

УДК 519.17

М. Семенюта, канд. фіз.-мат. наук

Кіровоградська льотна академія національного авіаційного університету

ЦИКЛІЧНІ ПЕНТАГОНАЛЬНІ РОЗКЛАДИ ГРАФА K_n

Резюме. Розроблено спосіб побудови базових компонент циклічного пентагонального розкладу графа K_n . На його основі складено алгоритми пошуку списків різних (K_{11}, C_5) , (K_{21}, C_5) -розкладів, які реалізовані з використанням програмного середовища Delphi. Списки містять такі відомості: базову компоненту, кортеж довжин, індекс компоненти – специфікаційний інваріант для кожного розкладу. Для розрізнення-ототожнення цих розкладів випробувано специфікаційні інваріанти і введені в статті графічні інваріанти. За результатами дослідження отримано, що з точністю до ізоморфізму існують чотири циклічних (K_{11}, C_5) -розклади, два з них – 5-гомогенні, а також з точністю до ізоморфізму існує не менше, ніж 62 циклічних (K_{21}, C_5) -розклади. Доведено необхідну умову ізоморфності розкладів. Її проілюстровано при перевірці на ізоморфність двох різних (K_{11}, C_5) -розкладів, а також використано при розв'язуванні задачі ототожнення певних (K_{21}, C_5) -розкладів, які не вдалося розрізнити за допомогою специфікаційних і графічних інваріантів.

Ключові слова: пентагональний розклад, специфікаційний інваріант, графічний інваріант.

М. Semenyuta

CYCLIC PENTAGONAL DECOMPOSITIONS OF GRAPH K_n

Summary. (K_n, G) -decomposition is a set of subgraphs of K_n such that every of the subgraphs is isomorphic to the graph G , and every edge of K_n belongs to one and only one of these subgraphs. If (K_n, G) -decomposition has an automorphism that contains some cyclic permutation then the decomposition is cyclic. Every (K_n, C_5) -decomposition is called a pentagonal decomposition of K_n .

The method to construct basic components of cyclic pentagonal decomposition of the graph K_n was developed. Using this method algorithms which find the lists for different (K_{11}, C_5) , (K_{21}, C_5) -decompositions have been created. The algorithms were realized by means of the Delphi software environment. The lists contain the following information: the basic component, the tuple of the lengths, and the component index – specification invariant for every decomposition. For differentiation-identification of the decompositions specification invariants and graphical invariants (which are introduced in this paper) were tested. The results of the study testify that up to isomorphism there exist four cyclic (K_{11}, C_5) -decompositions, two of them 5-homogeneous, and that up to isomorphism there exist not less than 62 cyclic (K_{21}, C_5) -decompositions.

Consecutive mapping of an orbit of cyclic (K_n, C_5) -decomposition R_1 into an orbit of another cyclic (K_n, C_5) -decomposition R_2 is defined as follows: if i -th component of decomposition R_1 mapped into j -th component of decomposition R_2 then $i+1$ is mapped into $(j+1) \bmod n$, $i+2$ into $(j+2) \bmod n$ etc., where l is the step of the mapping. In this paper the following necessary condition of the decomposition isomorphism is proved: in isomorphism of cyclic (K_n, C_5) -decompositions, the consecutive mapping of one decomposition orbit into orbit of another decomposition remains unchanged. This is illustrated while verifying two different (K_{11}, C_5) -isomorphism, and it is also used to solve an identification problem of some (K_{21}, C_5) -decompositions, which were not identified by means of the specification invariants and/or graphical invariants.

Key words: pentagonal decomposition, specification invariant, graphic invariant.

Умовні позначення:

K_n – повний граф;

C_5 – п'ятивершинний цикл;

(K_n, C_5) – розклад – пентагональний розклад графа K_n ;

R – розклад;

P_i – i -та компонента певного розкладу;

(s_1, s_2, \dots, s_k) – індекс компоненти деякого розкладу;
 $T(R)$ – специфікаційний інваріант у множині розкладів;
 Rs – специфікаційний інваріант у множині розкладів;
 $G_{\text{ув}}$ – узагальнений граф верхніх ребер;
 $Inc(R), Inb(R)$ – графічні інваріанти в множині циклічних (K_{21}, C_5) -розкладів.

Вступ. Розклади графів знаходять застосування при побудові ефективних кодів, плануванні експериментів і комунікаційних схем та в багатьох інших задачах [1]. Наприклад, такі практичні задачі [2], як відбір оптимального, у певному розумінні, комбінаторного об'єкта з множини існуючих; побудова та перевірка гіпотез про комбінаторні конструкції; цілеспрямований пошук хімічних сполук, найкращих механічних систем, ефективних кодів і т. ін., пов'язані з конструктивним переліком комбінаторних конфігурацій.

У 70-х роках минулого століття розпочалося вивчення розкладів графів на підграфи із заданої множини. Серед основних дослідників можна назвати Н. де Брьойна, П. Ердьоша, Л. Байнеке, Д. Босака, А. Роса, С. Знама, Р. Вільсона [3, 4] та багатьох інших. Найбільш досліджені розклади повних графів. Існування розкладів повних графів на графи малих порядків підсумовані в роботах [5, 6]. Розроблення методів комп'ютерного переліку разом з рекурсивними методами, методами породження комбінаторних об'єктів та із застосуванням інваріантів дозволило отримати значні досягнення в розв'язуванні задач побудови та переліку розкладів різних видів графів.

Метою роботи є розв'язування задач побудови та конструктивного переліку циклічних пентагональних розкладів графа K_n для випадків $n=11, n=21$.

