

УДК 539.3

С. Гребенюк, канд. техн. наук; В. Юрєчко

Запорізький національний університет

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОРИСТОГО ГУМОВОГО БУФЕРА В УМОВАХ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

*Резюме.* Розроблено підхід до чисельного аналізу напружено-деформованого стану пористого гумового буфера в умовах нелінійного деформування на основі моментної схеми скінченного елемента з використанням різних методів визначення ізотропних модулів пружності пористої гуми. Проведено розрахунок пористого гумового буфера в умовах в'язкопружного деформування з використанням ядра релаксації, що включає миттєвий і тривалий модуль пружності пористої гуми та в умовах геометрично нелінійного деформування.

*Ключові слова:* пориста гума, метод скінченних елементів, ядро релаксації, в'язкопружність.

S. Grebenyuk, V. Iurichko

## DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE OF POROUS RUBBER BUFFER IN A NONLINEAR DEFORMATION CONDITIONS

*Summary.* Approach for the numerical analysis of stress-strain state of the porous rubber buffer in non-linear strained conditions has been developed. There were examined the methods of isotropic elastic modulus of porous materials such as self-consistence method for the spherical, needle shaped and disk shaped pores as well as the Khashin-Shtrikman variation method for the free shaped pores. Geometric non-linear strain model that includes sequential solution of the linear problems including the recalculation on each step of matrix stiffness of the whole construction has been built, the finite strain tensor of porous body in this case being shown as a sum of linear and non-linear constituents. Porous body stress tensor is based on the general Hooke's law and includes the dependence from the porous material elasticity, metric tensor components, approximation of the first, second and the third strain tensor invariants. For viscoelastic deformation modeling integral relations based on Boltzmann - Volterra genetic theory were used. In this case porous body stress tensor includes the tensors of instant and continuous porous materials elastic modules, metric tensor components and the linear part of the first strain tensor invariant. To solve the resulting integral equations in three dimensional statement there time discretization for viscoelastic deformation and load discretization for geometric non-linear deformation, was used with the further use of the modified Newton - Kantorovich method. To solve the problem finite element momentum scheme on each step was used. Geometric nonlinearity and viscoelasticity of the material was formed by entering the additional load vector based on variational principle. Calculation of porous rubber buffer allowing the relaxation only of the porous rubber shift module in terms of viscoelastic deformation using the relaxation core has been carried out. It includes instant and continuous porous materials shift modules. As a result, the components of deformation stress state i.e. time distribution of normal stresses and motion dependence on both time and stress has been obtained.

*Key words:* porous rubber, finite element method, relaxation core, viscoelasticity.

**Постановка проблеми.** Математичне моделювання об'єктів і процесів механіки деформівного твердого тіла на сучасному етапі розвитку науки і техніки є дуже важливим. Особливу роль відіграє моделювання технічних конструкцій, які в процесі експлуатації зазнають механічного навантаження. У зв'язку з цим виникає необхідність дослідження напружено-деформованого стану (НДС). Зростаюча складність таких конструкцій передбачає вдосконалення математичних моделей задля того, щоб враховувати різноманітні неоднорідності матеріалів, зокрема наявність пористості. Це зумовлено широким упровадженням пористих матеріалів (ПМ) у різні галузі науки і техніки. Одним зі стимулюючих факторів цього є те, що при створенні ПМ можливо впливати на властивості отриманого матеріалу, варіюючи його пористість, розміри та

форми пор. Серед технічних конструкцій виділяються амортизаційні еластомерні конструкції, які працюють в умовах в'язкопружного та геометрично нелінійного деформування, однією з яких є пористий гумовий буфер (ПГБ). ПГБ – це прилад, що служить для поглинання (амортизації) стискаючих зусиль.

Аналітичний розрахунок для більшості конструкцій є дуже складною, а інколи і неможливою процедурою. Тому велике значення набуває використання чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів (МСЕ).

Існує цілий ряд конструкцій, розрахунок НДС яких некоректно виконувати в лінійній постановці. До числа таких відносяться конструкції, в процесі експлуатації яких порушується лінійний характер залежності між прикладеними навантаженнями і переміщеннями в міру значних деформацій матеріалу, а також реологічних характеристик матеріалу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідженню впливу наявності пористості на властивості матеріалів присвячені такі роботи. В роботі [1] зроблено спробу вивести теоретичну залежність щільності ПМ від геометричних параметрів його структури. Структура ПМ передбачається такою, що складається зі щільного матеріалу, в якому розташовані порожнини. За незначної пористості матеріалу розглядалися порожнечі кулястої форми. За малих густин та великою пористістю розглядалися порожнечі у формі багатогранників.

У роботі [2] запропоновано новий підхід для описування поведінки багатофазних пружних пористих середовищ. Поряд із середніми значеннями інтегральні співвідношення містять нові змінні, які ототожнюються з узагальненими термодинамічними силами, за допомогою яких враховується міжфазна взаємодія в пористому середовищі.

У рамках гіпотези взаємопроникних континуумів у роботі [3] розглянуто феноменологічну модель насиченою рідиною пористого середовища. Знайдено, що умова нестисненості тільки однієї з компонент середовища призводить не до кінематичних обмежень, а до виключення пористості з визначальних співвідношень.

