Сачук Ю. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми / Ю. Сачук, О. Максимук // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2015. — Том 78. — № 2. — С. 70-80. — (Механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Ю. Сачук[1]; О. Максимук[2], докт. фіз.-мат. наук

[1] Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
[2] Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ ШТАМПАМИ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

Резюме. *Розв'язано задачі про контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною з урахуванням зношування матеріалу. На основі моделі абразивного зношування побудовано інтегральне рівняння для визначення контактного тиску. Розроблено методику розв'язування інтегрального рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення. Для знаходження власних значень та векторів застосовано метод Холецького. Проведено числові розрахунки контактного тиску в різні моменти часу, проаналізовано особливості його розподілу для різних форм штампів.*

Ключові слова: *контактна взаємодія, пружна півплощина, зношування, штампи канонічної форми, поліноми Чебишева.*

Y. Sachuk; O. Maksymuk

CONTACT PROBLEM ON THE WEAR OF THE ELASTIC HALF-PLANE BY CANONICAL FORM STAMPS

Summary. *The problems of contact interaction of the canonical form stamps (cylindrical, elliptical, hyperbolic) with the elastic half-plane taking into account the wastage of material, are solved. The integral equation, based on the model of abrasive wastage, is made to determine the contact pressure. Numeric methods of solving integral equations of this type are analyzed. The method of solving the integral equation is developed, that reduces the problem to a generalized problem of eigenvalues. Analytical and numerical methods of solving the generalized eigenvalue problem are analyzed and comparative analysis of them is conducted.*

To find the eigenvalues and vectors the method of Holetskyi and QZ-factorization is applied. The theoretical similarity of this methods and numerical change of eigenvalues with increasing the dimension of input matrix are analyzed. Software for the writing software modules with the possibility of automation process of solving a generalized eigenvalue problem and making contact pressure graphs with variable number of eigenvalue (with different number of range members for the contact pressure), are chosen. To check correctness of obtained eigenvalues, procedure of solving generalized eigenvalue problem was performed in different softwares.

On the base of obtained eigenvalues, numerical calculation of contact pressure is hold. An algorithm of finding the contact area at any given moment of time for a given power of pressing the stamp is developed. For fixed moments of time contact area at a given initial force was found. The number of line members for the contact pressure is experimentally found, so that the error can be ignored. An algorithm of bringing to the one scale graphs of contact pressure in different areas of contact was developed and realized. The analysis of the features of its distribution to the various forms of stamps was hold.

Graphics of the size of wastage in dimensionless quantities for a given contact area, for a given contact force, are constructed. The size of wastage for different contact areas for different stamps, are analyzed. On the base of the size of wastage the analysis of the wastage process, is hold.

Key words: *contact interaction, elastic half-plane, wear, stamps canonical form, Chebyshev polynomials.*

Постановка проблеми. Сучасний стан теорії тертя й зношування потребує надійних методів розрахунку контактних вузлів. Практично невирішеною є проблема прогнозування часу якісної роботи фрикційних пар і визначення допустимої величини зношування контактуючих поверхонь, за якої працюючий механізм не вийде з ладу. Проведення експериментальних досліджень у цьому напрямку є дуже трудомістким і дороговартісним. Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є побудова математичних моделей процесів тертя і зношування з використанням досягнень механіки контактної взаємодії.

Основним параметром, який визначає роботу фрикційної пари, є контактний тиск. Тому побудова співвідношень, що дозволяють визначити контактний тиск, є основою математичних моделей. Як правило, це – інтегральні рівняння. Але на відміну від інтегральних рівнянь задач класичної контактної механіки у задачах із урахуванням зношування необхідно враховувати низку специфічних особливостей: зміну області контакту від просторових координат і часу, залежність розподілу контактного тиску від форми тіл, модель зношування, фрикційний розігрів і т.п. Розв'язання цих задач є важливим і актуальним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розвиток математичного моделювання процесів тертя і зношування пов'язаний з роботами Костецького Б.І., Крагельського І.В., Чичинадзе А.В., Barber J.R. та ін. Однак у більшості моделей зношування використовувалися відомі розв'язки Герца для різних форм контактуючих тіл. У роботах Л.О. Галіна (зношування балки жорстким штампом) контактний тиск знаходиться з умов взаємодії контактуючих тіл, що враховує умови зношування, та запропонованої методики розв'язування (розділення змінних).