Постановка задачі. (K_n, G) -розклад – це сукупність таких підграфів графа K_n , що кожен із них ізоморфний графу G і кожне ребро графа K_n належить одному і тільки одному з цих підграфів. Якщо група автоморфізмів (K_n, G) -розкладу включає деяку циклічну підстановку α , то цей розклад є *циклічним*. Для існування циклічного (K_n, G) -розкладу, де $G=(V, E)$, $|E|=q$, необхідно виконання умови $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2q}$. Пентагональним розкладом графа K_n будемо називати кожен (K_n, C_5) -розклад. В [7] закладено схему побудови пентагональних розкладів графа K_n зі спільними пентагонами. В [8] наведено вісім типів попарних переплетень компонент у (K_n, C_5) -розкладах. Ми розглядаємо задачу побудови та конструктивного переліку циклічних пентагональних розкладів графа K_n у випадку $n \equiv 1 \pmod{10}$. Для її розв'язання пропонуємо застосувати на першому етапі методи комп'ютерного переліку, на другому – специфікаційні та графічні інваріанти.

Конструктивний перелік циклічних пентагональних розкладів графа K_{11} . (K_n, C_5) -розклади R_i та R_j вважаються *ізоморфними*, якщо існує така підстановка множини вершин графа K_n , під дією якої кожна компонента одного розкладу переходить у деяку компоненту другого.

Для розрізнення-ототожнення у множині пентагональних розкладів ми використали описані нижче інваріанти. Перший з них належить до класу специфікаційних інваріантів у множині розкладів відносно їх ізоморфності. Його випробувано, як засіб розрізнення, на задачі переліку циклічних (K_{11}, C_5) -розкладів.

Нехай P – компонента деякого (K_{11}, C_5) -розкладу R . Індексом компоненти P у цьому розкладі є вектор (s_1, s_2, \dots, s_8) , де s_i – кількість таких компонент у розкладі, які утворюють тип переплетення i з компонентою P . Очевидно, $s_1+s_2+\dots+s_8=10$. Подана нижче таблиця $T(R)$ є специфікаційним інваріантом у множині (K_{11}, C_5) -розкладів відносно ізоморфності розкладів.

$$T(R) = \left(\begin{array}{cccc|c} s_1(1) & s_2(1) & \dots & s_8(1) & m_1 \\ s_1(2) & s_2(2) & \dots & s_8(2) & m_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ s_1(r) & s_2(r) & \dots & s_8(r) & m_r \end{array} \right).$$

У ній число m_j означає число компонент в R , що мають індекс $(s_1(j), s_2(j), \dots, s_8(j))$, індекси попарно різні й розташовані в порядку лексикографічного зростання. Оскільки для циклічного розкладу R всі його компоненти мають один й той самий індекс, то у цьому випадку $r=1$ і $T(R)$ – таблиця-рядок. Якщо всі пари компонент розкладу мають тип переплетення i , то такий розклад називають *i-гомогенним*, індекси всіх його компонент однакові і мають вигляд $(0, 0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0)$.

Означення 1. Упорядковану множину різних чисел $\{\pm l_k \mid l_k \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}, k = 1, \dots, 5\}$,

елементи якої задовольняють умову $\sum_{k=1}^5 (\pm l_k) \equiv 0 \pmod{n}$, назовемо *кортежем довжин*, що відповідає деякій (базовій) компоненті циклічного (K_n, C_5) -розкладу.

На основі викладеного в роботі [9] способу побудови базових компонент розроблено алгоритм 1 для отримання списку циклічних (K_{11}, C_5) -розкладів. Мінімізацію списку здійснено відсіканням дублікатів. Для цього використано прийоми 1 та 2, описані в [9]. Породження специфікаційного інваріанта $T(R)$ відбувається з використанням таких характеристик, як число спільних вершин k та кількість трикутників tr для кожного типу переплетення i [8]. Ці значення наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Список характеристик для кожного типу переплетення пари п'ятициклів

i	1	2	3	4	5	6	7	8
k	5	4	3	3	2	2	1	0
tr	5	2	3	2	1	0	0	0

Алгоритм 1. Побудова списку базових наборів довжин циклічних (K_{11}, C_5) -розкладів та відповідних значень інваріанта $T(R)$.

Вхідні дані. Одновимірні масиви цілих чисел $C=(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ та семиелементний кортеж pp .

Вихідні дані. Число розкладів. Список із двох масивів: перший – базовий набір довжин, другий – відповідне значення специфікаційного інваріанта $T(R)$.

Метод. Побудову списку кортежів довжин починаємо з організації початкового кортежу. Знаходимо послідовність його перестановок пошуком з поверненням, що призводить до їх лексикографічного впорядкування за 4-ма останніми елементами. Отримуємо $5!=120$ перестановок. Методом решета відсіюємо циклічні перестановки, що дозволяє зменшити список до 24.

Крок 1. Організуємо початковий кортеж довжин C [9].

Крок 2. Трансформуємо один об'єкт (масив C) у наступний перестановкою його елементів. Якщо всі варіанти кортежів довжин C вичерпані, то переходимо до кроку 4.

Крок 3. Формуємо масив CC як список різних кортежів довжин C . Для цього будемо циклічні перестановки кортежу C . Перевіряємо на наявність у масиві CC кортежу C та його циклічних перестановок порівнянням із уже побудованими. У разі відсутності заносимо лексикографічно найменший кортеж у CC . Переходимо до кроку 2.

Крок 4. За кожним кортежем C з масиву CC будемо кортеж $C2=(0bcde)$, де $0, b, c, d, e$ – вершини відповідної компоненти розкладу: для $j=2, 3, 4, 5$ маємо $C2_j \equiv (C2_{j-1} + CC_{i,j-1} + 11) \pmod{11}$, де $CC_{i,j-1} \in (j-1)$ -им елементом i -го кортежу в CC .