Для моделювання пружних характеристик пористих псевдосплавів у роботі [4] використано метод елементарної комірки, який давав прийнятні результати при дослідженні пористих металів.

Вивченню в'язкопружного деформування матеріалів присвячена велика кількість робіт: М.А. Колтунова [5, 6], В.Г. Карнаухова, Б.П. Гуменюка, І.Ф. Киричка [7, 8], В.В. Киричевського [9], Ю.Н. Работнова [10], А.Р. Ржаніцина [11] та інших.

Дослідженню НДС конструкцій із ПМ в умовах нелінійного деформування присвячена обмежена кількість робіт. У роботі [12] за допомогою моделювання, заснованому на скінченноелементному аналізі процесу напрусування пористої втулки на компактний вал, визначено градієнти залишкових напружень, що виникають у пористій втулці і валу при утворенні з'єднання з натягом.

У роботі [13] досліджено процеси в'язкопружного деформування при пресуванні ненасиченого капілярно-пористого анізотропного середовища з урахуванням зовнішнього тертя.

Робота [14] присвячена розробленню методів чисельного моделювання нелінійних процесів деформування і руйнування тривимірних тіл при високошвидкісній ударній взаємодії на базі відомої пружно-пластичної швидкісної моделі пористого матеріалу Маккензі.

У роботі [15] розроблено методику врахування нелінійного деформування пористого матеріалу малої щільності при одновісному напруженому стані. Проведено співставлення отриманих розрахункових залежностей з відомими експериментальними даними.

Аналіз показує, що, незважаючи на наявність робіт, присвячених визначенню НДС ПМ, залишається ряд невирішених питань, які стосуються цієї проблеми. Серед них можна виділити такі напрямки:

- у більшості робіт представлені тільки теоретичні співвідношення для ПМ без розрахунків конкретних конструкцій з ПМ;
- не враховувалися реологічні властивості ПМ;
- практично відсутні роботи, в яких описується в'язкопружна поведінка пористих еластомерів;
- розраховувалися об'єкти простої геометричної форми;
- у більшості робіт розрахунок проводився в двовимірній постановці.

Зроблені висновки підтверджують необхідність проведення даного дослідження в обраному напрямку для отримання розв'язку поставленої задачі.

**Метою роботи** є побудова моделі в'язкопружного та геометрично нелінійного деформування ПГБ на основі моментної схеми скінченного елемента (МССЕ).

**Постановка задачі.** Розв'язати статичну задачу пружності в тривимірній постановці для циліндричного ПГБ з круглим отвором (рис. 1):  $a$  – внутрішній радіус;  $b$  – зовнішній радіус;  $h$  – висота;  $Q$  – розподілене навантаження. ПГБ використовують для амортизації кабіни ліфта, встановлюючи його в прямку ліфтової шахти (ідентифікаційний номер MOS09121152198-1, частина ліфта марки «SCHINDLER EUROLIFT»). ПГБ знаходиться під осьовим навантаженням, знизу до нього привулканізована металева пластина, що спирається на абсолютно жорстку основу. Граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$\bar{u}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=h} = -Q,$$

де  $\bar{u}$  – вектор переміщень;  $\sigma_{zz}$  – нормальне напруження.

Розв'язок задачі будується на основі варіаційного принципу з використанням співвідношень Коші. Як закони стану використовуються закон Гука з нелінійним тензором деформацій та закон Больцмана – Вольтерра.

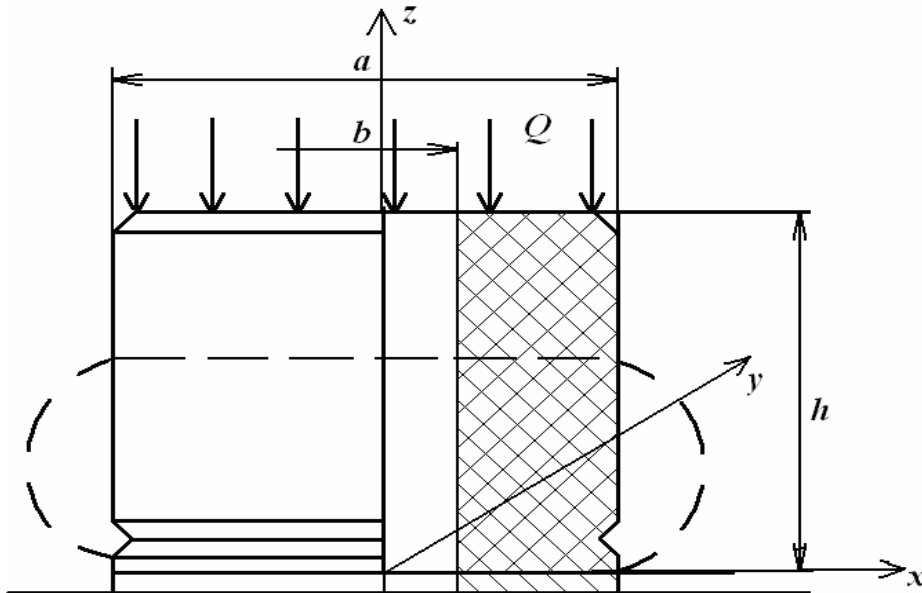


Рисунок 1. Циліндричний пористий гумовий буфер з круглим отвором

Figure 1. Cylindrical porous rubber buffer with a round hole

**Урахування пористості матеріалу.** При дослідженні НДС конструкцій із пористих гум (ПГ) важливим є вибір необхідної теорії, що характеризує залежність