Розвиток таких досліджень проведено у роботах [1–4], у яких, як правило, використовується параболічна форма штампа, що справедливо для малих областей контакту [5]. У низці сучасних робіт розглядаються різні моделі зношування, враховуються мікрогеометрія контактуючих тіл і їх загальна форма, температурні ефекти [6–10].

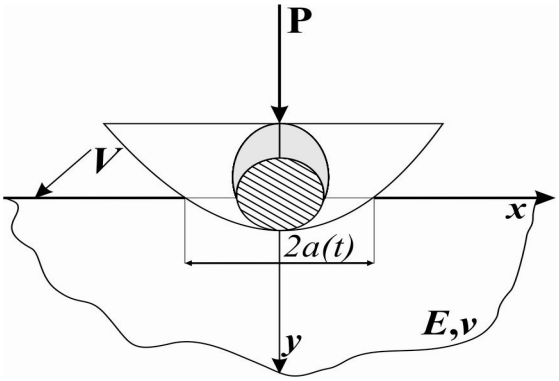


Рисунок 1. Модель зношування: штамп – пружна півплощина

Figure 1. Model of wastage: stamp – elastic half-plane

Мета роботи. Розвиток методики розв'язування плоских контактних задач зі зношуванням матеріалу для штампів канонічної форми. Числовий аналіз результатів, визначення особливостей зношування штампами різної форми та величини зношування матеріалу залежно від часу роботи фрикційного з'єднання й умов його роботи.

Постановка контактної задачі зі зношуванням. Розглядається контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною з урахуванням зношування матеріалу.

У пружну півплощину втискується силою P жорсткий штамп з основою $f(x)$. Крім того, штамп рухається зі швидкістю V у напрямку, перпендикулярному до площини (рис.1). Унаслідок цього відбувається абразивне зношування матеріалу за лінійної залежності сили тертя із силою тиску [3,10]

$$\upsilon_*(x,t) = k_1 k_2 V \int_0^t p(x,t)dt\,, \tag{1}$$

де υ_* – величина зношування; k_1 – коефіцієнт пропорційності між роботою сили тертя та кількістю зношеного матеріалу; k_2 – коефіцієнт тертя; $p(x,t)$ – контактний тиск.

Враховуючи умову контакту штампа з півплощиною, інтегральне рівняння для визначення контактного тиску з урахуванням зношування має вигляд [4]

$$\frac{1}{\alpha}\int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi,t)\frac{d\xi}{\xi - x} = k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x,t)dt - \frac{df(x)}{dx}\ , \tag{2}$$

де $\alpha = \dfrac{\pi E}{2(1-\nu^2)}$.

Контактний тиск у кожен момент часу *t* повинен задовольняти умови

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x,t)dt\ ,\ p(\pm a(t),t) = 0\ . \tag{3}$$

Алгоритм розв'язку рівняння. Відповідно до обраної методики розв'язування рівняння (2) у безрозмірних величинах [3] контактний тиск шукаємо у вигляді

$$p(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k} t}\ . \tag{4}$$

Підставивши формулу (4) у (2), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\int_{-1}^{1} p(\tau,0)\frac{d\tau}{\tau - x} = \frac{df(x)}{dx}; \tag{5}$$

$$\alpha_{2k}\int_{-1}^{1} \varphi_{2k}(\tau)\frac{d\tau}{\tau - x} - \frac{d\varphi_{2k}(x)}{dx} = 0\,,\ \text{при}\ k = 1,2,... \tag{6}$$

Розв'язок системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (6), враховуючи умову (3), шукаємо у вигляді

$$\phi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2}\, U_{2m}(x). \tag{7}$$

Підставивши формулу (7) у формулу (6), отримаємо

$$a_{2k}\sum_{m=0}^{\infty}a_m^k(-\pi)T_{2m+1}(x)+\sum_{m=0}^{\infty}a_m^k\frac{T_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}(2m+1)=0\,, \qquad (8)$$

де $T_n(x)$, $U_n(x)$ – поліноми Чебишева першого і другого роду.

