

УДК 620.178, 620.179

Є. Синенко

*Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України*

## **ВИЗНАЧЕННЯ ВІБРОДІАГНОСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ НАЯВНОСТІ «ДИХАЮЧОЇ» ТРІЩИНИ В СТРИЖНЕВИХ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТАХ РІЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ**

**Резюме.** Запропоновано методіку розрахунку вібродіагностичних параметрів наявності «дихаючої» тріщини в стрижневих конструктивних елементах різного поперечного перерізу з використанням їх скінченноелементних моделей. Як вібродіагностичний параметр наявності тріщини розглядається відношення амплітуд домінуючих гармонік при супер- та субгармонічному резонансах. Представлені результати виконаних чисельних розрахунків зі встановлення впливу місця прикладання змушувальної сили по довжині стрижнів прямокутного та круглого поперечного перерізів на його величину. Показано, що за допомогою отриманих залежностей можна визначити місце знаходження тріщини.

**Ключові слова:** стрижень, змушувальна сила, «дихаюча» тріщина, вібродіагностичний параметр, супер- та субрезонанс.

E. Synenko

## **DETERMINATION OF VIBRODIAGNOSTIC PARAMETERS OF THE BREATHING CRACK PRESENCE IN THE BEAM STRUCTURAL ELEMENTS OF DIFFERENT CROSS SECTIONS**

**Summary.** This paper is concerned with the determination of the regularities in the influence of a “breathing” crack on the vibration characteristics of beam structural elements with a different cross-sectional shape. The forced vibrations of damaged cantilever beams of rectangular and circular cross sections at super- and subharmonic resonances are considered. The calculations were performed by varying the point of application of the harmonic exciting force along the length of the beams. To make the calculations, the finite element models of the beams are used in which the “breathing” crack is represented as a mathematical cut, and the mutual “non-closure” of the crack faces was provided by solving the contact problem. The ratios of the amplitudes of the dominant harmonics of displacements – for the finding of which the Newmark method, allowing the obtainment of the time dependence of the free beam end, and the FFT-analysis, resulting in the obtainment of the amplitudes of the displacement harmonics, were used – were regarded as a vibration-diagnostic parameter of the presence of a crack. Based on the results of the performed calculations, the dependences of the maximum amplitudes of the displacement harmonics at super- and subharmonic resonances on the point of application of the exciting force were determined. It is shown in the paper that the degree of nonlinearity of the vibrating process is strongly dependent on the point of application of the exciting force. As is stated by the author, that the shape of the cross-section does not practically influence the regularities in the variation of the ratio of the dominant harmonic amplitudes with the point of application of the exciting force, and the behavior of the dependence is defined by the resonance mode.

**Key words:** beam, driving force, breathing crack, vibrodiagnostic parameter, super- and subresonance.

**Постановка проблеми та аналіз існуючих досліджень.** Розв’язання більшості задач із динаміки машин чисельними методами, зокрема і з використанням методу скінченних елементів, є дуже складним і трудомістким процесом, оскільки моделювання реальних деталей з подальшим проведенням обчислювальних експериментів потребує значних комп’ютерних ресурсів. Щоб уникнути цього, в міру

