_1\alpha - \lambda_2 \ge 0$. Вона буде мати розв'язок $\alpha \in R^1$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1^2 - 4\lambda_0\lambda_2 \ge 0$. У цьому випадку α буде лежати в інтервалі

$$\frac{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_0\lambda_2}}{2\lambda_0} \le \alpha \le \frac{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_0\lambda_2}}{2\lambda_0}.$$

Отже, маємо наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються нерівності*

$$\frac{2d}{\gamma+1} > \frac{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_0\lambda_2}}{2\lambda_0}, \quad \lambda_1^2 - 4\lambda_0\lambda_2 \ge 0,$$

то K_a *є інваріантним конусом системи (1).*

Теорема 2. *Нехай* $(M - M^T)a = 0,\ a^T a = 2$. *Тоді* K_a *– інваріантний конус системи (1) тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_m \le a^T Ma$, *де* α_m *– максимальне власне значення матриці* $R^T(M + M^T)R$.

Доведення. Нехай в (7) $\gamma c - b = 0$, $\gamma = 1$, тобто $R^T M^T a - R^T Ma = 0,\ a^T a = 2$. Рівність $R^T(M^T - M)a = 0$ буде мати місце при $(M^T - M)a = 0$. Це можливо, якщо матриця M – непарного порядку. Тоді нерівність (7) еквівалентна системі нерівностей $-A^T - A + \alpha I \ge 0$, $d - \alpha \ge 0$. Сумісність системи зберігається при $\alpha_m \le \alpha \le a^T Ma$, де $\alpha_m = \max\sigma(A + A^T)$.

Теорему доведено.

Сформулюємо умови інваріантності конуса K_a для системи (2). Для цього першу нерівність в (5) перепишемо у вигляді еквівалентної нерівності $G^T(M^T QM - \alpha Q)G \ge 0$. Перетворивши її, отримаємо

$$\begin{bmatrix} cc^T - B + \alpha I & dc - m \\ dc^T - m^T & d^2 - k - \alpha\gamma(\gamma+1) \end{bmatrix} \geq 0,$$

де

$$B = R^T M^T MR, \quad m = R^T M^T Ma, \quad k = a^T M^T Ma.$$

При $\alpha < \dfrac{d^2 - k}{\gamma(\gamma+1)}$ отримаємо еквівалентну нерівність

$$\alpha^2 P_0 + \alpha P_1 + P_2 \geq 0, \tag{10}$$

де

$$P_0 = -\gamma(\gamma+1)I, \quad P_1 = (d^2 - k)I - \gamma(\gamma+1)(cc^T - B),$$
$$P_2 = (cc^T - B)(d^2 - k) - (dc - m)(dc - m)^T.$$

Нерівність (10) буде вірною при умові $-\mu_0\alpha^2 + \mu_1\alpha - \mu_2 \geq 0$, де $\mu_0 = \gamma(\gamma+1)$, $\mu_1 = d^2 - k + \gamma(\gamma+1)\lambda_{\min}(B - cc^T)$, $\mu_2 = \lambda_{\max}\left((B - cc^T)(d^2 - k) + (dc - m)(dc - m)^T\right)$.

Друга та третя нерівності в (5) із урахуванням $Q^{-1} = \dfrac{1}{\gamma} aa^T - I$ еквівалентні нерівностям $d \geq 0$ та $d^2 - \gamma k \geq 0$ відповідно.

Отримали наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо виконуються нерівності*

$$d \geq 0, \quad d^2 - \gamma k \geq 0, \quad -\mu_0\alpha^2 + \mu_1\alpha - \mu_2 \geq 0$$

для деякого $0 \leq \alpha < \dfrac{d^2 - k}{\gamma(\gamma+1)}$, *то* K_a *є інваріантним конусом системи (2).*

Умови стійкості лінійних систем. Умови експоненціальної стійкості систем (1) і (2), позитивних відносно еліпсоїдальних конусів, формулюються у вигляді матричних нерівностей (див., наприклад, [10, 11]). Диференціальна система (1) експоненціально стійка і має інваріантний конус $K(Q)$, якщо існують симетрична матриця Q з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$ і сталі $\alpha \in R^1$ і $\beta > 0$, для яких виконуються нерівності

$$M^T Q + QM \geq \alpha Q, \quad M^T QM \leq \beta Q, \quad h^T M^{-1} h \leq 0, \quad h^T \left(M^T QM\right)^{-1} h \geq 0, \tag{11}$$

де h – власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню.

