



# Агроекологія, радіологія, меліорація

УДК 631.675

© 2021

## ДВОВИМІРНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВОДНОГО РЕЖИМУ ҐРУНТУ ЗА КРАПЛИННОГО ЗРОШЕННЯ

М.І. Ромащенко<sup>1</sup>, В.О. Богаєнко<sup>2</sup>, А.С. Білоброва<sup>3</sup>

<sup>1</sup>доктор технічних наук

<sup>2</sup>кандидат технічних наук

<sup>1,3</sup>Інститут водних проблем і меліорації НААН

вул. Васильківська, 37, м. Київ, 03022, Україна

<sup>2</sup>Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН

просп. Академіка Глушкова, 40, м. Київ, 03187, Україна

e-mail: <sup>1</sup>mi.romashchenko@gmail.com, <sup>2</sup>sevab@ukr.net, <sup>3</sup>anastasiabilobrova1993@gmail.com

ORCID: <sup>1</sup>0000-0002-9997-1346, <sup>2</sup>0000-0002-3317-9022, <sup>3</sup>0000-0002-0540-9492

Надійшла 30.12.2020

**Мета.** Розробка методики прогнозування динаміки вологості ґрунту за краплинного зрошення на основі математичного моделювання згідно з рівнянням Річардса у термінах напорів у двовимірній постановці. **Методи.** Результати роботи отримано методом математичного моделювання та перевірено експериментально. Для дискретизації рівняння Річардса використовувалася локально-одновимірна скінченно-різницева схема. Системи лінійних рівнянь, що отримувалися після дискретизації, розв'язувалися методом прогонки. Для визначення гідрофізичних функцій ґрунту та його констант застосовувався комплекс лабораторних досліджень. Вимірювання всмоктуючого тиску в ґрунті проводилося з використанням датчиків Watermark. **Результати.** До математичної моделі пропонується додання двох емпіричних коефіцієнтів, а також параметра розподілу евапотранспірації на евапораційний та транспіраційний компоненти. Їх підбір мінімізує вплив похибок оцінки евапотранспірації та визначення її моделювання водонадходження на загальну точність прогнозування. Підбір цих коефіцієнтів пропонується проводити метаевристичним методом рою частинок на основі вимірювань у межах одного циклу зрошення. У роботі наведено результати перевірки запропонованої методики на даних, отриманих під час вирощування у виробничих умовах кукурудзи за підґрунтового краплинного зрошення на Півдні України. При аналізі даних математичного моделювання була отримана середня точність моделювання об'ємної вологості близько ~1% та підтверджено теоретичні очікування стосовно протікання процесів транспірації та випаровування з приповерхневих шарів ґрунту. **Висновки.** Представлені результати дають можливість із керованою дискретністю прогнозувати стан ґрунтової вологи, зокрема, профілі зволоження, та її доступність рослинам і

можуть бути застосовані під час проєктування систем краплинного зрошення, підвищуючи їх ефективність.

**Ключові слова:** краплинне зрошення, підтримка прийняття рішень, моделювання вологоперенесення, рівняння Річардса.

DOI: <https://doi.org/10.31073/agrovisnyk202104-08>

У світовій та вітчизняній практиці меліорації земель все більшого поширення набуває краплинне зрошення як поверхневе так і підґрунтове. Ефективність його використання істотно залежить від здатності формувати оптимальний для розвитку сільськогосподарських культур водний режим кореневмісного шару ґрунту: підтримувати його можливо лише завдяки формуванню відповідних режимів зрошення. Найдієвішим інструментом для реалізації цього завдання є інформаційні системи управління поливами.

Одним з підходів до побудови дорадчих інформаційних систем при управлінні зрошенням є використання математичних моделей вологоперенесення для прогнозування динаміки вмісту вологи у ґрунті й визначення на їх основі графіків поливів, поливних та зрошувальних норм. Найбільш вживаною моделлю наразі є диференціальне рівняння Річардса [1].