Крок 5. Конструюємо орбіту $C1$ компоненти $C2$. Для $j=2, 3, \dots, 11$ знаходимо вершини кожної компоненти орбіти за формулою $c1_{j,k} \equiv (c1_{j-1,k} + 1) \pmod{11}$, де $k=1, 2, \dots, 5$. Отримуємо розклад R .

Крок 6. Порівнюємо базовий набір вершин з кожним набором вершин із орбіти даної компоненти. Залежно від числа спільних вершин та кількості трикутників у попарному об'єднанні відповідних 5-циклів, визначаємо тип переплетення.

Крок 7. Знаходимо специфікаційний інваріант $T(R)$ відповідно до типів переплетень базової компоненти з іншими компонентами в розкладі R , використовуємо крок 6. Зберігаємо значення $T(R)$ у масиві pp .

Крок 8. Методом бульбашок лексикографічно впорядковуємо масив pp , ставлячи йому у відповідність значення із CC .

Крок 9. Виводимо число знайдених розкладів та списки: базові набори довжин і відповідні значення $T(R)$.

Крок 10. Вихід.

Прямий перебір і відсіювання дублікатів призводить до повного списку шуканих кортежів довжин циклічних (K_{11}, C_5) -розкладів. Для обґрунтування правильності побудови індексу компоненти розкладу опишемо стратегію знаходження типів переплетень у випадку однакових значень k (табл. 1). Розглянемо дві компоненти розкладу з вершинним представленням $(abcde)$ і $(a_1b_1c_1d_1e_1)$. Якщо вони мають дві спільні вершини, тобто $k=2$ і ці вершини розташовані в одному з кортежів послідовно, а в іншому – через одну, то попарне об'єднання заданих п'яти циклів містить $tr=1$ трикутник. Отже, вказана пара компонент розкладу переплітається по типу 5, інакше – по типу 6. Аналогічно при $k=3$. Якщо в одному з вершинних представлень двох компонент розкладу три спільні вершини розташовані поряд, то $tr=3$ і дані компоненти переплітаються по типу 3, інакше – по типу 4.

Для програмної реалізації алгоритму 1, з використанням програмного середовища Delphi, сформовано функцію породження списку кортежів довжин, функцію визначення типів переплетень та процедури побудови орбіти розкладу і відповідного специфікаційного інваріанта, а також лексикографічного впорядкування знайденого списку. Знайдено всі проекції 5-циклу, які є базовими компонентами відповідних розкладів. Отримано список з 24 базових компонент. До нього застосовано прийом 3 з [9] вилучення дублікатів, чим зменшено список удвічі. Результати наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Список циклічних (K_{11}, C_5) -розкладів

Розклад R_i	Кортеж довжин	Базова компонента	Індекс компоненти
R_1	1 5 3 4 -2	0 1 6 9 2	0 0 0 10 0 0 0

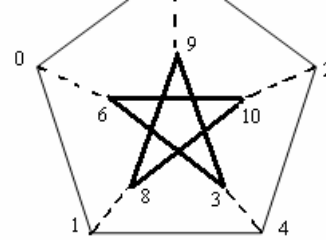
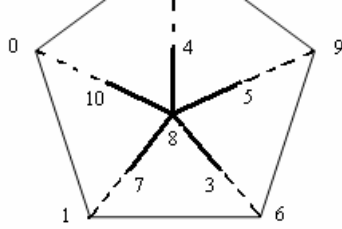


Рисунок 3R₂

R_6	1 3 5 4 -2	0 1 5 3 6	0 0 2 0 4 2 2 0
R_7	1 3 4 -2 5	0 1 5 8 6	0 0 2 0 4 2 2 0
R_8	1 3 5 -2 4	0 1 5 10 2	0 0 2 0 4 2 2 0
R_9	1 4 -2 3 5	0 1 6 10 2	0 0 2 0 4 2 2 0
R_{10}	1 4 3 -2 5		0 0 2 0 4 2 2 0
R_{11}	1 4 5 3 -2		0 0 2 0 4 2 2 0
R_{12}	1 5 4 3 -2		0 0 2 0 4 2 2 0

Пара, яка складається з двох компонент розкладу і має тип переплетення 5, зображена на рисунку 1; $abcde$ та $echgf$ – її верхній та нижній цикли відповідно; ab – верхнє ребро; d – центральна вершина; g – нижня вершина.

Рисунок 1 називають *діаграмою* відповідної пари 5-циклів з типом переплетення 5. Для кожної пари компонент розкладу R_1 з таблиці 2 отримується сукупність діаграм, в якій кожна пара має тип переплетення 5, оскільки $T(R_1)=(0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0)$. Аналогічні результати для R_2 , так як $T(R_2)=(0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0)$. R_1 і R_2 – 5-гомогенні розклади.

Для кожного розкладу R_1 і R_2 окремо побудували розгорнені асоційовані графи базових компонент (див. рис. 2, 3), які складаються з графа G_B – об'єднання верхніх ребер діаграм сукупності. G_B містить дві компоненти зв'язності. В цьому графі з'єднали пунктирною лінією пари вершин різних компонент, бо вони входять в одну діаграму сукупності як центральна і нижня вершини.