пружних сталей ПГ від пористості  $P$  та пружних сталей матриці матеріалу. Для отримання пружних сталей ПГ використовували найбільш обґрунтовані методи розрахунку модулів пружності ПМ, а саме, метод самоузгодження та варіаційний метод Хашина – Штрікмана, які виражають залежність модуля об'ємного стиску  $K$  та модуля зсуву  $G$  ПГ від їх відносної щільності  $\rho = 1 - P$  [16]. У рамках методу самоузгодження для пор сферичної форми

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \alpha_0 \rho}; \quad \frac{G}{G_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \beta_0 \rho}, \quad (1)$$

де  $\alpha_0 = \frac{1 + \nu_0}{3(1 - \nu_0)}$ ;  $\beta_0 = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu_0}{1 - \nu_0}$ ;  $K$ ,  $G$ ,  $K_0$ ,  $G_0$  – модулі об'ємного стиску та зсуву

пористого матеріалу і матриці відповідно;  $\nu_0$  – коефіцієнт Пуассона матриці.

Для випадкового просторового розподілення пор

$$\frac{K}{K_0} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} p\right)^{-1}; \quad \frac{G}{G_0} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} q\right)^{-1}, \quad (2)$$

де для пор голкоподібної форми

$$p = \frac{5 - 4\nu_0}{3(1 - 2\nu_0)}; \quad q = \frac{8}{15}(5 - 3\nu_0), \quad (3)$$

а для пор дискової форми

$$p = \frac{4}{3} \frac{1 - \nu_0^2}{1 - 2\nu_0} \frac{1}{\pi l}; \quad q = \frac{8}{15} \frac{(1 - \nu_0)(5 - \nu_0)}{2 - \nu_0} \frac{1}{\pi l}, \quad (4)$$

де  $l = \frac{t}{d}$ ,  $t$  – товщина;  $d$  – діаметр пори.

У варіаційному методі Хашина – Штрікмана модулі пружності ПГ визначаються співвідношеннями

$$\frac{K}{K_0} = \rho \left(1 + (1 - \rho) \frac{3K_0}{4G_0}\right)^{-1}; \quad \frac{G}{G_0} = \left(1 + \frac{2}{3}(1 - \rho) \left(\frac{10G_0}{9K_0 - G_0}\right)\right)^{-1}. \quad (5)$$

### Побудова моделі нелінійного деформування ПГБ на основі МССЕ.

Геометрична нелінійність та реологічні складові параметрів НДС ПГБ моделюються введенням вектора додаткового навантаження, який будується розв'язанням традиційних рівнянь МССЕ на основі варіації повної потенційної енергії системи. Побудова розв'язувальних рівнянь буде розглянута далі.

Геометрична нелінійність враховується послідовним розв'язуванням ряду лінійних задач із перерахуванням на кожному кроці матриці жорсткості всієї конструкції. При цьому матриця жорсткості включає початкові зусилля; навантаженням є східчаста функція  $Q_n$ , що змінюється на величину  $\Delta Q_n$  на кожному кроці навантаження таким чином, щоб задача залишалася лінійною; на кожному кроці за навантаженням розглядається нове положення вузлових точок деформованої конструкції. У цьому випадку тензор скінченних деформацій визначаємо виразом [9]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j} + u_{m',i} u_{m',j} \right),$$

запишемо цей вираз у вигляді

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(n)} + \varepsilon_{ij}^{(H)}, \quad (6)$$

де  $\epsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}(C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j})$  – лінійна частина тензора деформацій;  $\epsilon_{ij}^{(h)} = \frac{1}{2} u_{m',i} u_{m',j}$  – нелінійна частина тензора деформацій. Тут  $C_i^{m'}$  і  $C_j^{m'}$  – коефіцієнти матриці перетворення координат при переході від однієї системи координат до іншої, що мають вигляд  $C_i^{m'} = \frac{\partial z^{m'}}{\partial x^i}$ ;  $u_{m'}$  – компоненти вектора переміщень,  $u_{m',j} = \frac{\partial u_{m'}}{\partial x_j}$ .