Домножуючи кожен член співвідношень (8) на $T_{2i+1}(x)$ при $i=\overline{1,n}$ та інтегруючи від -1 до 1, отримуємо узагальнену задачу на власні значення

$$(A-a_{2k}B)X=0\,, \qquad (9)$$

де α_{2k} – власні значення; a_m^k – власні вектори. Матриці A і B мають вигляд

$$A=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 3/2 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & \frac{2n+1}{2}\end{pmatrix},\ B=(b_{ij})_{m,n},\ \text{де}\ b_{ij}=\int_{-1}^{1}T_{2i+1}(x)T_{2m+1}(x)dx\,. \qquad (10)$$

Матриця A є діагональною і заповнюється тривіально. Кожен елемент матриці B є інтегралом від добутку двох поліномів Чебишева першого роду. Матриці A і B є додатньо визначені та симетричними. Ці властивості є дуже важливими при розв'язуванні задачі (9). Варто відзначити, що матриця B не є одиничною і задача (9) не може бути зведена до стандартної. На даний час не існує теоретично доведених алгоритмів для прямого розв'язку узагальненої задачі на власні значення.

Для пошуку власних значень і відповідних власних векторів із (9) у даний час використовуються наближені методи обчислень. До них належать розклад Холецького та QZ-QW методи факторизації матриць [11,12]. Необхідною умовою використання методу Холецького є симетричність і додатня визначеність матриць (10). Для методів групи QZ-QW–факторизації особливістю є те, що вони підходять і для несиметричних матриць, які можуть мати від'ємні власні значення.

Для програмної реалізації описаного вище методу було використано систему Matlab R2013a. В даній системі проаналізовано та підібрано спеціалізовані функції LAPACK для розв'язування основних задач алгебри, зокрема узагальненої задачі на власні значення, систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Системною функцією для реалізації узагальненої задачі на власні значення є функція *EIG*. Дана функція має синтаксис *[V,D]=EIG(A,B)*, де матриці *A,B* – відповідні матриці (9); *D* – діагональна матриця із власними значеннями; *V* – матриця власних векторів, у якій кожен стовпець є окремим власним вектором, відповідний його власному значенню. Особливістю системи Matlab R2013a є суміщення числових та аналітичних обчислень. Тобто ми маємо можливість звернення до змінної як аналітичної й використання спеціалізованих функцій до неї, а також опрацювання результатів за допомогою програмних числових методів. Також важливою особливістю використання функції *EIG* є спосіб розкладу вхідних матриць. Ця функція дозволяє використати відомий метод Холецького або сучасний прогресивний метод QZ-факторизації. За замовчуванням програма використовує метод QZ-факторизації.

На основі отриманих вхідних даних знайдено власні вектори та значення за описаним методом розкладу Холецького. Для достовірності отриманих результатів

задачу на власні значення (9) було розв'язано методом *QZ*-факторизації. Важливо відзначити, що власні значення α_{2k} за обома методами співпадають, але власні вектори a_m^k однакові з точністю до постійного множника. Розв'язок системи (6) не залежить від форми штампа.

При побудові ряду контактного тиску за формулою (4), важливим чинником є кількість членів ряду, тобто скільки власних значень взято для обчислень. В табл.1 наведено власні значення при $n = 7, 11, 17$ для узагальненої проблеми (7), де n – кількість членів ряду (4).