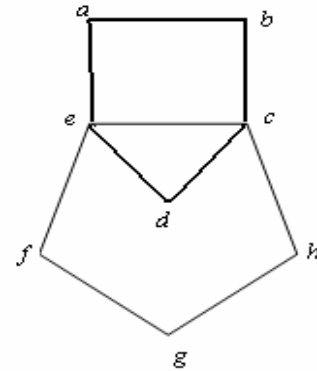


Рисунок 1. Пара 5-циклів з типом переплетення 5
Figure 1. Two 5-cycles with interlacing type 5

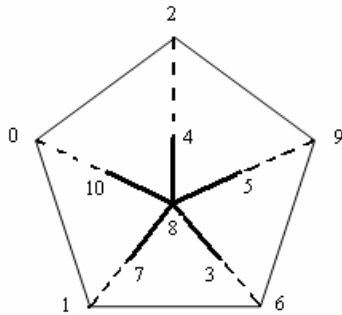


Рисунок 2. Розгорнутий асоційований граф для R_1
Figure 2. Unfolded associated graph for R_1

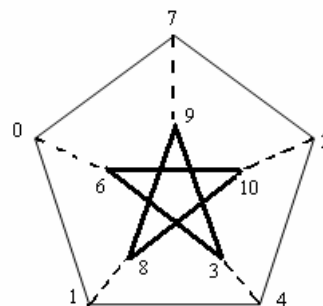


Рисунок 3. Розгорнутий асоційований граф для R_2
Figure 3. Unfolded associated graph for R_2

З того, що розгорнені асоційовані графи розкладів R_1 і R_2 неізоморфні, випливає неізоморфність цих розкладів.

Для розрізнення-ототожнення інших розкладів з таблиці 2 введемо і застосуємо *узагальнений граф верхніх ребер* G_{UV} , який також є графічним інваріантом. G_{UV} складемо з верхніх ребер пар компонент розкладу з переплетенням типу 3 і 5 та ребер виду ab і fg з переплетенням типу 6 і 7 (див. рис. 4, 5). Кратні ребра замінюємо одним

ребром. Для $R_3, R_6, R_7, R_9, R_{12}$ графи верхніх ребер G_{VB} ізоморфні, також ізоморфні між собою G_{VB} для $R_4, R_5, R_8, R_{10}, R_{11}$ (див. рис. 6, 7).

Склавши підстановки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, що переводять розклад R_3 відповідно в розклади R_6, R_7, R_9, R_{12} , безпосередньо впевнюємося в ізоморфності цих розкладів.

$$\alpha_1 = (0 \ 4 \ 3 \ 6 \ 8 \ 2 \ 9 \ 10 \ 7 \ 5)(1);$$

$$\alpha_2 = (0)(1 \ 6 \ 3 \ 7 \ 9 \ 10 \ 5 \ 8 \ 4 \ 2);$$

$$\alpha_3 = (0 \ 5 \ 6 \ 4 \ 8)(1 \ 3 \ 10 \ 7 \ 2)(9);$$

$$\alpha_4 = (0 \ 10 \ 3 \ 9 \ 7 \ 4 \ 5 \ 1 \ 6 \ 8)(2).$$

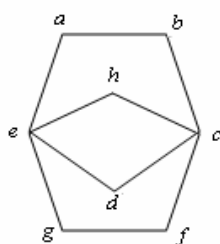


Рисунок 4. Пара 5-циклів з типом переплетення 6
Figure 4. Two 5-cycles with interlacing type 6

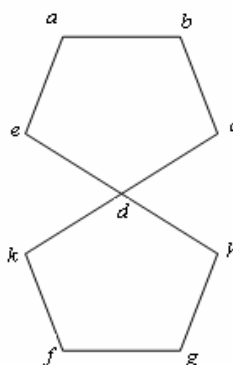


Рисунок 5. Пара 5-циклів з типом переплетення 7
Figure 5. Two 5-cycles with interlacing type 7

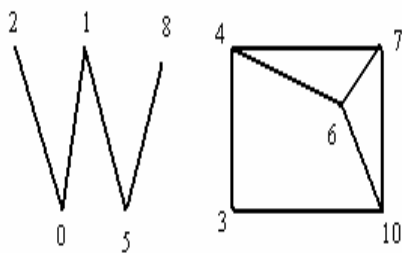


Рисунок 6. Граф G_{VB} для R_3
Figure 6. Graph G_{VB} for R_3

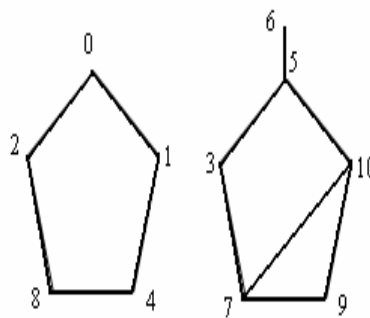


Рисунок 7. Граф G_{VB} для R_4
Figure 7. Graph G_{VB} for R_4

Аналогічно з'ясуємо ізоморфність між собою розкладів $R_4, R_5, R_8, R_{10}, R_{11}$, використовуючи відповідно підстановки:

$$\alpha_2 = (0)(1 \ 6 \ 3 \ 7 \ 9 \ 10 \ 5 \ 8 \ 4 \ 2);$$

$$\alpha_5 = (0 \ 7 \ 10 \ 5 \ 6 \ 8 \ 1 \ 9 \ 3 \ 2)(4);$$

$$\alpha_6 = (0 \ 5 \ 7 \ 10 \ 9 \ 2 \ 8 \ 6 \ 3 \ 4)(1);$$

$$\alpha_7 = (0 \ 10 \ 7 \ 9 \ 4)(1 \ 2 \ 5 \ 3 \ 8)(6).$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 1. З точністю до ізоморфізму існують чотири циклічних (K_{11}, C_5) -розклади. Два з них 5-гомогенні.