При розв'язуванні задач механіки деформованого твердого тіла в геометрично нелінійній постановці тензор напружень для пористого тіла визначаємо на основі узагальненого закону Гука такі чином [17]:

$$\sigma^{ij} = 2G \left( g^{ki} g^{lj} \epsilon_{kl}^{(n)} - \frac{1}{3} J_1^{(n)} g^{ij} \right) + K J_1^{(n)} g^{ij} + 2G \left( g^{ki} g^{lj} \epsilon_{kl}^{(h)} - \frac{1}{3} J_1^{(h)} g^{ij} \right) + K g^{ij} \left( J_1^{(h)} + 2J_2 + 4J_3 - \frac{1}{2} J_1^2 - 2J_2^2 - 8J_3^2 - 2J_1 J_2 - 4J_1 J_3 - 8J_2 J_3 \right), \quad (7)$$

де  $K$  – модуль об'ємного стиску і  $G$  – модуль зсуву ПГ, які, в свою чергу, виражаються через модулі  $K_0$  і  $G_0$  матеріалу матриці та відносну щільність  $\rho$  згідно з формулою (1) – (5);  $g^{ij}$  – компоненти метричного тензора;  $J_1, J_2, J_3$  – узагальнені перший, другий і третій інваріанти тензора деформацій;  $J_1^{(n)}$  та  $J_1^{(h)}$  – лінійна та нелінійна частини першого інваріанта тензора деформацій відповідно.

Враховуючи, що лінійна складова тензора напружень дорівнює

$$\sigma_{(n)}^{ij} = 2G \left( g^{ki} g^{lj} \epsilon_{kl}^{(n)} - \frac{1}{3} J_1^{(n)} g^{ij} \right) + K J_1^{(n)} g^{ij},$$

нелінійна складова тензора напружень дорівнює

$$\sigma_{(h)}^{ij} = 2G \left( g^{ki} g^{lj} \epsilon_{kl}^{(h)} - \frac{1}{3} J_1^{(h)} g^{ij} \right) + K g^{ij} \left( J_1^{(h)} + 2J_2 + 4J_3 - \frac{1}{2} J_1^2 - 2J_2^2 - 8J_3^2 - 2J_1 J_2 - 4J_1 J_3 - 8J_2 J_3 \right),$$

вираз (7) запишемо у вигляді суми лінійної і нелінійної складових

$$\sigma^{ij} = \sigma_{(n)}^{ij} + \sigma_{(h)}^{ij}. \quad (8)$$

Варіація повної потенційної енергії системи має вигляд [9]

$$\delta\Pi = \delta W - \delta A. \quad (9)$$

Тут  $\delta A$  – варіація роботи розподілених об'ємних  $P^i$  і поверхневих  $F^i$  сил

$$\delta A = \iiint_V P^i \delta u_i dv + \iint_S F^i \delta u_i ds,$$

$\delta W$  – варіація внутрішньої енергії пружної деформації

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dv.$$

Підставимо компоненти тензора напружень (8) у вираз (9)

$$\delta\Pi = \iiint_V (\sigma_{(n)}^{ij} + \sigma_{(h)}^{ij}) \delta(\epsilon_{ij}^{(n)} + \epsilon_{ij}^{(h)}) dV - \delta A. \quad (10)$$

Аналізуючи вираз (10), виділимо лінійні й нелінійні складові варіації енергії пружної деформації. Лінійні складові є основою формування матриці жорсткості  $M$  скінченного елемента й мають вигляд

$$\iiint_V \sigma_{(n)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} dV = M^{ph} u_p \delta u_h. \quad (11)$$

Нелінійні складові виразу (10) запишемо у вигляді

$$\iiint_V \sigma_{(n)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} dV + \iiint_V (\sigma_{(n)}^{ij} + \sigma_{(n)}^{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} dV = N^{ph} u_p \delta u_h. \quad (12)$$

Припускаючи, що на тіло діє лише розподілене поверхневе навантаження, яке можна звести до зосереджених сил у кожному вузлі, та використовуючи співвідношення (11) і (12), варіація потенційної енергії набуває вигляду

$$(M^{ph} u_p + N^{ph} u_p - F^h) \delta u_h = 0, \quad (13)$$

де  $F^h = \iint_s F^i ds$ .

В'язкопружні властивості ПГ описуємо визначальними рівняннями спадкового типу, в яких зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій має залежність від часу. В'язкопружне деформування ПГБ моделюємо за допомогою спадкової теорії Больцмана-Вольтерра [18]

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = C_{(M)}^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t (C_{(M)}^{ijkl} - C_{(T)}^{ijkl}) e^{-(t-\tau)} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau,$$

де  $C_{(M)}^{ijkl}$  і  $C_{(T)}^{ijkl}$  – тензори миттєвих та тривалих модулів пружності ПГ відповідно.

Тензор напружень для в'язкопружного пористого тіла, у припущенні релаксації лише модуля зсуву  $G$ , визначаємо на основі узагальненого закону Гука таким чином [19]:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij}(t) = & K g^{ij} J_1^{(n)}(t) + 2G_{(M)} \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{(n)}(t) - \frac{1}{3} g^{ij} J_1^{(n)}(t) \right) - \\ & - \int_0^t (G_{(M)} - G_{(T)}) e^{-(t-\tau)} \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{(n)}(\tau) - \frac{1}{3} g^{ij} J_1^{(n)}(\tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $G_{(M)}$  та  $G_{(T)}$  – миттєвий та тривалий модулі зсуву ПГ відповідно.