Таблиця 1

Послідовності власних значень для матриць із (8) при їх розмірності *n=7,11,17*

n=7	0.63	1.63	2.62	3.63	4.84	7.48	23.22				
n=11	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.68	8.11	10.88	17.45	55.49
n=17	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.63	7.63	8.63	9.63	10.72
	12.16	14.38	18	24.8	40.44	129.98					

В ході числового експерименту було виявлено, що для побудови ряду (4) при $f(x) = -\dfrac{x^2}{2R}$ (штамп параболічної форми), де R – радіус кривизни в точці x=0, достатньо одинадцяти власних векторів. При малих областях контакту така кількість векторів є достатньою для гіперболічної, циліндричної, еліптичної форм штампів. У разі штампа циліндричної форми при $a / R > 0.8$ кількість власних значень має бути не менше сімнадцяти, тобто $n \geq 17$.

Для однозначного визначення a_m^k $\varphi_{2k}(x)$ запишемо у вигляді

$$\varphi_{2k}(x) = d_k \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x) \tag{11}$$

і, підставивши у рівняння (5), отримуємо співвідношення

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \sum_{m=0}^{n} a_m^k (-\pi) T_{2m+1}(x) = -\frac{df(x)}{dx}. \tag{12}$$

Домножуючи кожен член (8) на $T_{2i+1}(x)/\sqrt{1-x^2}$ при $i = \overline{1,n}$ та інтегруючи від -1 до 1, отримаємо неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$CX = b, \tag{13}$$

де

$$C = \frac{-\pi^2}{2} \begin{vmatrix} a_0^0 & a_0^1 & \dots & a_0^n \\ a_1^0 & a_1^1 & \dots & a_1^n \\ . & . & . & . \\ a_n^0 & a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{vmatrix}; \tag{14}$$

b – стовпчик вільних членів, елементи якого задаються за формулою

$$b=\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix},\ b_i=\int_{-1}^{1} -f_k^{'}(x)T_{2i+1}(x)/\sqrt{1-x^2}\,dx \text{, при } i=\overline{1,n},\ k=1,2,3,4. \qquad (15)$$

Для визначеності запишемо вигляд $f_k(x)$ для всіх штампів:

– параболічної форми $f_1(x)=-\dfrac{x^2}{2R}$, де R радіус кривизни в точці $x=0$;

– циліндричної форми $f_2(x)=-R+\sqrt{R^2-x^2}$, де R – радіус циліндра;

– еліптичної форми $f_3(x)=-b_1+\dfrac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1{}^2-x^2}$, де a_1, b_1 – велика та мала півосі еліпса, для розрахунків $a_1=R, b_1=R(1\pm\varepsilon)$;

– гіперболічної форми $f_4(x)=b_1-\dfrac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1{}^2+x^2}$, де a_1, b_1 – величини дійсної та уявної півосей гіперболи, для розрахунків $a_1=R, b_1=R(1\pm\varepsilon)$.

Для штампа параболічної форми елементи стовпчика вільних членів (15) можна знайти аналітично без додаткових замін. Для інших штампів канонічної форми, щоб знайти елементи (15), потрібно провести заміну $x=\cos(\varphi)$ та провівши певні математичні перетворення (15) інтеграл матиме вигляд для всіх штампів

$$b_i=-\frac{2a}{R}\frac{1}{(1\pm\varepsilon)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2i+1)\varphi)\cos(\varphi)}{\sqrt{1\pm\dfrac{a}{R}\cos^2(\varphi)}}\,d\varphi \text{, при } i=\overline{1,n}. \qquad (16)$$

Знак «+» у знаменнику відповідає штампу гіперболічної форми, знак «-» – відповідає штампу еліптичної форми, а знак «-» та $\varepsilon=0$ – штампу циліндричної форми.

Розв'язавши систему (13) із використанням вбудованої функції *mldivide(C,b)*, яка використовує LU- декомпозицію, що є різновидом методу Гаусса, було отримано коефіцієнти d_k. Маючи власні значення, власні вектори та сталі множники d_k (11), підставляємо їх у (4) для побудови графіків контактного тиску й визначення інших необхідних даних (об'єму зношеного матеріалу, часу роботи пари до заданої величини зношування чи побудови графіків компонент напружень) [3].