Наведемо базові компоненти неізоморфних циклічних (K_{11}, C_5) -розкладів: $(0, 1, 4, 2, 7)$, $(0, 1, 6, 9, 2)$, $(0, 1, 4, 8, 2)$, $(0, 1, 5, 8, 2)$.

Необхідна умова ізоморфності циклічних (K_n, C_5) -розкладів. Під послідовним відображенням орбіти одного циклічного (K_n, C_5) -розкладу R_1 в орбіту іншого циклічного (K_n, C_5) -розкладу R_2 розуміємо наступне: якщо i -та компонента розкладу R_1 відображується в j -ту компоненту розкладу R_2 , то $i+1$ відображується в $(j+l) \bmod n$, $i+2$ в $(j+2l) \bmod n$ і т. д., де l – крок, з яким здійснюється відображення.

Теорема 2. При ізоморфізмі циклічних (K_n, C_5) -розкладів зберігається послідовне відображення орбіти одного з них в орбіту іншого.

Доведення. Нехай підстановка T – ізоморфізм циклічних розкладів R_1 та R_2 графа K_n на п'ятицикли. S^k – це k степінь циклічної підстановки $S=\alpha$, інакше кажучи, зсув кожної вершини K_n на k .

Введемо позначення: A_i – i -та компонента розкладу R_1 , B_j – j -та компонента розкладу R_2 , A_0 і B_0 – базові компоненти R_1 та R_2 , відповідно.

Оскільки T – ізоморфізм R_1 на R_2 , то маємо, з одного боку, $T(A_0)=B_k=S^k(B_0)$. З іншого боку, існує компонента A_l така, що $A_l \xrightarrow{T} B_0$, тобто $T(A_l)=B_0=T(S^l(A_0))$. Враховуючи $S^{-k}(T(A_0))=B_0$, отримаємо:

$$S^{-k}(T(A_0))=T(S^l(A_0)).$$

Тоді $T(A_0)=S^k(T(S^l(A_0)))$, тобто необхідна умова ізоморфності циклічних пентагональних розкладів має вигляд

$$T=S^kTS^l.$$

Оскільки $T(A_l)=B_0$ і $T(S^l(A_0))=B_0$, позначимо ізоморфізм $TS^l=\check{T}$, з цього отримаємо $\check{T}(A_0)=B_0$. Продовжуємо аналогічні міркування для A_1 :

$$\check{T}(A_1)=B_h; \quad \check{T}S^1(A_0)=S^h(B_0); \quad S^{-h}\check{T}S^1(A_0)=B_0;$$

$$S^{-h}\check{T}S^1(A_0)=\check{T}(A_0). \tag{1}$$

Для A_2 : $\check{T}(A_2)=B_m; \quad \check{T}S^2(A_0)=S^m(B_0);$

$$S^{-m}\check{T}S^2(A_0)=\check{T}(A_0) \text{ або } S^{-m}S^hS^{-h}\check{T}S^1S^1(A_0)=\check{T}(A_0);$$

$$S^{-m+h}(S^{-h}\check{T}S^1)S^1(A_0)=\check{T}(A_0). \tag{2}$$

Підставляючи (1) в (2), отримаємо

$$S^{-m+h}\check{T}S^1(A_0)=\check{T}(A_0). \tag{3}$$

З (1) і (3) випливає

$$S^{-m+h}\check{T}S^1=S^{-h}\check{T}S^1. \tag{4}$$

Тоді $-m+h \equiv -h \pmod n$ і

$$m \equiv 2h \pmod{n}. \quad (5)$$

Це означає, що коли компонента A_0 під дією автоморфізму S^2 відображається в компоненту A_2 того ж самого розкладу R_1 , то згідно з (5) образом A_2 під дією \check{T} є $B_{2h \pmod{n}}$ і т. д.

Отримаємо:

$$A_0 \leftrightarrow B_0; A_1 \leftrightarrow B_h = B_{(0+h) \pmod{n}}; A_2 \leftrightarrow B_{2h \pmod{n}}; A_3 \leftrightarrow B_{3h \pmod{n}}; \dots, A_{n-1} \leftrightarrow B_{(n-1)h \pmod{n}}.$$

З наведених вище міркувань випливає, що під дією T відбувається послідовне відображення орбіти одного розкладу в орбіту іншого. Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо R_3 та R_6 з таблиці 2 і підстановку $\alpha_1 = T$, що є ізоморфізмом цих розкладів. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 9 & 6 & 3 & 0 & 8 & 5 & 2 & 10 & 7 \end{pmatrix}$. Запишемо відображення компонент A_i розкладу R_3 в компоненти B_j розкладу R_6 . Воно здійснюється послідовно з кроком 8.

$$\begin{array}{lll} A_0 \leftrightarrow B_0; & A_1 \leftrightarrow B_8 = B_{(0+8) \pmod{11}}; & A_2 \leftrightarrow B_5 = B_{(8+8) \pmod{11}}; \\ A_3 \leftrightarrow B_2 = B_{(5+8) \pmod{11}}; & A_4 \leftrightarrow B_{10} = B_{(2+8) \pmod{11}}; & A_5 \leftrightarrow B_7 = B_{(10+8) \pmod{11}}; \\ A_6 \leftrightarrow B_4 = B_{(7+8) \pmod{11}}; & A_7 \leftrightarrow B_1 = B_{(4+8) \pmod{11}}; & A_8 \leftrightarrow B_9 = B_{(1+8) \pmod{11}}; \\ A_9 \leftrightarrow B_6 = B_{(9+8) \pmod{11}}; & A_{10} \leftrightarrow B_3 = B_{(6+8) \pmod{11}}. & \end{array}$$

Результати, отримані при доведенні теореми 2, надалі плануємо застосувати для розрізнення-ототожнення циклічних (K_n, C_5) -розкладів.