Ця робота представляє методику прогнозування динаміки вологості ґрунту за краплинного зрошення у двовимірному наближенні. Чисельне моделювання водного режиму ґрунту пропонується проводити з використанням фізично обґрунтованої диференціальної моделі, заснованої на рівнянні Річардса, записаному у термінах напорів. Використання такої моделі дає змогу з керованою дискретністю прогнозувати стан ґрунтової вологи, зокрема, профілі зволоження, та її доступність рослинам.

**Математична модель та чисельний метод.** Рівняння Річардса, записане у термінах напорів, у двовимірній постановці має такий вигляд:

$$C(h) \frac{\partial}{\partial t} H = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(H) \frac{\partial H}{\partial z} \right) - S, \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq L_x; 0 \leq z \leq L_z; t \geq 0,$$

де  $h(x, z, t) = \frac{P(x, z, t)}{\rho g}$  — напір, м;

$H(x, z, t) = \frac{P(x, z, t)}{\rho g} + z$  — повний потенціал

вологості, м;  $P(x, z, t)$  — всмоктуючий тиск, Па;  $\rho$  — щільність води, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  — прискорення вільного падіння, м/с<sup>2</sup>;  $C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}$ ,

$\theta(x, z, t)$  — об'ємна вологість ґрунту, %;  $k(H)$  — коефіцієнт вологоперенесення, м/с;  $S(x, z, t)$  — функція джерел, 1/с, що моделює екстракцію вологи корінням рослин та її подачу підґрунтовым краплинним зрошенням.

До рівняння (1) ставляться такі умови. На нижній границі області розв'язання  $z = L_z$  ставиться умова другого роду  $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ . На

верхній границі  $z = 0$  задається крайова умова другого роду [2]  $k \frac{\partial H}{\partial z} = Q_e(t) - Q_p(t) - Q_i(x, t)$ ,

де  $Q_e(t)$ ,  $Q_p(t)$ ,  $Q_i(x, t)$  — потоки, м/с, викликані, відповідно, випаровуванням, опадами та зрошенням. У випадку однієї стрічки поверхневого краплинного зрошення маємо  $Q_i(x, t) = Q_{si}(t) \delta(x_s)$ , де  $Q_{si}(t)$  — потік зрошувальної води з однієї крапельниці;  $x_s$  — координата  $x$  місця розміщення краплинної стрічки у розрахунковій області;  $\delta(\cdot)$  — дельта-функція Дірака. На бічних гранях  $x=0$ ,

$x=L_x$  ставиться умова другого роду  $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ .

Початкова умова — у вигляді  $H(x, z, 0) = H_0(x, z)$ .

Функція  $S$  моделює екстракцію вологи корінням рослин та підґрунтове краплинне зрошення таким чином.

Розподіл транспірації за глибиною області  $z$  моделюється згідно [3] як

$$S_z(z, t) = \frac{T(t)L(z)}{z_r}, \quad \text{м/с, де } z_r \text{ — глибина ко-}$$

$$\int_0^{z_r} L(z) dz$$

рневмісного шару;  $L(z) = 1,44 - 0,14 \frac{z}{z_r}$  —

$$-0,61\left(\frac{z}{z_r}\right)^2 - 0,69\left(\frac{z}{z_r}\right)^3 \text{ — функція щільності}$$

розподілу довжини коріння та її конкретний вигляд, який використано у цій роботі;  $T(t)$  — транспірація, м/с. Вважатимемо, що моделюється  $n_p$  рослин, з центрами кореневих систем шириною  $r_{pi}$  у точках  $x_{pi}$ ,  $i=0, \dots, n_p-1$  розрахункової області та лінійними падінням щільності  $S_{xi}(x)$  по горизонтальній координаті:

$$S_{xi}(x) = \begin{cases} \frac{r_{pi} - (x - x_{pi})}{r_{pi}^2}, r_{pi} - (x - x_{pi}) \geq 0 \\ 0, r_{pi} - (x - x_{pi}) < 0 \end{cases}, 1/m.$$