Числові результати й аналіз особливостей контактного тиску. При графічному відображенні результатів контактного тиску було враховано зміну області контакту $a(t)$ Тобто, щоб відобразити на одному графіку контактний тиск у різні моменти часу було розроблено алгоритм зведення отриманих числових даних до однієї системи координат із урахуванням пропорційності відношення поточної області контакту в момент часу t_i ($i=1,2,3,\dots$) до початкової в момент часу $t_0=0$ (задача без зношування).

Алгоритм знаходження області контакту в довільний момент часу такий: у момент часу $t_0=0$ задача розв'язана іншим способом [13] (для сили P знайдено a_0); у наступний момент часу $t=t_i$ приймаємо, що $a(t_i)=a_i$, проводимо всю процедуру знаходження контактного тиску (4) за схемою, описаною вище, підставляємо

контактний тиск в умову рівноваги (3) і порівнюємо знайдену силу P_i з P, при $P_i > P$ зменшуємо a_i і навпаки. Цей процес повторюємо для кожного наступного $t_{i+1} > t_i$.

Варто відзначити, що при малих областях контакту (рис.2) контактний тиск для всіх штампів практично співпадає з контактним тиском для штампа параболічної форми. Наприклад, для штампа гіперболічної форми при заданій силі $P = 0.0502$ та відповідній їй області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.1$, $\varepsilon = -0.1$ у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$ було знайдено області контакту $\frac{a_1}{R} = 0.1118$, $\frac{a_2}{R} = 0.112$, $\frac{a_3}{R} = 0.1322$.

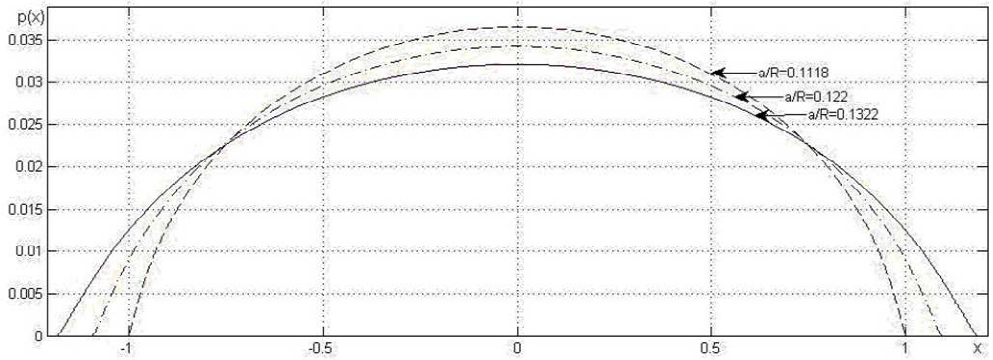


Рисунок 2. Контактний тиск для штампа гіперболічної форми в моменти часу t_i при змінній області $\frac{a_i}{R}$, при $i = 1,2,3$ для малих областей контакту

Figure 2. The contact pressure for hyperbolic form stamp at the moment of time t_i when the variable area $\frac{a_i}{R}$, $i = 1,2,3$ for small areas of contact

Для побудови графіків контактних тисків за формулою (4) ключовим чинником є кількість членів ряду (кількість власних значень), які треба взяти для обчислень, щоб залишковим членом ряду можна було знехтувати. На рис.3 наведено графіки контактного тиску для штампа еліптичної форми при заданій силі $P = 0.6033$, $\frac{a_0}{R} = 0.9$, $\varepsilon = 0.3$ у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$ та знайдено змінні області контакту $\frac{a_1}{R} = 0.9423$, $\frac{a_2}{R} = 0.96818$, $\frac{a_3}{R} = 0.98581$.