Циклічні пентагональні розклади графа K_{21} . Подамо отримані результати, що стосуються циклічних пентагональних розкладів графа K_{21} . В циклічному розкладі можна виділити систему базових компонент, яка має ту властивість, що кожна компонента розкладу отримується з певної базової компоненти під дією степеня підстановки α .

Означення 2. Два 5-цикли будемо називати *сумісними*, якщо вони є компонентами різних орбіт одного й того циклічного (K_n, C_5) -розкладу.

Розглянемо набір довжин, якому відповідають дві сумісні компоненти циклічного (K_{21}, C_5) -розкладу. Він є базовим [9] і має вигляд $(\pm l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4, \pm l_5), (\pm l_6, \pm l_7, \pm l_8, \pm l_9, \pm l_{10})$. Для нього виконуються умови:

- 1) $l_i \neq l_j$, для будь-яких $i \neq j$ з множини $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
- 2) рівність $\sum_{k=1}^5 (\pm l_k) \equiv 0 \pmod{21}$ вірна для кожного з указаних кортежів довжин, де

$l_k = d(i, j) = \min(|i-j|, 21-|i-j|)$ – довжина ребра (i, j) компоненти, вписаної в коло [10].

Індексом компоненти P циклічного (K_{21}, C_5) -розкладу R назвемо вектор $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, де x_s – кількість таких циклів у розкладі, які з даною компонентою мають s спільних вершин, $s=0, 1, 2, 3, 4, 5$. Для циклічних розкладів індекси всіх компонент однакові, тому індекс компоненти являє собою інваріант розкладу R . Позначимо цей інваріант Rs , тоді $Rs = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, причому $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 42$.

Послідовність дій для знаходження всіх розбиттів множини L на два кортежі, що задовольняють вище наведеним умовам 1), 2), є способом побудови всіх різних базових наборів довжин з точністю до перестановок елементів у кожному окремому кортежі.

Даний спосіб реалізовано в алгоритмі 2, для створення якого побудовано функції й процедури, описані в наступних алгоритмах.

Алгоритм А. Функція index – знаходження числа спільних вершин і типу переплетень.

Вхідні дані. Двовимірний масив цілих чисел c розміру 2×5 .

Список формальних параметрів: aa, bb – одновимірні масиви, елементами яких є вершини компонент розкладу, k – ціле число.

Вихідні дані. Значення індексу.

Тип результату: цілий.

Крок 1. Знаходимо число спільних вершин k і формуємо масив c таким чином: нехай $k=0$, якщо $aa_i=bb_j$ для $i=1, \dots, 5$ і $j=1, \dots, 5$, то $k=k+1$ і $c_{1,k}=i$; $c_{2,k}=j$.

Крок 2. Для кожного значення k знаходимо число трикутників tr в попарному об'єднанні п'ятициклів aa та bb і визначаємо тип переплетення даної пари.

Крок 3. Кінець.

Алгоритм В. Процедура invar1 – побудова інваріантів.

Вхідні дані. Одновимірні масиви $c1, c2$ – кортежі довжин.

Список формальних параметрів: рядкова величина s .

Глобальні величини: одновимірні масиви $a1, b1$.

Вихідні дані. Значення інваріантів Rs та $T(R)$.

Крок 1. Будуємо список вершин сумісних базових компонент розкладу по відповідних кортежах довжин $a1, b1$.

1) $c1_1=0$; $c1_i \equiv (c1_{i-1} + 21 + a1_{count,i-1}) \pmod{21}$ для $i=2, \dots, 5$;

$c2_1=0$; $c2_i \equiv (c2_{i-1} + 21 + a1_{count,i-1}) \pmod{21}$ для $i=2, \dots, 5$;

2) $c2_1=0$; $c2_i \equiv (c2_{i-1} + 21 + b1_{count,i-1}) \pmod{21}$ для $i=2, \dots, 5$.

Крок 2. Звертаємося до функції *index*: визначаємо число спільних вершин k і тип переплетення для $c1$ та $c2$ у випадку 1) кроку 1.

Крок 3. Для випадків 1) і 2) кроку 1 формуємо компоненти орбіти: $c2_j \equiv (c2_j + 1) \pmod{21}$ для $j=1, \dots, 5$ та зверненням до функції *index* визначаємо число спільних вершин k і тип переплетення компоненти $c1$ із кожною компонентою $c2$.

Крок 4. Присвоюємо результати рядковій величині s .

Крок 5. Кінець.

Алгоритм С. Функція compare – порівняння.

Вхідні дані. Число i – цілого типу.

Список формальних параметрів: aa, bb – одновимірні масиви довжини п'ять.

Вихідні дані. Значення *compare*.

Тип результату: цілий.

Крок 1. Нехай $i=1$; доки $i \leq 5$ і $aa_i=bb_i$, то $i=i+1$.

Крок 2. Якщо $i > 5$, тоді *compare*=1 інакше *compare*=-1.

Крок 3. Кінець.

Алгоритм D. Процедура init – побудова допоміжного масиву.

Вхідні дані. Число i – цілого типу.

Вихідні дані. st – одновимірний масив довжини п'ять.

Крок 1. Задаємо масив $st_i=2 \cdot st_{i-1}$ для $i=2, \dots, 5$, $st_1=1$.

Крок 2. Кінець.

Алгоритм Е. Функція *yesno* – знаходження суми довжин.

Вхідні дані. Список формальних параметрів: *aa* – одновимірний масив, ціле число *k*.

Вихідні дані. Значення *yesno*.

Тип результату: цілий.