Тоді, загальна функція екстракції вологи матиме такий вигляд:

$$S_T(x, z, t) = \frac{1}{n_p} S_z(z, t) \sum_{i=0}^{n_p-1} S_{xi}(x), 1/c.$$

При моделюванні наявності однієї стрічки підґрунтового краплинного зрошення, до  $S_T(x, z, t)$  додаємо щільність потоку вологи  $Q_{ss}(x, z, t) = Q_{ss0}(t)\delta(x_{ss})\delta(z_{ss})$ , де  $Q_{ss0}(t)$  — щільність потоку зрошувальної води з однієї крапельниці, 1/с;  $x_{ss}$ ,  $z_{ss}$  — координати розміщення краплинної стрічки у розрахунковій області й отримуємо  $S(x, z, t) = S_T(x, z, t) + Q_{ss}(x, z, t)$ . У випадку поверхневого краплинного зрошення  $S(x, z, t) = S_T(x, z, t)$ .

Маючи оцінене значення фактичної евапотранспірації  $ET$ , м/с, потік випаровування з поверхні ґрунту  $Q_e$  і транспірація  $T$  обчислюються як [4]:

$$Q_e = (1-M)ET, T = M \cdot ET, M = 1 - e^{-\mu LAI},$$

де  $LAI$  — індекс листової поверхні, значення якого було взято фіксованим ( $LAI=0,5$ );  $\mu$  — задана стала.

Основну гідрофізичну характеристику ґрунту представлено у пошаровому вигляді. Вона описується моделлю Ван Генухтена [5] у формі  $\theta(h) = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{\left[1 + (10\alpha|h|)^n\right]^{1-1/n}}$

зі значеннями коефіцієнтів, що змінюються від шару до шару. Залежність коефіцієнта вологоперенесення від напору представлено згідно з моделлю Авер'янова [6] у такому вигляді:  $k(H) = k_f \left(\frac{\theta(H-z) - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}\right)^\beta$ , де  $k_f$  —

коефіцієнт фільтрації;  $\beta$  — фіксований показник степеня.

Для врахування коефіцієнта культури та похибок оцінки евапотранспірації у модель вводиться коригувальний множник  $k_{ET}$ :  $k_{ET} : ET = k_{ET} ET'$ , де  $ET'$  — обчислене метеостанцією значення потенційної евапотранспірації. Аналогічний коригувальний множник  $k_{irr}$  вводиться також для потоку зрошувальної води:  $Q_{irr} = k_{irr} Q'_{irr}$ , де  $Q'_{irr}$  — потік (щільність потоку) зрошувальної води при зрошенні дощуванням чи однієї крапельниці поверхневого (підґрунтового) краплинного зрошення;  $Q'_{irr}$  — відповідне значення згідно з проектною документацією.

Конфігурацію області моделювання вибрано таким чином: вважатимемо, що краплинна стрічка (поверхневого чи підґрунтового залягання) розміщується по горизонталі у точці  $x=L_x/2$ , причому ліва та права межі області  $x=0$  та  $x=L_x$  розміщуються посередині між двома стрічками (відповідно, відстань між ними —  $2L_x$ ). За припущення симетричності процесів зволоження та поглинання вологи це має забезпечувати

адекватність умови  $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ . Глибина області

моделювання вибирається таким чином, щоб відстань від останнього датчика, на якому фіксуються незначні коливання вологості, до її нижньої межі мала визначений порядок відстаней між датчиками. Таким чином, при нехтуванні незначними коливаннями вологості, має забезпечуватись адекватність умови  $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$  на нижній межі області.

Чисельне розв'язання початково-крайової задачі щодо моделі, заснованої на рівнянні (1), виконується згідно з локально-одновимірною скінченно-різницевою схемою [8] на рівномірній різницевій сітці

$$\omega = \left\{ (x_i = ih_x, z_k = kh_z, t_j = jt) : i = \overline{0, m}, k = \overline{0, n}, j = \overline{0, 1, 2, \dots} \right\}, \quad (2)$$

де  $h_x=L_x/m$ ,  $h_z=L_z/n$  — кроки за геометричними змінними;  $\tau$  — крок за часом. Тут і надалі сітковий аналог функції напорів  $H$ , й аналогічно, інших функцій, позначимо як  $H_{ik}^j = H(x_i, z_k, t_j)$ . У результаті дискретизації отримуємо дві наступні, послідовно