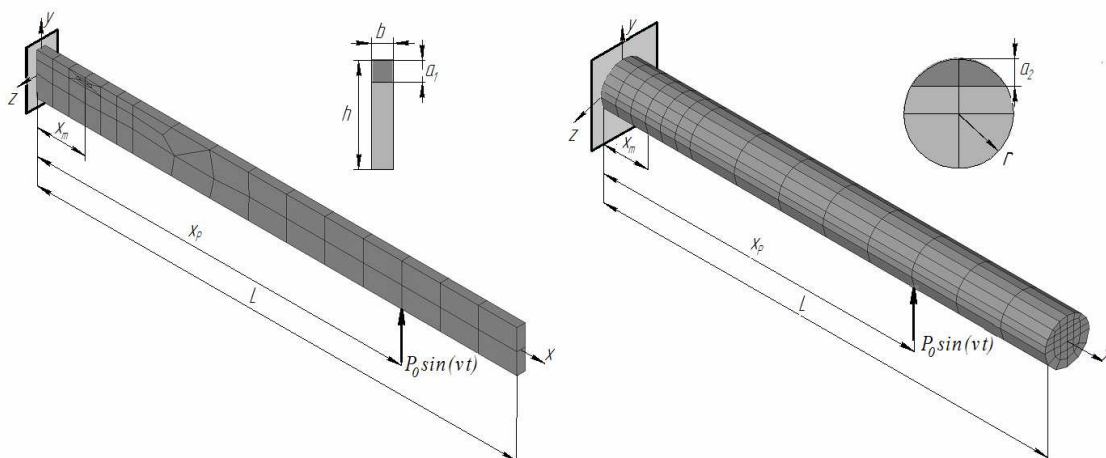
можливості спрощуються розрахункові моделі реальних конструкцій до простіших (стрижнів, пластин), намагаючись при цьому отримати достовірне рішення.

У більшості випадків деталі машин, зокрема і стрижневі конструктивні елементи, експлуатуються в широкому спектрі динамічних навантажень у складних умовах навколишнього середовища, які часто призводять до виникнення тріщин втоми. Своєчасна діагностика дозволяє виявити такі пошкодження й оцінити їх розміри, й тим самим забезпечити надійну експлуатацію машин.

Огляд існуючих робіт показує, що проблема розроблення ефективних та водночас недорогих вібраційних методів діагностики пошкоджень є актуальною і викликає інтерес у дослідників. При цьому слід зазначити, що перші роботи [1-3] були присвячені впливу дефектів типу забоїни чи відкритої тріщини на модальні характеристики конструктивного елементу, зміна яких проявляється лише при пошкодженнях, що складають понад 20% висоти його поперечного перерізу. В останнє ж десятиліття основна увага приділяється розробленню методів діагностики на основі виникнення нелінійних режимів коливань, які є чутливішими й потребують розрахункових моделей з повноцінною «дихаючою» тріщиною [4-6].

Як свідчать результати проведеного аналізу публікацій у напрямку вивчення закономірностей впливу «дихаючої» тріщини на характеристики коливань конструктивних елементів, недостатньо вивченими є питання впливу форми їх поперечного перерізу, що і є **метою даної роботи**.

**Об'єкти дослідження та їх моделювання.** Об'єктами дослідження було обрано консольні стрижні круглого та прямокутного поперечного перерізу довжиною  $L$ , яка дорівнює 230 мм, з місцем знаходження «дихаючої» тріщини нормального відриву глибиною  $a$  на відстані  $x_m = 0,1L$  від защемлення (рис.1). Змущувальна гармонічна сила  $P(t) = P_0 \sin vt$  прикладалася на відстані  $x_p$  від защемлення, де  $P_0$  і  $v$  – амплітуда та частота сили відповідно. Механічні характеристики матеріалу зразків такі: модуль пружності  $E = 200 \text{ ГПа}$ , густина  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ , а логарифмічний декремент коливань  $\delta = 0,01$ . Вибір таких об'єктів дослідження пояснюється, по-перше, тим, що стрижні є спрощеною моделлю багатьох конструктивних елементів, у тому числі лопаток, і дозволяють дослідити чисті згинні коливання. По-друге, модель стрижня прямокутного поперечного перерізу була апробована в роботі [7], що зумовлює можливість визначити достовірність методології проведення обчислювальних експериментів і провести співставлення отриманих та відомих результатів розрахунків.



**Рисунок 1.** Загальний вигляд консольних стрижнів прямокутного (а) та круглого поперечного перерізів (б) з нанесеною скінченноелементною сіткою

**Figure 1.** Overall view of cantilever beams of rectangular (a) and circular (b) cross sections with a finite element mesh

Будемо позначати характеристики вибраних стрижнів нижніми індексами  $i = 1, 2$ , де 1 відповідає стрижню прямокутного, а 2 – круглого поперечного перерізу.