Крок 1. Знаходимо суму елементів масиву *aa*. Якщо висловлення «*k* і *st_i*» хибне, тоді $s=s+aa_i$, інакше $s=s-aa_i$.

Крок 2. Якщо $|s| \equiv 0 \pmod{21}$, тоді $j=j+1$.

Крок 3. $yesno=j$.

Крок 4. Кінець.

Алгоритм F. Функція *proverka* – перевірка умови: бути компонентою розкладу.

Вхідні дані. Список формальних параметрів: *aa* – одновимірний масив, ціле число *k*.

Вихідні дані. Значення *proverka*.

Тип результату: цілий.

Крок 1. Нехай $j=0$; $k=0$; доки $j=0$ і $k < 16$ $j=yesno(aa,k)$.

Крок 2. Якщо $j=0$, тоді $k=k+1$.

Крок 3. $proverka=j$.

Крок 4. Кінець.

Алгоритм 2. Побудова списку базових наборів довжин циклічних (K_{21}, C_5) -розкладів та відповідних значень інваріантів R_s і $T(R)$.

Вхідні дані. Одновимірні масиви *a*, *b*, *c*.

Вихідні дані. Списки, що складаються з базового набору довжин та значень інваріантів R_s і $T(R)$.

Крок 1. Викликаємо процедуру *init*.

Крок 2. Формуємо перший кортеж довжин $a=(1, 2, 3, 4, 5)$.

Крок 3. Викликаємо функцію *proverka*. Якщо $proverka(a, ma)=1$ тоді для $j=1, 2, \dots, 10$ формуємо кортеж *c* наступним чином $c_j=1$; для $j=1, \dots, 5$ маємо $c[a_j]=0$.

Крок 4. Формуємо другий кортеж довжин *b*. $k=1$, якщо $c_j=1$ для $j=1, 2, \dots, 10$, то $b_k=j$ і $k=k+1$.

Крок 5. Викликаємо функцію *proverka*. Якщо $proverka(b, mb)=1$, тоді $k=count$.

Крок 6. Доки $k > 0$, викликаємо функцію *compare*.

Якщо $compare(d_k, b)=-1$ то $k=k-1$; якщо $k=0$, тоді формуємо список з двох масивів – базовий набір довжин.

Крок 7. Зберігаємо результати за допомогою рядкової величини *s*.

Крок 7. Змінюємо кортеж *a* наступним чином: $a_5=a_5+1$; доки $i > 1$ і $(a_i+5-i) > 10$ то $i=i-1$; якщо $i < 5$, тоді $a_i=a_i+1$; $i=i+1$. Переходимо до кроку 3.

Крок 8. Виводимо результат.

Крок 9. Вихід.

Лінійність, послідовність і прямий перебір дають можливість за алгоритмом 2 знайти всі розбиття множини *L* і відповідні їм набори довжин для побудови циклічних пентагональних розкладів графа K_{21} . Специфікаційний інваріант $T(R)$ сконструйовано за схемою, обґрунтованою для випадку (K_{11}, C_5) -розкладів.

Формалізація алгоритму 2 дала можливість скласти програму на базі програмного середовища Delphi. Отримано всі шукані базові набори довжин. Це означає, що знайдено циклічні (K_{21}, C_5) -розклади з точністю до перестановки компонент кортежу довжин, число таких розкладів дорівнює 63. Для розрізнення-ототожнення знайдених розкладів використано описаний вище інваріант R_s , що являє собою різновид інваріантів-специфікацій. У результаті роботи програми встановлено, що серед 63 циклічних (K_{21}, C_5) -розкладів, 21 має різні значення інваріанта R_s . Далі скористалися чутливішим специфікаційним інваріантом $T(R)$, описаним вище, який в даному випадку набуває 48 різних значень.

Кожному розкладу R з знайденого списку співставимо граф $Inb(R)$, який є об'єднанням верхніх ребер пар компонент цього розкладу з типом переплетення 5. Цей граф, взагалі кажучи, являє собою мультиграф. Очевидно, що графи $Inb(R)$ ізоморфних розкладів ізоморфні, отже $Inb(R)$ – інваріант, де роль еквівалентності у множині значень відіграє ізоморфізм у відповідній множині графів. За допомогою $Inb(R)$ встановлено неізоморфність деяких розкладів, які не зміг розрізнити інваріант $T(R)$. Залишилося відкритим питання для розкладів 2 і 16, 17 і 52 та 27 і 61 з [10]. Для розкладів 17 і 52 та 27 і 61 [10] введемо графічний інваріант $Inc(R)$ – граф середніх ребер пар компонент з типом переплетення 5. Неізоморфність відповідних графів $Inc(R)$ вказує на неізоморфність розкладів 17 і 52 (див. рис. 8, 9) та 27 і 61 (див. рис. 10, 11).

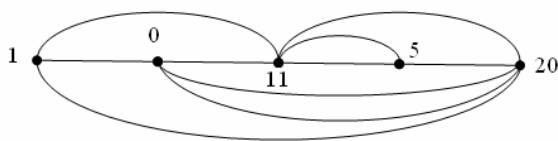


Рисунок 8. Граф $Inc(R)$ для розкладу 17
Figure 8. Graph $Inc(R)$ for decomposition 17

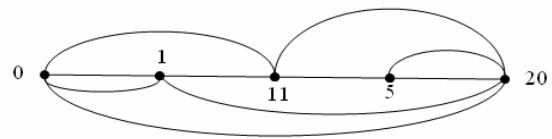


Рисунок 9. Граф $Inc(R)$ для розкладу 52
Figure 9. Graph $Inc(R)$ for decomposition 52