розв'язані серії тридіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A_{ik}^j H_{i-1k}^{j+1/2} - R_{ik}^j H_{ik}^{j+1/2} + B_{ik}^j H_{i+1k}^{j+1/2} = \Omega_{ik}^j \quad (3)$$

(i = 1, ..., m - 1, k = 0, n, j = 0, 1, 2, ...),

$$\bar{A}_{ik}^{j+1/2} H_{ik-1}^{j+1} - \bar{R}_{ik}^{j+1/2} H_{ik}^{j+1} + \bar{B}_{ik}^{j+1/2} H_{ik+1}^{j+1} = \bar{\Omega}_{ik}^{j+1/2} \quad (4)$$

(k = 1, ..., n - 1, i = 0, m, j = 0, 1, 2, ...),

де

$$A_{ik}^j = C^{-1}(H_{ik}^j) \frac{k_{i-1k}^j}{h_x^2}, \quad B_{ik}^j = C^{-1}(H_{ik}^j) \frac{k_{i+1k}^j}{h_x^2},$$

$$\bar{A}_{ik}^{j+1/2} = C^{-1}(H_{ik}^{j+1/2}) \frac{k_{ik-1}^{j+1/2}}{h_z^2},$$

$$\bar{B}_{ik}^{j+1/2} = C^{-1}(H_{ik}^{j+1/2}) \frac{k_{ik+1}^{j+1/2}}{h_z^2}, \quad R_{ik}^j = C^{-1}(H_{ik}^j) \frac{2k_{ik}^j}{h_x^2} + \frac{1}{\tau},$$

$$\bar{R}_{ik}^{j+1/2} = C^{-1}(H_{ik}^{j+1/2}) \frac{2k_{ik}^{j+1/2}}{h_z^2} + \frac{1}{\tau},$$

$$\Omega_{ik}^j = -\frac{H_{ik}^j}{\tau} - \frac{1}{2} C^{-1}(H_{ik}^j) \bar{S}_{ik}^j,$$

$$\bar{\Omega}_{ik}^{j+1/2} = -\frac{H_{ik}^{j+1/2}}{\tau} - \frac{1}{2} C^{-1}(H_{ik}^{j+1/2}) \bar{S}_{ik}^{j+1/2}.$$

У випадку підґрунтового краплинного зрошення, дискретизація  $S_{ik}$  функції  $S$  отримується способом представлення щільності потоку зрошувальної води  $Q_{SS0}(t)$  у вигляді  $Q_{SS0} = \frac{Q_{SS1}(t)}{h_x h_z}$ , де  $Q_{SS1}(t)$  — потік зрошувальної води у 2-вимірному наближенні,  $m^2/c$ , та дискретизації дельта-функції Дірака.

До систем (3), (4) додаються такі дискретні аналоги крайових умов:

$$H_{0k} = H_{1k}, H_{mk} = H_{m-1k}, k = \overline{0, n}, \quad H_{in} = H_{in-1}, i = \overline{0, m}, \quad (5)$$

$$H_{i0} = H_{i1} - \frac{h_z(Q_e + Q_p + Q_i)}{2(k_{i0} + k_{i1})}. \quad (6)$$

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3)–(6) розв'язуються методом прогонки [8].

Функція початкових умов  $H_0$  обчислюється таким чином. Фіксуємо на нульовій ітерації значення напорів у точках розміщення датчиків та встановлюючи середнє значення напорів у всіх інших точках виконується ітераційне згладжування значень  $H_0$

доти, доки не буде досягнута їх незмінність у межах заданої точності, але не більше заданої кількості ітерацій.

Збіжність за часовою змінною досягається методом автоматичного вибору кроку за часом таким чином, щоб середня сума квадратів різниць між розв'язками на одному кроці за часом із заданим  $\tau$  та  $\tau/2$  відрізнялася не більше, ніж на задану сталу  $\varepsilon_2$ .

**Ідентифікація параметрів моделі.** Емпіричними параметрами моделі, що дають можливість зменшити негативний вплив на точність опису стану ґрунтової вологи похибок вимірювання, моделі (через неможливість урахування всіх фізичних і біологічних процесів, виконання закладених у її основу припущень) та чисельного методу є коригувальні множники  $k_{ET}$  та  $k_{irr}$ , а також параметр  $\mu$  розподілу евапотранспірації на евапораційний і транспіраційний компоненти.