При розв'язуванні задачі в'язкопружності МСЕ у виразі (14) переходимо до скінченно-різницевої форми та, враховуючи, що переміщення  $u(t)$  і деформації  $\varepsilon(t)$  змінюються лінійно всередині кожного інтервалу часу, інтеграл у виразі (14) знаходимо аналітично, детальніше ця процедура показана у роботі [9].

Вважаючи, що лінійна складова тензора напружень дорівнює

$$\sigma_{(n)}^{ij} = 2G_{(M)} \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)} - \frac{1}{3} J_1^{(n)} g^{ij} \right) + K J_1^{(n)} g^{ij},$$

в'язкопружна складова тензора напружень дорівнює

$$\tilde{\sigma}_{(n)}^{ij}(t_n) = -(G_{(M)} - G_{(T)}) \sum_{m=0}^{n-1} (e^{t_{m+1}-t_m} - 1) \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{(n)}(t_m) - \frac{1}{3} g^{ij} J_1^{(n)}(t_m) \right),$$

вираз (14) запишемо у вигляді суми лінійної і нелінійної складових

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t_n) = \sigma_{(n)}^{ij} + \tilde{\sigma}_{(n)}^{ij}(t_n). \quad (15)$$

Лінійна складова тензора напружень характеризує пружне деформування ПГ, тому у виразах (8) і (15) вони співпадають.

Будемо вважати, що в умовах в'язкопружного деформування ПГ нелінійна складова тензора скінченних деформацій у виразі (6) дорівнює нулю, тому вираз (6)

набуває вигляду  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j})$ . У цьому випадку вираз (10) запишемо

$$\delta \tilde{\Pi} = \iiint_V (\sigma_{(l)}^{ij} + \tilde{\sigma}_{(h)}^{ij}(t_n)) \delta \epsilon_{ij} dV - \delta A.$$

Нелінійні складові варіації енергії в'язкопружної деформації запишемо у вигляді

$$\iiint_V \tilde{\sigma}_{(h)}^{ij}(t_n) \delta \epsilon_{ij} dV = N^{ph}(t_n) u_p(t_n) \delta u_h. \quad (16)$$

Загальний вигляд основного рівняння варіації потенційної енергії в умовах геометрично нелінійного деформування ПГ та в умовах в'язкопружного деформування ПГ має однаковий вигляд (13).

Стандартний МСЕ у формі методу переміщень не дозволяє враховувати жорсткі зміщення скінченного елемента й іншу негативну властивість матриці жорсткості, пов'язану з появою фіктивних зсувних деформацій, – «ефект хибного зсуву». Крім того, для еластомерних матеріалів, більшість з яких є слабкостискувальними, традиційний МСЕ не дозволяє отримувати адекватні результати. Щоб усунути перераховані недоліки, скористаємося МССЕ [20], яка полягає у введенні потрібної апроксимації: полів переміщень, компонентів деформацій та функції зміни об'єму. Виведення співвідношень матриці жорсткості для ПМ у повному обсязі представлено в роботі [20].

Оскільки варіація переміщень у виразі (13) не дорівнює нулю, то нулю має дорівнювати вираз у дужках, що являє собою лінеаризовану систему розв'язувальних рівнянь МССЕ

$$M \bar{u}^{(i)} = \bar{Q} - \bar{N}^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

де  $M = M^{ph}$ ,  $\bar{u}^{(i)} = u_p^{(i)}$  – вектор переміщень на  $i$ -тій ітерації;  $\bar{Q} = F^h$  – вектор розподілених поверхневих навантажень;  $\bar{N}^{(i-1)} = N^{ph} u_p^{(i-1)}$  – вектор додаткового навантаження, зумовлений або геометричною нелінійністю деформування ПГ, або реологічними властивостями ПГ.

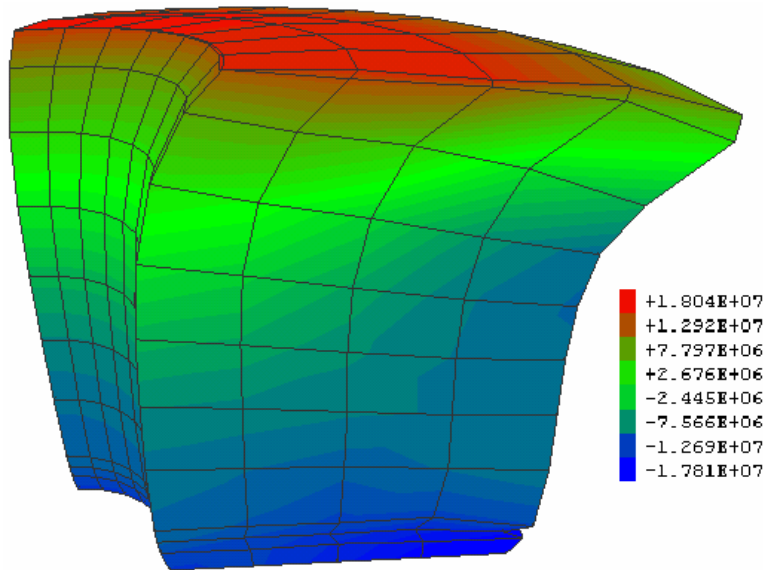
Розв'язок системи (17) будується на основі модифікованого методу Ньютона – Канторовича для розв'язування геометрично нелінійної задачі та задачі в'язкопружності [9]. У загальному вигляді ця процедура має наступні етапи:

1. На першому кроці навантаження розв'язуємо лінійну задачу й знаходимо переміщення  $u_I^1$  (верхній індекс позначає номер ітерації, а нижній – крок за навантаженням для геометрично нелінійної задачі, або крок за часом – для задачі в'язкопружності).
2. Формуємо праву частину  $F_n^h - N^{nh} u_n$  системи рівнянь (17) за рахунок геометрично нелінійних або в'язкопружних доданок, що враховують знайдені на попередньому кроці  $u_I^1$ .
3. Розв'язуємо лінійну задачу з новою правою частиною  $F_I^1 - N^{11} u_I^1$  і знаходимо переміщення  $u_I^2$ .
4. Знову перераховуємо праву частину за нелінійними доданками з урахуванням переміщень  $u_I^2$ .
5. Розв'язуємо лінійну задачу з навантаженням  $F_I^2 - N^{12} u_I^2$  і знаходимо переміщення  $u_I^3$ .
6. Ітераційний процес на цьому кроці навантаження припиняємо, коли  $u_I^m \cong u_I^{m-1}$  з точністю до заданого числа.
7. Здійснюємо наступний крок за навантаженням або часом.
8. Переходимо до виконання пунктів, починаючи з 2-го.

**Результати розрахунків.** Даний підхід розрахунку ПГБ в умовах нелінійного деформування реалізовано в рамках програмного комплексу «МІРЕЛА+» [21].

Вихідні дані: марка гуми – 51-1714, внутрішній радіус  $a = 0,035$  м, зовнішній радіус  $b = 0,125$  м, висота  $h = 0,1$  м, миттєвий та тривалий модулі зсуву матеріалу матриці ПГ відповідно  $G_{(м)} = 2,0 \times 10^6$  Па і  $G_{(т)} = 1,1 \times 10^6$  Па [9], коефіцієнт Пуассона  $\nu_0 = 0,49$ , модуль об'ємного стиску ПГ  $K_0 = 99,3 \times 10^6$  Па.

На рис. 2 представлено розподілення нормальних напружень  $\sigma^{11}$  у ПГБ при часі  $t = 1$  секунди в умовах в'язкопружного деформування, навантаженні  $Q = 10000$  Н, пористості  $P = 50\%$  для методу (1) та сітки дискретизації  $5 \times 8 \times 12$ .



**Рисунок 2.** Розподілення напружень  $\sigma^{11}$  в умовах в'язкопружного деформування

**Figure 2.** Distribution of stresses  $\sigma^{11}$  in a viscoelastic deformation

На рис. 3 представлено розподілення нормальних напружень  $\sigma^{11}$  у ПГБ в умовах геометрично нелінійного деформування, навантаженні  $Q = 10000$  Н, пористості  $P = 50\%$  для методу (5) та сітки дискретизації  $5 \times 8 \times 12$ .



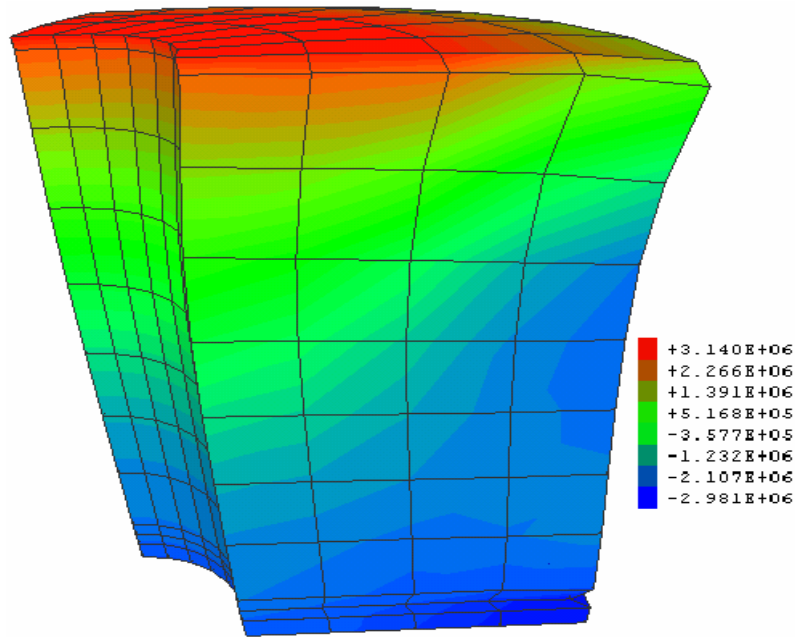
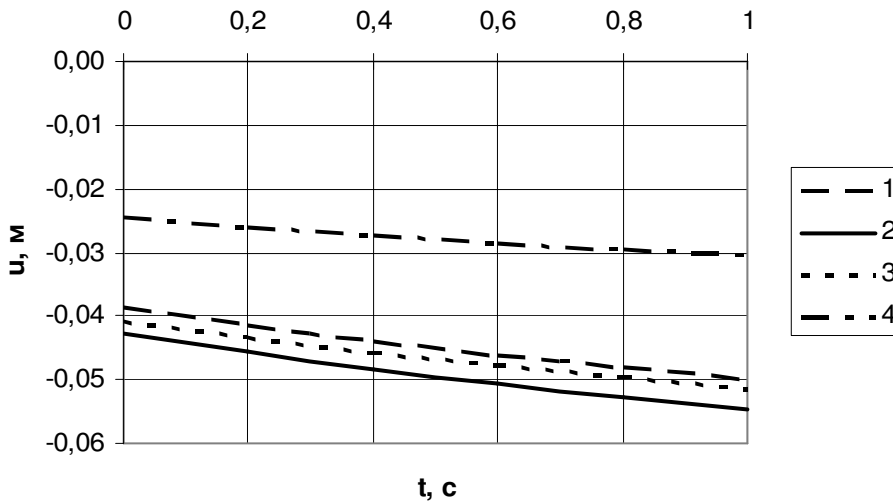