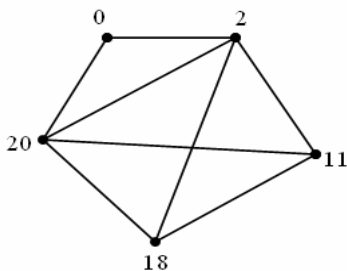


Рисунок 10. Граф $Inc(R)$ для розкладу 27
Figure 10. Graph $Inc(R)$ for decomposition 27

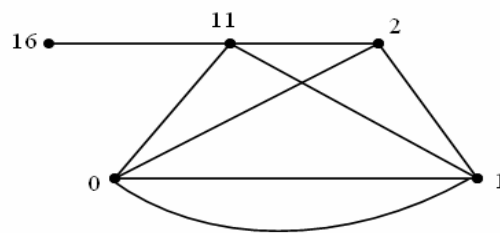


Рисунок 11. Граф $Inc(R)$ для розкладу 61
Figure 11. Graph $Inc(R)$ for decomposition 61

З отриманих результатів випливає, що інваріанти R_s , $T(R)$, $Inb(R)$, $Inc(R)$ придатні більше для використання з метою розрізнення, ніж ототожнення. Ототожнити два розклади – означає знайти таку підстановку, яка переводить один з них в інший. Якщо така підстановка існує, то вона переводить граф $Inb(R)$ першого розкладу у граф $Inb(R)$ другого.

Отже, ототожнюючу підстановку слід шукати серед тих, які ототожнюють відповідні графи $Inb(R)$. Згідно з цим така підстановка α для розкладів 2 і 16 переводить цикл (0 11 15 18 20) в цикл (0 1 3 7 13), тобто ізоморфізм α здійснює відображення базової компоненти A_0 розкладу 2 в базову компоненту B_0 розкладу 16.

Це відображення можна записати так:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 11 & 15 & 18 & 20 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array},$$

де $x_i \in \{0, 1, 3, 7, 13\}$, $i=1, \dots, 5$.

Враховуючи результати теореми 2, складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_5 + l = x_1, \\ x_1 + 11l = x_2, \\ x_2 + 4l = x_3, \\ x_3 + 3l = x_4, \\ x_4 + 2l = x_5. \end{cases}$$

l – крок послідовного відображення орбіт компонент A_0 і B_0 вказаних розкладів. Розв'язком системи є $l = -2$ (або $l = 19$, так як $19 \equiv -2 \pmod{21}$); $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 13$, $x_4 = 7$, $x_5 = 3$.

За теоремою 2 знайдемо підстановку

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & 19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

яка здійснює ізоморфізм розкладів 2 і 16.

Представлені результати обґрунтовують наступну теорему.

Теорема 3. З точністю до ізоморфізму існує не менше, ніж 62 циклічних (K_{21}, C_5) -розклади.

Висновки. Розроблено методи комп'ютерного переліку циклічних пентагональних розкладів графів K_{11} і K_{21} . Для розв'язання задачі розрізнення-ототожнення отриманого списку розкладів запропоновано специфікаційні та графічні інваріанти. Перспективу подальших досліджень автор бачить у використанні інваріантів та необхідної умови ізоморфності циклічних розкладів.

Conclusions. Computer enumeration methods for cyclic pentagonal decompositions of K_{11} and K_{21} are given. To solve differentiation-identification problem for the resulting decomposition list we propose specification invariants and graphical invariants. The open problems for farther study could be, to our mind, applications of invariants and of the necessary condition for cyclic decomposition isomorphism.

Список використаної літератури

1. Colbourn, C.J. Applications of combinatorial designs to communications, cryptography and networking / C.J. Colbourn, J.H. Dinitz, D.R. Stinson // Surveys in combinatorics. – Cambridge University Pres. – 1999. – P. 37 – 100.
2. Иванов, А.В. Конструктивное перечисление систем инцидентности I [Текст] / А.В. Иванов, И.А. Фараджев // Rostock. Math. Kolloq. – 1983. – Vol. 24. – P. 4 – 22.
3. Bosak, J. On decompositions of complete graphs into factors with given diameters / J. Bosak, A. Rosa, Š. Znam // In: Theory of graphs, Proc. Colloq. Tihany. – 1966, Akad. Kiado 1968. – P. 37 – 56.
4. Wilson, R.M. Decomposition of complete graphs into subgraphs isomorphis to a given graph / R.M. Wilson // Proc. of the Fifth British Comb. Conference. Utilitas Math., Winnipeg. – 1976. – P. 647 – 659.

5. Bermond J.C. G-decompositions of K_n , where G has four vertices or less / J.C. Bermond, J. Schonheim // Discrete Math. – 1977. – Vol. 19, №2. – P. 113 – 120.
6. Bermond, J. Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices / J.C. Bermond, C. Huang, A. Rosa, D. Sotteau // Ars Combinatoria. – 1980. – Vol. 10. – P. 211 – 254.
7. Clin-Mei Fu On pentagon systems with prescribed intersections / Clin-Mei Fu // Utilitas Mathematica. – 1988. – Vol. 34. – P. 85 – 96.
8. Петренко, А.Я. Каталог неизоморфных 5-гомогенных пентагональных 5-упаковок [Текст] / А.Я. Петренко // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 5.– С. 102 – 109.
9. Семенюта, М.Ф. Циклічні пентагональні розклади повного графа [Текст] / М.Ф. Семенюта // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – № 3. – С. 53 – 59.
10. Семенюта, М.Ф. Дослідження розкладів та нумерацій графів: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.08 [Текст] / Семенюта Марина Фролівна. – К., 2008. – 190 с.

Отримано 29.12.2012