Пропонується використовувати наступний підхід (аналогічний наведеному у [9, 10]) для їх визначення на основі вимірювань всмоктуючого тиску:

Нехай відомі значення напорів  $H_i$  у моменти часу  $T_i$  у точках  $(x_i, z_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ . Слід знайти значення компонентів вектора параметрів  $\vec{v} = (k_{ET}, k_{irr}, \mu)$ , які мінімізують

$F(\vec{v}) = \sum_{i=1}^N (H(x_i, z_i, T_i, \vec{v}) - H_i)^2$ , де  $H(x, z, t, \vec{v})$  — розв'язок описаної вище крайової задачі щодо рівняння (1) за відповідних значень параметрів.

Враховуючи складність задачі, фіксовану кількість і неперервність параметрів, що визначаються, пропонується розв'язувати її метаевристичним алгоритмом рою частинок [11].

**Вихідні дані для моделювання.** Вихідні дані для перевірки ефективності запропонованої методики були отримані в процесі моніторингу вирощування кукурудзи у ДП ДГ «Великі Клини» у 2020 р. Для вимірювання всмоктуючого тиску використовувалися датчики вологості ґрунту Watermark. Показники евапотранспірації за методом Пенмана-Монтейта отримувалися з метеостанції iMetos, розміщеної на дослідному полі. Дані щодо тисків отримувалися з датчиків щогодини, а дані щодо евапотранспірації — щодня. Пошарові значення коефіцієнтів моделей Ван Генухтена та Авер'янова отримувалися способом

мінімізації методом найменших квадратів їх відхилень від даних лабораторного дослідження проб ґрунту.

Ідентифікація параметрів моделі відбувалася на основі даних поливу, проведеного 15.07.2020 нормою 202 м<sup>3</sup>/га. Початковий момент часу моделювання — 9 год 15.07.2020 (момент початку поливу). Полив було завершено 15.07.2020 о 16 год. Моделювання тривало до моменту часу 14 год 18.07.2020. Контрольні моменти часу  $T_i$ , які використовуються за розрахунку значення цільової функції оберненої задачі — 7 та 70 год. після закінчення поливу. Потік води з крапельниці дорівнював 0,72 дм<sup>3</sup>/год.

Розмір розрахункової області приймався рівним 1 м·1 м. Розрахункова область покривалася сіткою розміром 30·30 комірок. Адаптивно обчислений крок за часом дорівнював 500 с.

Глибина кореневої системи приймалася на основі результатів натурних досліджень рівною 40 см. Глибина закладання краплинної стрічки приймалася рівною 10 см. Краплинна стрічка розміщувалась у розрахунковій області в точці з  $x=0,5$  м. Найкращі результати досягалися при моделюванні розміщення над краплинною стрічкою однієї рослини з шириною кореневої системи у 60 см.

Датчики були розміщені у таких точках ( $z; x$ ) розрахункової області: датчик 17 — (0,1 м; 0,1 м), 13 — (0,1 м; 0,3 м), 1 — (0,1 м; 0,5 м), 18 — (0,3 м; 0,1 м), 14 — (0,3 м; 0,3 м), 2 — (0,3 м; 0,5 м), 19 — (0,5 м; 0,1 м), 15 — (0,5 м; 0,3 м), 3 — (0,5 м; 0,5 м), 20 — (0,7 м; 0,1 м), 16 — (0,7 м; 0,3 м), 4 — (0,7 м; 0,5 м). Припускаючи симетрію по горизонтальній координаті розповсюдження зони зволоження, показання датчиків у точках з координатами  $x=0,7$  м; 0,9 м вважалися рівними показанням у точках з  $x=0,3$  м; 0,1 м.

Після ідентифікації параметрів, перевірка якості проводилася моделюванням динаміки напорів у діапазонах часу від 0 год 25.07.2020 до 0 год 01.08.2020 (полив 28.07.2020, тривав з 14 до 18 год нормою 118 м<sup>3</sup>/га) та від 5 год 07.08.2020 до 0 год 10.08.2020 (полив 08.08.2020, тривав з 12 до 21 год нормою 258 м<sup>3</sup>/га).