Рисунок 3. Розподілення напружень  $\sigma^{11}$  в умовах геометрично нелінійного деформування

Figure 3. Distribution of stresses  $\sigma^{11}$  in geometrically nonlinear deformation

На рис. 4 представлено залежність переміщень  $u$  від часу  $t \in [0;1]$  секунди в умовах в'язкопружного деформування ПГ при пористості  $P = 50\%$  для кожного з методів (1)-(5), навантаженні  $Q = 10000$  Н та сітки дискретизації  $5 \times 8 \times 12$ .



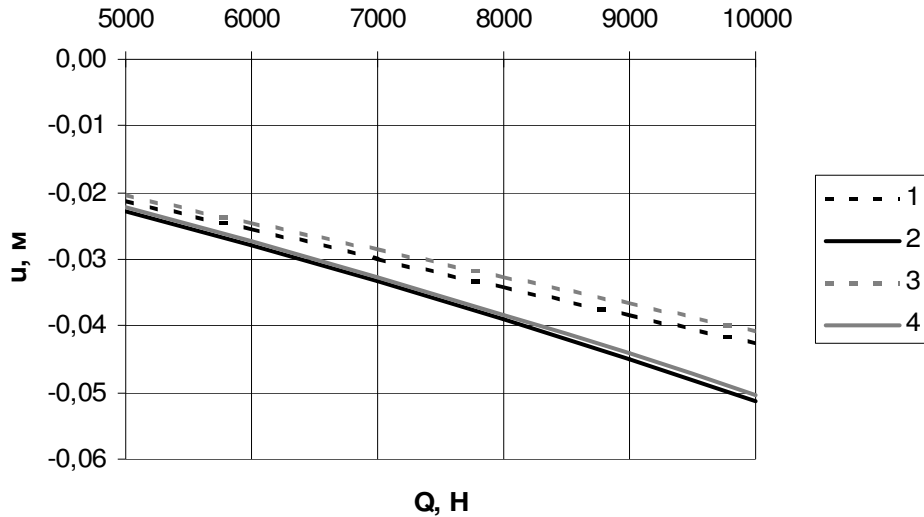
1 – формула (1); 2 – формули (2), (3); 3 – формули (2), (4); 4 – формула (5)

Рисунок 4. Залежність переміщень  $u$  від часу  $t \in [0;1]$  секунди

1 – formula (1); 2 - formula (2), (3); 3 – formula (2), (4); 4 – formula (5)

Figure 4. Dependence of displacements  $u$  from time  $t \in [0;1]$  seconds

На рис. 5 представлено залежність переміщень  $u$  від навантаження  $Q$  від 5000 до 10000 Н в умовах лінійного та геометрично нелінійного деформування ПГ при пористості  $P = 50\%$ , для методів (3) і (4) та сітки дискретизації  $5 \times 8 \times 12$ .



1 – формула (3) в лінійних умовах деформування; 2 – формула (3) в нелінійних умовах деформування;  
3 – формула (4) в лінійних умовах деформування; 4 – формула (4) в нелінійних умовах деформування

**Рисунок 5.** Залежність переміщень  $u$  від навантаження  $Q$

1 – formula (3) in conditions of linear deformation; 2 – formula (3) in conditions of nonlinear deformation;  
3 – formula (4) in conditions of linear deformation; 4 – formula (4) in conditions of nonlinear deformation

**Figure 5.** Dependence of the displacement  $u$  of the load  $Q$

**Висновки.** Аналіз отриманих результатів показує, що урахування реологічних характеристик пористої гуми збільшує величини параметрів напружено-деформованого стану. При в'язкопружній поведінці пористої гуми, переміщення  $u$  залежно від використання методів (1) – (5), збільшилися на 20 – 23%. З графіків можна помітити, що урахування геометричної нелінійності деформування пористого гумового буфера значніше впливає на параметри напружено-деформованого стану при зростанні навантаження. Переміщення  $u$ , отримані у пружній лінійній постановці, залежно від використання методів (3) і (4), зросли на 22 – 24%.