Для досягнення мети роботи геометричні параметри досліджуваних стрижнів обиралися таким чином, щоб виконувалась рівність

$$f_{01} = f_{02}, \tag{1}$$

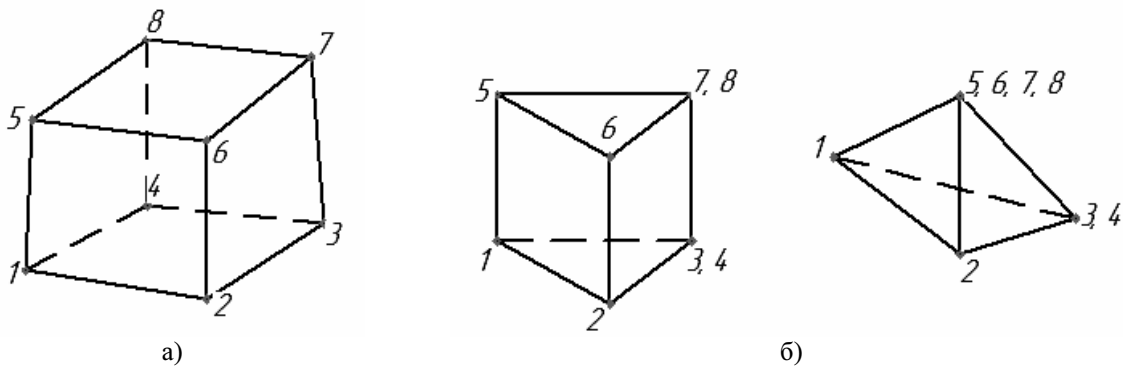
де  $f_0$  – частота основної згинної форми коливань, яка визначається формулою [8]

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \cdot \left(\frac{1.875}{L}\right)^2. \tag{2}$$

Тут  $I$  – момент інерції згину;  $F$  – площа поперечного перерізу.

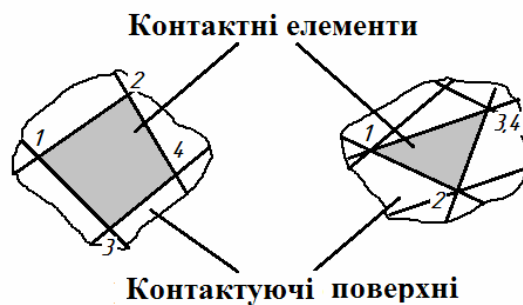
Рівність (1) виконується при умові, що  $\frac{I_1}{F_1} = \frac{I_2}{F_2}$ . Для цього були вибрані такі розміри поперечних перерізів:  $b \times h = 4 \times 20 \text{ мм}$ ;  $r = 11,5 \text{ і}$ .

Скінченноелементні моделі стрижнів з «дихаючою» тріщиною створювалися з використанням лінійного 8-вузлового елемента Solid45 та його модифікацій (рис.2). Область навколо тріщини характеризується згущенням скінченноелементної сітки. Тріщина моделювалась як математичний розріз, а взаємне непроникнення берегів при її відкритті-закритті забезпечується розв'язанням контактної задачі, для чого використовувались контактні елементи Conta174 (рис.3).



**Рисунок 2.** Лінійний 8-ми вузловий скінченний елемент (а) та його модифікації(б)

**Figure 2.** Linear 8-nodes finite element (a) and its modifications (b)



**Рисунок 3.** Контактні елементи

Figure 3. Contact elements

**Алгоритм розв'язання задачі.** Вимушені коливання стрижня з тріщиною під дією сили  $P(t)$  описуються нелінійним диференціальним рівнянням

$$[M]\{\ddot{u}\} + [D]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\}, \quad (3)$$

де  $[M]$  і  $[D]$  – інерційна та дисипативна матриці системи відповідно;  $[K]$  – матриця жорсткості, що змінюється в часі залежно від контактної взаємодії берегів тріщини та визначає нелінійність системи, що розглядається;  $\{u\}$ ,  $\{\dot{u}\}$ ,  $\{\ddot{u}\}$  – вектор-стовпчик переміщення, швидкості й прискорення відповідно;  $\{P(t)\}$  – вектор-стовпчик зовнішнього гармонічного навантаження.