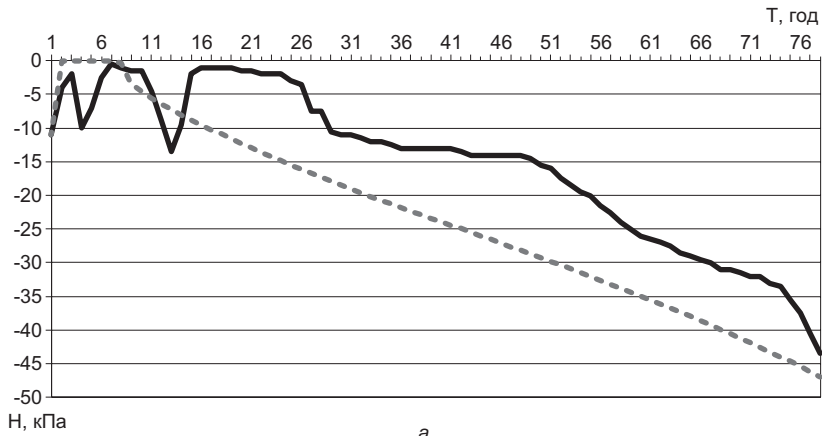
**Результати моделювання.** Оптимізовані значення параметрів моделі, отри-

мані на основі даних у діапазоні часу від 15.07.2020 до 18.07.2020 дорівнювали  $k_{ET}=92,6$ ;  $k_{irr}=0,272$ ;  $\mu=11,42$ .

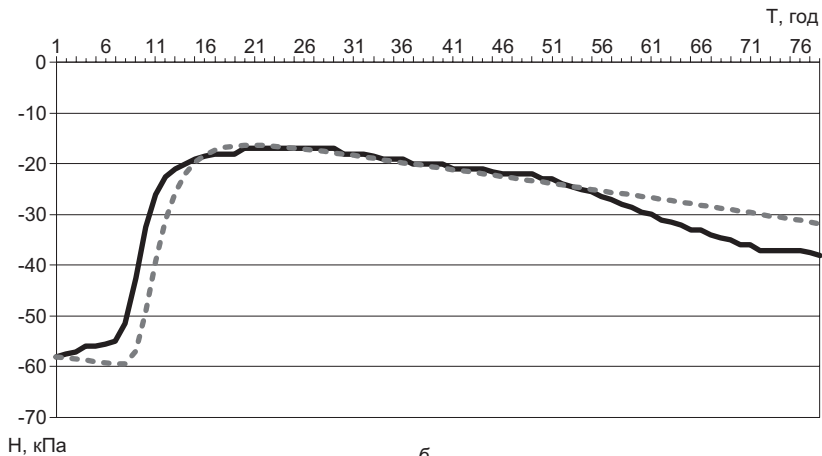
Високе значення коефіцієнта  $\mu$  поділу евапотранспірації на транспіраційний та евапораційний компоненти демонструє фізично коректну картину, що часто спостерігається за підґрунтового краплинної зрошення, коли волога відбирається з ґрунту переважно рослинами, тоді як випаровування з поверхні є мінімальним. При моделюванні випаровування з поверхні у такій ситуації з фіксуванням кроком за часом і простором виникають істотні похибки дискретної схеми (3)–(6), які не компенсуються фізично обґрунтованими значеннями корегувального фактора для евапотранспірації  $k_{ET}$ .

Деякі з отриманих результатів моделювання у діапазоні часу від 15.07.2020 до 18.07.2020 у графічному вигляді представлені на рисунку.