Таким чином, запропонований підхід до чисельного аналізу параметрів напружено-деформованого стану пористого гумового буфера на основі моментної схеми скінченного елемента в умовах геометрично нелінійного та в'язкопружного деформування дозволяє уточнити напружено-деформований стан конструкцій із пористих матеріалів.

**Conclusions.** Analysis of the obtained results (Fig. 2 – 3) shows that regardless of the rheological characteristics of porous rubber increases the value of the parameters of the stress-strain state, so when viscoelastic behavior of porous rubber per second, depending on the movement of the methods (1) – (5) is increased by 20 – 23%. From the graphs it can be see that taking into account the geometric nonlinearity of deformation of porous rubber buffer significantly affects the parameters of the stress-strain state when the load, increases. Displacement obtained in the linear elastic production, depending on the application of the methods (3) and (4) increased by 22 – 24%.

Thus, the proposed approach to the numerical analysis of the parameters of the stress-strain state of the porous rubber buffer on the basis of moment scheme of the finite element in the condition of geometrically nonlinear and viscoelastics deformation allows to specify stress-strain state of the porous materials structures.

**Список використаної літератури**

1. Сапелин, Н.А. Влияние геометрических параметров структуры на плотность пористых материалов [Текст] / Н.А. Сапелин // ОАО «ВНИИСТРОМ им. П. П. Будникова». – Воронеж. – 2003. – С. 76 – 85.
2. Глушко, А.И. Об одном подходе к построению моделей многофазных упругих сред [Текст] / А.И. Глушко, И.И. Нещеретов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 4. – С. 636 – 669.
3. Кондауров, В.И. Термодинамически согласованные уравнения термоупругой насыщенной пористой среды [Текст] / В.И. Кондауров // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 4. – С. 666 – 635.
4. Поляков, В.В. Модули упругости пористых псевдосплавов [Текст] / В.В. Поляков, А.В. Егоров, В.А. Турецкий // Известия вузов. Физика. Барнаул. – 2003. – № 3. – С. 119 – 121.
5. Колтунов, М.А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации [Текст] / М.А. Колтунов // Механика полимеров. – 1966. – №4. – С. 483 – 497.
6. Ломакин, В.А. Моделирование процессов деформирования нелинейных вязкоупругих сред [Текст] / В.А. Ломакин, М.А. Колтунов // Механика полимеров. – 1967. – № 2. – С. 221 – 227.
7. Карнаухов, В.Г. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел [Текст] / В.Г. Карнаухов, Б.П. Гуменюк. – К.: Наукова думка, 1990. – 304 с.
8. Карнаухов, В.Г. Связанные задачи теории вязкоупругости пластин и оболочек [Текст] / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. – К.: Наукова думка, 1986. – 221 с.
9. Киричевский, В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров [Текст] / В.В. Киричевский. – К.: Наук. думка, 2002. – 655 с.
10. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 572 с.
11. Ржаницин, А.Р. Теория ползучести [Текст] / А.Р. Ржаницин. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.
12. Особенности напряженно-деформированного состояния прессовых соединений с использованием деталей из порошковых материалов [Текст] / А.В. Бабец, С.А. Дебеева, Д.Б. Волжин, А.С. Яковенко // Изв. вуз. Сев.-Кав. регион. Техн. науки. – 2009. – № 4. – С. 80 – 82.
13. Дорняк, О.Р. Численное решение краевой задачи вязкоупругого деформирования ортотропного капиллярно-пористого материала при прессовании [Текст] / О.Р. Дорняк // Вестник ВГУ, Серия: Физика, Математика. – 2005 – №2. – С. 138 – 146.
14. Голованов, А.И. Расчет больших упругопластических деформаций трехмерных тел МКЭ [Текст] / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Математическое моделирование систем и процессов. – 2004. – №12. – С. 4 – 11.
15. Шиповский, И.Е. Численное исследование напряженно-деформированного состояния массива горной породы при взрывном разрушении [Текст] / И.Е. Шиповский // Динамические системы. – 2000. – №16. – С. 90 – 98.
16. Ковальченко, М.С. Механические свойства изотропных пористых материалов [Текст] / М.С. Ковальченко // Порошковая металлургия. – 2002. – № 5/6. – С. 105 – 127.
17. Гребенюк, С.М. Визначення напружено-деформованого стану конструкцій із пористих матеріалів в умовах нелінійного деформування [Текст] / С.М. Гребенюк, В.З. Юречко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 130 – 136.
18. Нарусберг, В.Л. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов: монография [Текст] / В.Л. Нарусберг, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1988. – 299 с.
19. Гребенюк, С.М. Визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндра із пористого матеріалу в умовах в'язкопружного деформування [Текст] / С.М. Гребенюк, В.З. Юречко // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Том 23. – С. 53 – 60.
20. Гребенюк, С.М. Визначення напружено-деформованого стану конструкцій із пористих матеріалів [Текст] / С.М. Гребенюк, В.З. Юречко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 15. – С. 60 – 69.
21. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» [Текст] / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др. – К.: Наук. думка, 2005. – 416 с.

*Отримано 27.02.2013*