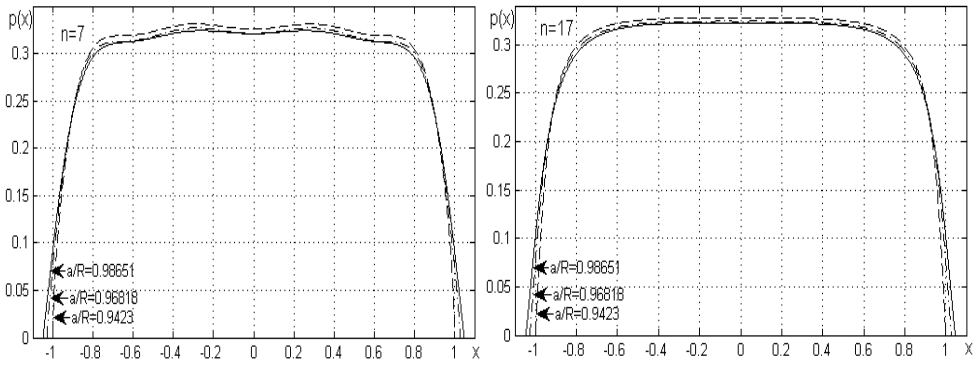
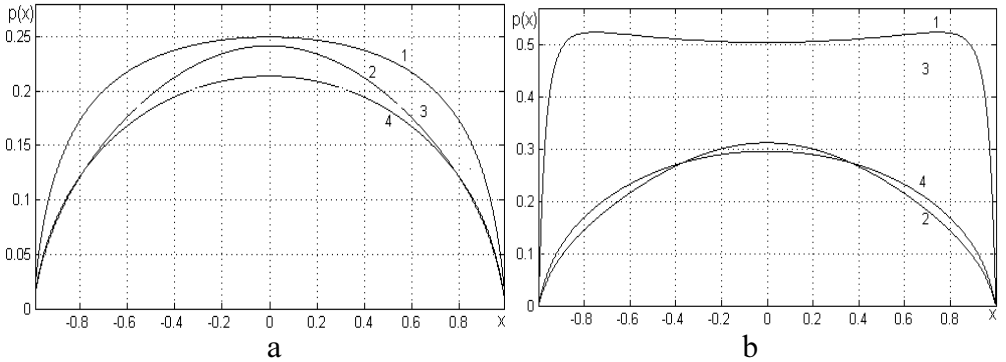


Рисунок 3. Контактний тиск для штампа еліптичної форми в моменти часу t_i при змінній області $\frac{a_i}{R}$, при $i = 1,2,3$ для різної кількості власних значень

Figure 3. The contact pressure for elliptical form stamp at the moment of time t_i when the variable area $\frac{a_i}{R}$, $i = 1,2,3$ for different number of eigenvalues

Важливим моментом, який впливає на процес контактної взаємодії, є початкова область контакту. Варто відзначити, що при області контакту $a/R = 0.7$ контактний тиск для всіх штампів є максимальним посередині області контакту. При збільшенні області контакту, зокрема вже при $a/R = 0.95$, контактний тиск починає зростати у порівнянні з нескінченними штампами, що показує рис.4.



a b

Рисунок 4. Контактний тиск для всіх штампів канонічної форми при $t = 0.05$: *(a)* $a/R = 0.7$, *(b)* $a/R = 0.97$; (1 – циліндрична форма, 2 – гіперболічна форма, 3 – еліптична форма, 4 – параболічна форма штампів, для гіперболічної форми штампа $\varepsilon = -0.2$, для еліптичної – $\varepsilon = 0.2$)

Figure 4. The contact pressure for all canonical form stamps $t = 0.05$: *(a)* $a/R = 0.7$, *(b)* $a/R = 0.97$; (1 – cylindrical form, 2 – hyperbolic form, 3 – elliptical form, 4 – parabolic form of stamps, for hyperbolic form of stamp $\varepsilon = -0.2$, for elliptical – $\varepsilon = 0.2$)

На рис.5 наведено графік величини зношування для штампа циліндричної форми при заданій силі $P = 0.7844$, $\frac{a_0}{R} = 0.9$ у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$ та відповідні (пораховані) області контакту $\frac{a_1}{R} = 0.94234$, $\frac{a_2}{R} = 0.96821$, $\frac{a_3}{R} = 0.98584$.