Для цього діапазону середня відносна похибка моделювання динаміки напорів становила 12%, а середня абсолютна похибка — 3,7 кПа. Середня абсолютна похибка моделювання об'ємної вологості становила 85%. При цьому похибки, істотно вищі за середню, спостерігалися для датчика, розміщеного поблизу крапельниці, та датчика, що розміщувався безпосередньо під крапельницею. Для датчика, розміщеного на 20 см нижче крапельниці, найвища похибка фіксується наприкінці поливу — ~4% (показання датчика — 23% вологості, за моделлю — 19%). У діапазоні часу більше ніж 7 год після поливу найбільша похибка, що спостерігалася становила 1% вологості. Для датчика, розміщеного поблизу крапельниці, точність загалом є меншою. Похибки менше ніж 3% вологості тут отримуються лише для діапазону часу понад 20 год після закінчення поливу. У процесі поливу та 20 год після його закінчення, максимальна похибка становить 8,8% вологості (показання датчика — 24,7%, за моделлю — 33,61% — у процесі поливу, коли ґрунт перебуває у вологонасиченому стані). Тут датчик фіксує тривалий (~20 год після закінчення поливу) високий рівень вологості поблизу крапельниці, тоді за моделлю волога починає відносно швидко відходити з цієї зони.



а



б

**Фактичні та розраховані напори,  $H$ , кПа залежно від інтервалу часу,  $T$ , год, починаючи з 9 год 15.07.2020: а – поблизу крапельниці:  $z=0,1$  м;  $x=0,5$  м; б – 20 см в сторону від крапельниці:  $z=0,1$  м,  $x=0,3$  м; — датчик; - - - модель**

Слід зауважити, що високі похибки моделювання спостерігаються у області та у моменти часу — поблизу крапельниці в процесі поливу, які не є критично важливими для прикладного застосування.

Для тестової множини даних, починаючи з 25.07.2020 середня відносна похибка моделювання динаміки напорів становить 19%. Середня абсолютна похибка — 4,3 кПа. Для тестової множини даних, починаючи з 7.08.2020 середня відносна похибка становила 24%. Середня абсолютна похибка — 4,4 кПа. Середня абсолютна похибка моделювання об'ємної вологості для обох діапазонів — ~1%.

Такі показники, що неістотно відрізнялися від похибки, отримані для множини даних, на основі якої проводилася ідентифікація моделі, доводять її адекватність та можливість здійснення прогнозних розрахунків за її допомогою.

Для перевірки залежності похибки моделювання від множини даних, згідно з якою проводиться ідентифікація параметрів, було проведено також обчислювальний експеримент, коли ідентифікація здійснювалася за даними, починаючи з 25.07.2020, а перевірка — за даними з 15.07.2020. Підтверджуючи адекватність використаної методики моделювання та

отриманих з її допомогою результатів, при цьому не спостерігалось принципових змін у точності опису процесу вологоперенесення. Середня відносна похибка моделювання

динаміки напорів для навчальної множини становила 18%, для набору даних, починаючи з 15.07.2020 — 12,5%, а для даних, починаючи з 7.08.2020 — 23,6%.

## Висновки

Використання диференціальної моделі вологоперенесення у термінах напорів для аналізу даних щодо водного режиму ґрунту дало можливість з достатньою точністю прогнозувати його зміну за підґрунтового краплинного зрошення. Пропонований підхід полягає в ідентифікації на основі даних одного проведеного поливу важкодоступних для прямого вимірювання параметрів моделі та коригувальних множників, які зменшують вплив на результати моделювання похибок

вимірювання, моделі та чисельного методу. При аналізі даних було отримано середню точність моделювання об'ємної вологості близько ~1% та підтверджено теоретичні очікування стосовно протікання процесів транспірації та випаровування з приповерхневих шарів ґрунту. Після ідентифікації параметрів моделі для конкретних польових умов, використаний підхід дає можливість способом сценарного моделювання планувати організацію зрошувальної системи та режими зрошення.