Різницева система (2) асимптотично стійка і має інваріантний конус $K(Q)$, якщо існують симетрична матриця Q з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$ і сталі $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, для яких разом з (5) виконуються нерівності

$$M_1^T QM_1 \leq \beta Q, \quad h^T M_1^{-1} h \geq 0, \quad h^T \left(M_1^T QM_1\right)^{-1} h \geq 0, \tag{12}$$

де $M_1 = I - M$.

Враховуючи вирази для h і Q^{-1}, дві останні матричні нерівності з (11) можна переписати у вигляді еквівалентних алгебраїчних нерівностей $l \leq 0$, $l^2 - \gamma n \geq 0$, де $l = a^T M^{-1} a$, $n = a^T (M^T M)^{-1} a$. Разом із умовами теорем 1, 3 отримаємо наступне твердження.

Теорема 4. *Система (1) експоненціально стійка і має інваріантний конус* K_a, *якщо існують сталі* $\alpha < \dfrac{2d}{\gamma+1}$ *і* $\beta > \dfrac{d^2-k}{\gamma(\gamma+1)} > 0$, *для яких виконуються нерівності*

$$-\lambda_0\alpha^2 + \lambda_1\alpha - \lambda_2 \geq 0\,,\ -\mu_0\beta^2 + \mu_1\beta - \mu_2 \geq 0\,,\ d \geq 0\,,\ d^2 - \gamma k \geq 0\,,\ l \leq 0,\ \ l^2 - \gamma n \geq 0\,,$$

де

$$\lambda_0 = \mu_0 = \gamma(\gamma+1),\quad \lambda_1 = 2\gamma dI + \gamma(\gamma+1)\lambda_{\min}(A^T + A),$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\max}\left(2\gamma d(A^T + A) + (\gamma c - b)(\gamma c - b)^T\right),\quad \mu_1 = d^2 - k + \gamma(\gamma+1)\lambda_{\min}(B - cc^T),$$

$$\mu_2 = \lambda_{\max}\left((B - cc^T)(d^2 - k) + (dc - m)(dc - m)^T\right),\ A = R^T MR,\ b = R^T Ma,\ c^T = a^T MR,$$

$$d = a^T Ma\,,\ B = R^T M^T MR\,,\ m = R^T M^T Ma\,,\ k = a^T M^T Ma\,,\ l = a^T M^{-1}a\,,\ n = a^T (M^T M)^{-1} a\,.$$

Із системи нерівностей (12) можна отримати аналогічне твердження.

Теорема 5. *Система (2) асимптотично стійка і має інваріантний конус* K_a, *якщо для деякого* $\beta > \dfrac{d_1^2 - k_1}{\gamma(\gamma+1)} > 0$ *разом з умовами теореми 3 виконуються нерівності*

$$-\eta_0\beta^2 + \eta_1\beta - \eta_2 \geq 0\,,\quad l_1 \geq 0,\quad l_1^{\,2} - \gamma n_1 \geq 0\,,$$

де

$$\eta_0 = \gamma(\gamma+1),\quad \eta_1 = d_1^2 - k_1 + \gamma(\gamma+1)\lambda_{\min}(B_1 - c_1 c_1^T),$$

$$\eta_2 = \lambda_{\max}\left((B_1 - c_1 c_1^T)(d_1^2 - k_1) + (d_1 c_1 - m_1)(d_1 c_1 - m_1)^T\right),$$

$$B_1 = R^T M_1^T M_1 R\,,\quad c_1^T = a^T M_1 R,\quad d_1 = a^T M_1 a\,,\quad m_1 = R^T M_1^T M_1 a\,,$$

$$k_1 = a^T M_1^T M_1 a\ \ l_1 = a^T M_1^{-1} a\,,\quad n_1 = a^T (M_1^T M_1)^{-1} a\,.$$