Розв'язання рівняння (3) здійснювалося за допомогою методу Ньюмарка

$$\begin{cases} \{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + [(1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}]\Delta t; \\ \{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t + \beta\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\beta$  і  $\gamma$  – параметри інтегрування Ньюмарка, які визначають точність і стійкість інтегрування.

Суть методу полягає в тому, що загальний час  $T$  вимушених коливань стрижня від початку їх збудження до виходу на усталений режим, при початкових умовах  $\{u\}_0 = 0$ ,  $\{\dot{u}\}_0 = 0$ ,  $\{\ddot{u}\}_0 = 0$ , розбивається на  $N$  кроків з кроком по часу  $\Delta t = T/N$ . При цьому, за результатами проведених розрахунків було встановлено, що величина  $\Delta t$  впливає на їх точність, а задовільна точність досягається при кількості знайдених розв'язків  $u$  для одного періоду коливань понад 180. Далі, з урахуванням на кожному кроці рішення для попереднього значення часу, знаходилися наближені значення  $u$  для кожного моменту часу  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ , що дозволяло отримати залежність переміщення від часу  $u(t)$ .

Суттєвою особливістю нелінійної системи стрижня з «дихаючою» тріщиною є можливість виникнення нелінійних резонансів та наявність у переміщенні при гармонічному збудженні вищих гармонік. Для визначення амплітуд переміщень  $A_k$ , де  $k$  – номер гармоніки, використовувалась процедура швидкого перетворення Фур'є (FFT) отриманих залежностей переміщення вільного кінця консольного стрижня  $u(t)$ . Проведення FFT аналізу можливе при виконанні умови, що масив опрацьовуваних даних кратний  $2^n$ , де  $n$  – ціле число для трьох і більше періодів функції, що досліджується. В роботі це досягалось шляхом інтерполяції трьох періодів залежності  $u(t)$ , що відповідають встановленому режиму вимушених коливань стрижня, та їх представленні у вигляді 8192 точок.

**Результати досліджень.** У відповідності з метою роботи було проведено комплекс чисельних розрахунків з визначення впливу форми поперечного перерізу стрижня на вібродіагностичні параметри наявності «дихаючої» тріщини. В якості вібродіагностичного параметру наявності тріщини, як і в роботі [7], було обрано відношення амплітуд домінуючих гармонік, а саме другої (резонуючої) і першої ( $\bar{A}_{2/1} = A_2/A_1$ ) при супергармонічному ( $\nu = 0,5f_0$ ) та першої (резонуючої) і другої гармонік ( $\bar{A}_{1/2} = A_1/A_2$ ) при субгармонічному ( $\nu = 2f_0$ ) резонансах. Розрахунки

проводились при варіюванні точки прикладання  $x_p$  по довжині стрижнів гармонічної змушувальної сили.