**Romashchenko M.<sup>1</sup>, Bohaienko V.<sup>2</sup>, Bilobrova A.<sup>3</sup>**

<sup>1,3</sup>*Institute of Water Problems and Land Reclamation of NAAS, 37, Vasylykivska Str., Kyiv, 03022, Ukraine,*  
<sup>2</sup>*VM Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, 40, Glushkov Ave., Kyiv, 03187, Ukraine;*  
*e-mail: <sup>1</sup>mi.romashchenko@gmail.com, <sup>2</sup>sevab@ukr.net, <sup>3</sup>anastasiabilobrova1993@gmail.com;*  
*ORCID: <sup>1</sup>0000-0002-9997-1346, <sup>2</sup>0000-0002-3317-9022, <sup>3</sup>0000-0002-0540-9492*

### **Two-dimensional mathematical modeling of water regime of soil under drip irrigation**

**Goal.** The objective of the study is to develop a method for predicting the dynamics of soil moisture under drip irrigation based on mathematical modeling by the two-dimensional Richards equation stated in terms of pressure. **Methods.** The results of the study were obtained by the method of mathematical modeling and verified experimentally. To discretize the Richards equation, a locally one-dimensional finite-difference scheme was used. Systems of linear algebraic equations obtained after the discretization were solved by the Thomas algorithm. To determine the hydrophysical functions of the soil and its constants, a complex of laboratory studies was used. Measurement of suction pressure in the soil was carried out using Watermark sensors. **Results.** Two empirical coefficients, as well as the

parameter of the partitioning of evapotranspiration into the evaporation and transpiration components, are proposed to be added to the mathematical model. Their selection minimizes the impact of evapotranspiration assessment errors and the errors of the determination and modeling of water supply on the overall accuracy of the forecast. The selection of these coefficients is proposed to be carried out by a metaheuristic particle swarm optimization algorithm on the base of measurements within one irrigation cycle. The results of the verification of the proposed methodology on the data obtained growing corn in the production conditions under drip irrigation in the South of Ukraine are presented. In Analyzing the data of mathematical modeling, the average accuracy of modeling volumetric moisture content equal to ~1% was obtained and theoretical expectations regarding the process of transpiration and evaporation from the near-surface soil layers were confirmed. **Conclusions.** The presented results allow with a controlled discretion to predict the state of soil moisture, in particular, moistened zones, along with its availability to plants, and can be used during the design of drip irrigation systems increasing their efficiency.

**Key words:** drip irrigation, decision support, moisture transfer modeling, Richards equation.

**DOI:** <https://doi.org/10.31073/agroviznyk202104-08>

## Бібліографія

1. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*. 1(5). 1931. P. 318–333. doi.org/10.1063/1.1745010.

2. Van Dam J.C., Feddes R.A. Numerical simulation of infiltration, evaporation and shallow groundwater levels with the Richards equation. *Journal of*

*Hydrology* 233(1). 2000. P. 72–85. doi.org/10.1016/S0022-1694(00)00227-4.

3. *Molz F.J., Remson I.* Extraction term models of soil moisture use by transpiring plants. *Water Resour. Res.* 6. 1970. P. 1346–1356. doi.org/10.1029/WR006i005p01346.

4. *Gigante V., Iacobellis V., Manfreda S., Milella P., Portoghesi I.* Influences of Leaf Area Index estimations on water balance modeling in a Mediterranean semi-arid basin. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 9. 2009. P. 979–991.

5. *Van Genuchten M.T.* A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 44. 1980. P. 892–898.

6. *Аверьянов С.Ф.* Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. Москва: Колос, 1982. 242с.

7. *Allen R.G., Pereira L., Raes D., Smith M.* Crop evapotranspiration. Rome, Italy: Food and

Agriculture Organization of the United Nations. 1998.

8. *Samarskii A.A.* The theory of difference schemes. New York (NY): CRC Press. 2001.

9. *Romashchenko M.I., Bohaienko V.O., Matiash T.V., Kovalchuk V.P., Danylenko Iu.Iu.* Influence of evapotranspiration assessment on the accuracy of moisture transport modeling under the conditions of sprinkling irrigation in the south of Ukraine. *Archives of Agronomy and Soil Science*, 66(10). 2020. P.1424–1435.

10. *Bohaienko V., Gladky A., Romashchenko M., Matiash T.* Identification of fractional water transport model with  $\psi$ -Caputo derivatives using particle swarm optimization algorithm. *Applied Mathematics and Computation* 390: 125665. 2021.

11. *Zhang Y.A.* Comprehensive survey on particle swarm optimization algorithm and its applications. *Math Probl Eng.* 931256. 2015.