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння третього порядку

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + (4 - p)\frac{d^2 y}{dt^2} + (5 - 4p)\frac{dy}{dt} - 5py = 0\,,$$

де p – дійсний параметр. Дане рівняння представляється у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot z = Mz,\quad z = \begin{bmatrix} y \\ \dot y \\ \ddot y \end{bmatrix},\quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5p & 4p-5 & p-4 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Задамо світловий конус вектором $a^T = \begin{bmatrix} -0{,}4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Розв’язуючи систему нерівностей з теореми 4 відносно p, α і β, отримаємо $p = 1{,}45$, $\alpha = -2{,}9$, $\beta = 0{,}066$. Отже, виконуються умови теореми 4, при яких система (13) експоненціально стійка і має інваріантний конус K_a.

Висновки. Зроблено крок у напрямку дослідження позитивності та стійкості лінійних диференціальних та різницевих систем у напівупорядкованому просторі. Для таких систем сформульовано достатні умови стійкості та позитивності відносно світлового конуса. Отриманий результат можна використати при розв’язуванні задач позитивної стабілізації систем відносно світлового конуса.

Conclusions. In the paper advance step in the research of positivity and stability of linear differential and difference systems in semiorderedy space is done. For such systems

sufficient conditions of positivity and stability relation to light cone are formulated. The obtained result can be used for problem solving of positive stabilisation of systems relative to light cone.

Список використаної літератури

1. Красносельский, М.А. Позитивные линейные системы [Текст] / Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
2. Hirsch, M.W. Competitive and cooperative systems: mini-review. Positive systems / M. Hirsch, H. Smith // Lect. Notes in Control and Inform. Sci. – 2003. – Vol. 294. – P. 183 – 190.
3. Martynyuk, A.A. Qualitative methods in nonlinear dynamics: novel approaches to Liapunov's matrix functions / Martynyuk A.A. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. – 301 p.
4. Bhattacharya, R. Cone Invariance and Rendezvous of Multiple Agents / R. Bhattacharya, J. Fung, A. Tiwari, R.M. Murray // Journal of Aerospace Engineering. – 2009. Vol. 223, № 6. – P. 779 – 789.
5. Fiedler, M. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors / M. Fiedler, V. Ptak // Czech. Math. J. – 1962. – Vol. 12, № 87. – P. 382 – 400.
6. Loewy, R. Positive operators on the ice-cream cone / R. Loewy, H. Schneider // J. Math. Anal. and Appl. – 1975. – Vol. 49. – P. 375 – 392.
7. Stern, R. J. Exponential nonnegativity on the ice cream cone / R. Stern, H. Wolkowicz // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1991. – Vol. 12, №1. – P.160 – 165.
8. Vandergraft, J. S. Spectral properties of matrices which have invariant cones / J.S. Vandergraft // SIAM J. Appl. Math. – 1968. Vol. 16. – P. 1208 – 1222.
9. Elsner, L. Monotone und Randspektrum bei vollstetigen Operatoren / L. Elsner // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1970. – Vol. 36. – P. 356 – 365.
10. Алілуйко, А.М. Інваріантні конуси та стійкість багатозв'язних систем [Текст] / А.М. Алілуйко, О.Г. Мазко. – К.: Ін-т математики, 2005. – С. 28 – 45.
11. Алілуйко А. М. Інваріантні конуси та стійкість лінійних динамічних систем [Текст] / А.М. Алілуйко, О.Г. Мазко // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 11. – С. 1446 – 1461.
12. Hirsch, M. W. Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems / M. W. Hirsch // J. reine und angew. Math. – 1988. – Vol. 383. – P. 1 – 53.

Отримано 17.09.2012