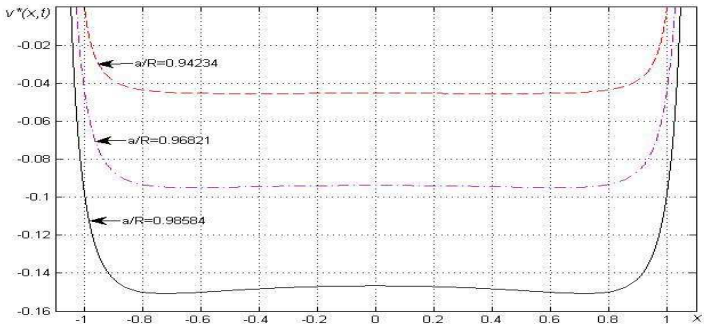


Рисунок 5. Величина зношування для штампа циліндричної форми в моменти часу t_i при змінній області

$$\frac{a_i}{R}, \text{ при } i = 1,2,3$$

Figure 5. Size of wastage for cylindrical form stamp at the moment of time when the variable area is

$$\frac{a_i}{R},\ i = 1,2,3$$

На рис.6 наведено графік величини зношування для штампа циліндричної форми при заданій силі $P = 1.0654$, $\frac{a_0}{R} = 0.96$ у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.1$, $t_3 = 0.15$ та відповідні області контакту $\frac{a_1}{R} = 0.978705$, $\frac{a_2}{R} = 0.989245$, $\frac{a_3}{R} = 0.9959895$.

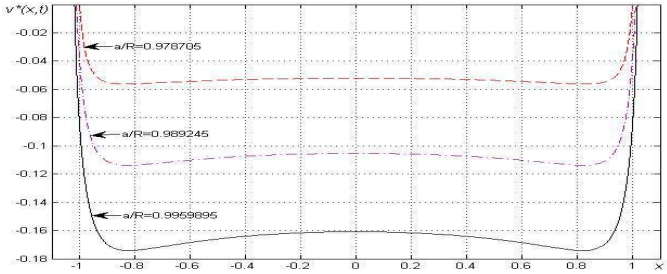


Рисунок 6. Величина зношування для штампа циліндричної форми в моменти часу t_i при змінній області

$$\frac{a_i}{R}, \text{ при } i = 1,2,3.$$

Figure 6. Size of wastage for cylindrical form stamp at the moment of time when the variable area is $\frac{a_i}{R}$,

$$i = 1,2,3$$

Висновки. Розглянута контактну задачу про взаємодію жорсткого штампа з пружною півплощиною зі зношуванням матеріалу. Побудовано математичну модель проблеми і для її реалізації обрано лінійну модель зношування. На основі вибраної моделі розвинено метод розв'язку з використанням поліномів Чебишева. Для запропонованого методу описано методику пошуку розв'язку інтегрального рівняння для контактного тиску із переходом до узагальненої задачі на власні значення. Важливо візначити що представлений розв'язок підходить для всіх форм канонічних штампів (циліндричної, гіперболічної, еліптичної), що є важливим фактором у подальших дослідженнях описаної проблеми, зокрема при аналізі напружено-деформівного стану в середині області контактуючих тіл.

Запропоновано способи зведення задач контактної взаємодії штампів гіперболічної та еліптичної форм до штампа циліндричної форми із можливістю зміни вхідних параметрів. Розв'язана задача дозволяє визначити контактний тиск у будь-який момент часу і тим самим визначити параметри зношування в кожній точці області контакту. Для представлення результатів побудовано графіки контактних тисків для всіх штампів при різних областях контакту в різні часові моменти й виявлено особливі ефекти взаємодії тіл, а також критичні точки взаємодії та умови, які призводять до такого зношування.