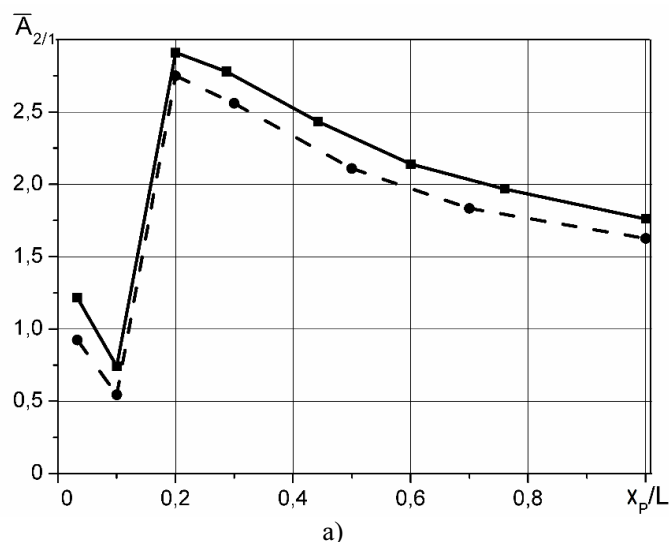
Для забезпечення співставлення результатів досліджень передбачалося, що площі поперечних перерізів, зумовлених тріщиною, співпадають. Це можливо при  $a_1 = 4\text{мм}$ , а  $a_2 = 5,84\text{мм}$ .

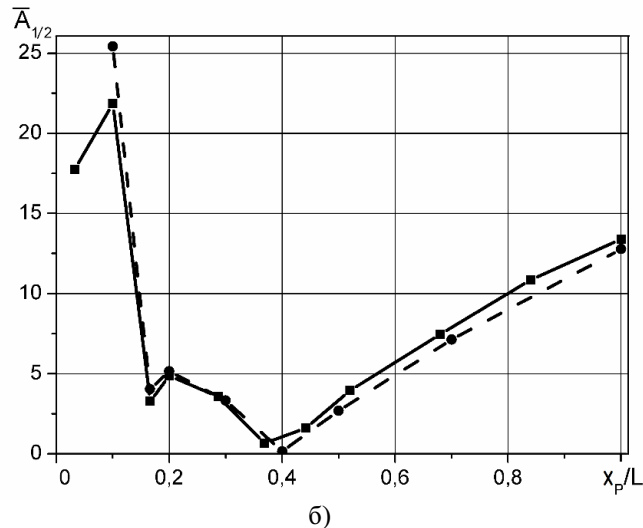
На основі даних виконаних чисельних розрахунків були визначені залежності амплітуд  $\bar{A}_{2/1}$  та  $\bar{A}_{1/2}$  домінуючих гармонік від місця прикладання змушувальної сили  $x_p$ , які наведені на рис. 4. Аналіз представлених даних свідчить про наступне.

По-перше, ступінь нелінійності коливного процесу суттєво залежить від точки прикладання змушувальної сили.

По-друге, форма поперечного перерізу практично не впливає на закономірності зміни відношення амплітуд домінуючих гармонік переміщень від точки прикладання змушувальної сили.

По-третє, характер залежності відношення амплітуд домінуючих гармонік переміщень від точки прикладання змушувальної сили суттєво залежить від виду резонансу. Якщо при супергармонічному резонансі при  $x_p \cong 0.1L$  спостерігається локальний мінімум  $\bar{A}_{2/1}$ , а при  $x_p \approx 0.2L$  – його локальний максимум, то у випадку субгармонічного резонансу має місце зворотне явище. Подальше зміщення точки прикладання змушувальної сили від вільного кінця стрижня зумовлює при супергармонічному резонансі монотонне спадання величини  $\bar{A}_{2/1}$ , а при субгармонічному резонансі, навпаки, в цілому має місце зростання  $\bar{A}_{1/2}$ . Однак існують точки прикладання сили, коли нелінійність коливального процесу не проявляється, а стрижень поводить себе як суцільний. Таке явище детально описано в роботі [9] для стрижня прямокутного поперечного перерізу. Наочно такий випадок зображений на рис. 4б, коли при прикладанні сили в точці  $x_p/L = 0,4$  резонуюча гармоніка  $A_1$  не проявляється, а відношення  $\bar{A}_{1/2} = 0$ .