Conslusions. In this paper the contact problem of interaction of stiff punch with elastic half-plane with deterioration of the material was considered. A mathematical model of the problem was constructed and for it implementation chosen linear model of wastage. Based on the chosen model was developed solution method using the Chebyshev polynomials. The proposed method described method of searching for the solution of the integral equation for contact pressure with the transition to a generalized eigenvalue problem. It is important to note that the presented solution is suitable for all forms of canonical stamps (cylindrical, hyperbolic, elliptic), which is an important factor in further studies of described problem, in particular, the analysis of the stress-strain state in the middle arae of the contacting corpuses.

Ways of reducing the problem of contact interaction stamps of hyperbolic and elliptical form to a cylindrical form stamp with the ability to change input parameters were offered. The problem can determine the contact pressure at any point of time and thus determine the parameters of wastage at each point of the contact area. In order to present the results Schedules of contact pressures for all stamps in various areas of contact in different time points are constructed and found the special effects of interaction of corpuses and the critical points of interaction and the conditions that lead to such wastage.

Список використаної літератури

1. Горячева, И. Г. Механика фрикционного взаимодействия [Текст] / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
2. Кузьменко, А. Г. Развитие методов трибомеханики [Текст] / А. Г. Кузьменко. – Хмельницкий: ХНУ, 2010. –270 с.
3. Пелех, Б. Л. Контактные задачи для слоистых елементов конструкций и тел с покрытиями [Текст] / Б. Л. Пелех, А. В. Максимук, И. М. Коровайчук. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
4. Максимук, О. В. Контактна задача про зношування пружного тіла з тонким покриттям [Текст] / О. В. Максимук // Вісник Львівського ун-ту: серія мех. -мат. – 2000. – №57. – С. 88–92.
5. Yue-Ting, Z. Explicit solution of the frictional contact problem of anisotropic materials indented by a moving stamp with a triangular or parabolic profile [Text] / Z. Yue-Ting, Y. L. Kang, H. J. Yong // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2013. – Vol. 64. – P. 831–861.
6. Артемчук, В. В. Побудова математичної моделі зносу з уточненими параметрами [Текст] / В. В. Артемчук // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2011. – №4. – С. 121–131.
7. Денисенко, М. І. Моделювання процесів абразивного зношування на основі теорії універсального явища структурного пристосування матеріалів [Текст] / М. І. Денисенко // Проблеми тертя та зношування: наук. -техн. зб. – 2010. – №. 53. – С. 26–33.
8. Popov, V. Contact Mechanics and Friction Physical Principles and Applications [Text] / V. Popov. – Springer Heidelberg Dordrecht London New York. – 2010. – 359 с.
9. Закалов, О. В. Основи тертя і зношування в машинах: навчальний посібник [Текст] / О. В. Закалов, І. О. Закалов. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. І. Пулюя, 2011. – 322 с.
10. Waleed S. Abdalla1, Soliman S. Ali-Eldin and Mohamed R. Ghazy The Influence of the Elastoplastic Behavior and the Load Pattern on the Tribological Properties of TWO-Dimensional Frictional Contact Problems [Text] // Journal of Tribology, 2014. – Vol. 136. – 10 P.
11. Голуб, Д. Матричные вычисления: пер. с англ. [Текст] / Д. Голуб, Ч. Лоун. – М. : Мир. – 1999. – 548 с.
12. Golpar-Raboky, E. WZ-factorization via Abaffy-Broyden-Spedicato algorithms [Text] / E. Golpar-Raboky // Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2014. – Vol. 40. – P. 399–411.
13. Максимук, О. В. Контактна взаємодія штампів канонічної форми з пружним півпростором із урахуванням зношування матеріалу [Текст] / О. В. Максимук, Ю. В. Сачук // Математичні проблеми

механіки неоднорідних структур; за заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра, 2014. – С. 281–283.

Отримано 08.04.2015