**Рисунок 4.** Залежність максимальних амплітуд гармонік переміщень при супер- (а) і субгармонічному (б) резонансах від місця прикладання змушувальної сили для стрижнів прямокутного (суцільні лінії) та круглого (штрихові лінії) поперечних перерізів

**Figure 4.** Dependence of the maximum amplitudes of harmonics of displacements at super- (a) and subharmonic (b) resonances from the driving force application point for beams with rectangular (solid lines) and circular (dashed lines) cross sections

**Висновки.** В результаті чисельного дослідження з використанням розроблених скінченноелементних моделей стрижнів різного поперечного перерізу з «дихаючими» тріщинами були отримані закономірності впливу місця прикладання змушувальної гармонічної сили по довжині стрижня на відношення амплітуд домінуючих гармонік переміщення при супер- та субгармонічному резонансі.

Встановлено, що закономірності зміни відношення амплітуд домінуючих гармонік переміщення від точки прикладання змушувальної гармонічної сили не залежать від форми поперечного перерізу стрижня і визначаються лише типом резонансу.

Таким чином, запропонована методика визначення вібродіагностичного параметру наявності «дихаючої» тріщини може бути використана для стрижневих конструктивних елементів різної форми поперечного перерізу.

**Conclusions.** The mechanisms of the influence of the harmonic driving force application point along the beam length on the correlations between the amplitudes of dominant harmonics of displacement at super- and subharmonic resonance were obtained as a result of numerical investigation with the use of the developed finite element models of beams of different cross sections with “breathing cracks”.

It is found that the mechanisms of variation in the correlation between the amplitudes of dominant harmonics of displacement from the harmonic driving force application point do not depend on the shape of beam cross section and are defined only by the resonance type.

Thus, the proposed procedure for determination of the vibrodiagnostic parameter of the presence of a breathing crack can be used for beam structural elements with different shapes of cross section.

#### Список використаної літератури

1. Krawczuk, M. Transverse Natural Vibrations of a Cracked Beam Loaded with a Constant Axial Force / M. Krawczuk, W.M. Ostachowicz // J. of Vibration and Acoustics. – 1993. – 115, No. 4. – P. 524 – 528.
2. Chondros, T.G. A continuous cracked beam vibration theory / T.G. Chondros, A.D. Diamarogonas, J. Yao // J. Sound and Vibr. – 1998. – 215, No. 1. – P. 17 – 34.
3. Kim, J.T. Crack detection in beam-type structures using frequency data / J.T. Kim, N. Stubbs // J. Sound and Vibr. – 2003. – 259, No. 1. – P. 145 – 160.

4. Andraeus, U. Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation // U. Andraeus, P. Casini, F. Vestroni / Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 2007. – 42, No. 3. – P. 566 – 575.
5. Georgantzinos, S.K. An insight into the breathing mechanism of a crack in a rotating shaft / S.K. Georgantzinos, N.K. Anifantis // J. Sound and Vibr. – 2008. – 318, No. 1 – 2. – P. 279 – 295.
6. Giannopoulos, G.I. Coupled vibration response of a shaft with a breathing crack / G.I. Giannopoulos, S.K. Georgantzinos, N.K. Anifantis // J. Sound and Vibr. – 2015. – 336, No. 3. – P. 191 – 206.
7. Зиньковский, А.П. Конечноэлементное моделирование изгибных колебаний стержня с «дышащей» трещиной усталости [Текст] / А.П. Зиньковский, В.А. Круц, Е.А. Синенко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 2 (74). – С. 23 – 28.
8. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле [Текст] / Тимошенко С.П., Янг Д.Х., У. Уивер; пер. с англ. Л.Г. Корнейчука. – Москва: Машиностроение, 1985. – 472 с.
9. Матвеев, В.В. Приближенные методы и результаты определения вибродиагностических параметров наличия трещины в стержневых элементах при супер- и субгармоническом резонансах [Текст] / В.В. Матвеев, О.Е. Богинич, А.П. Яковлев // Прочность материалов и элементов конструкций: Тр. Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 100-летию со дня рождения академика НАН Украины Г.С. Писаренко. – Киев, 2011. – С. 59 – 77.

*Отримано 23.07.2015*