УДК 658.5:330.43

В. О. Яковенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем та технологій Академії митної служби України

ОПТИМІЗАЦІЯ ДІЯЛЬНОСТІ ПРОМИСЛОВОГО ПІДПРИЄМСТВА В УМОВАХ ЦИКЛІЧНИХ ПРОЦЕСІВ РИНКОВОЇ НАДСИСТЕМИ

Розроблено економіко-математичну модель циклічного зростання капіталу та досліджено його вплив на діяльність промислового підприємства для загального випадку. Запропоновано метод розв'язування задач для областей зі змінною межею, доведено єдиність розв'язку такої задачі.

It is constructed economic-mathematical model of cyclic growth of the capital and its influence on activity of the industrial enterprise generally is investigated. The method of the decision of a problem for areas with variable border is offered and is proved uniqueness of the decision of such problem.

Ключові слова. Економіко-математична модель, капітал промислового підприємства, циклічне зростання, крайова задача, метод Рунге–Кутта.

Вступ. Зміни в економічному навколишньому середовищі, в якому працює сучасне підприємство, потребують від нього відповідної адаптації до вимог економічного оточення. Ринкова надсистема (міська, регіональна) потребує від підприємства цілісного та гармонійного розвитку.

Під впливом такого ринкового середовища виникають складні циклічні коливання основних економічних показників підприємства: прибутку, виручки від реалізації продукції, рентабельності, обсягу збуту, витрат на збут.

Слід зазначити, що для підприємств, чиї економічні показники характеризуються тенденцією до зростання, виникає проблема визначення періоду насичення. Визначення періодів зростання та спаду з недопустимою похибкою унеможливлює своєчасні капіталовкладення у новітні технології, диверсифікацію виробництва. Таким чином, діяльність промислового підприємства в сучасних умовах чутлива до впливу нестабільного економічного середовища, до його циклічних процесів. Такі процеси в економічному середовищі обумовлені зростанням експортно-імпортних операцій, конкурентною боротьбою, впровадженням інноваційних розробок у виробництво, збільшенням інформаційних, фінансових, матеріальних потоків. Таким чином, виникає проблема адаптації промислового підприємства до циклічних коливань ринкового середовища з урахуванням його динамічних характеристик.

Розглянемо економіко-математичну модель визначення таких характеристик та їх впливу на діяльність промислового підприємства.

Відповідно до моделі [1] установлено, що існують коливання економічної активності з різним періодом: сезонні цикли (менше року), цикли до 3,5 років, торговельно-промислові цикли – до 7–11 років, великі цикли – від 50 років. Виявлено, що такі цикли пов'язані з певними технічними напрямками та періодичністю оновлення основних капітальних фондів. Одночасно з цим існує взаємозв'язок між циклічними та збалансованими явищами в економіці, де циклові інвестування на макрорівні відповідає стабільна програма. Ця програма реалізується системою відтворення капіталу, а її довжину можемо оцінити як величину запланованого його приросту. У цьому випадку система відтворення капіталу використовує всі етапи програми, а взаємодія між темпами приросту капіталу здійснюється з відповідною швидкістю. Запропонована програма інвестування передбачає споживання ресурсу та його перетікання у використаний капітал [2, 3].

Постановка завдання. Розробимо моделі циклічного зростання капіталу для загального випадку стосовно моделей [1, 4], а також запропонуємо метод розв'язування задач для області зі змінною межею, яка залежить від часу τ, доведемо єдиність розв'язку такої задачі.

Нехай $K(\tau, z)$ – темп приросту капіталу на відрізку $[0; l(\tau)]$ є кусково-гладкою або кусково-монотонною і, крім того, абсолютно інтегрованою функцією. Введемо такі величини: z – запланований приріст капіталу, $v(\tau)$ – швидкість зміни темпу приросту капіталу. Маємо крайову задачу, яку можна навести у вигляді:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \tau^2} = \frac{1}{v^2(\tau)} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < z < \xi(\tau), \tag{1}$$

$$K(\tau_0, z) = \varphi(z), \quad \left.\frac{\partial K}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \Psi(z), \tag{2}$$

$$K(\tau, 0) = \mu(\tau), \quad K(\tau, \xi(\tau)) = \chi(\tau). \tag{3}$$

Результати дослідження. Для розв'язання крайової задачі розроблено метод, згідно з яким послідовно застосовується скінченне інтегральне перетворення з "фіксованим" у часі ядром та алгоритм Рунге–Кутта, що визначає значення коефіцієнтів-зображення із задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

У випадку врахування неоднорідних крайових умов їх необхідно перетворити до однорідних. Тому перетворимо задані неоднорідні крайові умови першого роду до однорідних уведенням нової невідомої функції:

$$\vartheta(\tau, z) = K(\tau, z) - \mu(\tau) - [\chi(\tau) - \mu(\tau)] \frac{z}{\xi(\tau)}. \tag{4}$$

Стосовно цієї функції крайова задача набирає такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\nu^2(\tau)} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + f_1(\tau, z),$$

$$\vartheta(\tau_0, z) = \varphi_1(z), \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \psi_1(z),$$

$$\vartheta(\tau, 0) = \vartheta(\tau, \xi(\tau)) = 0,$$

де $f_1(\tau, z) = \frac{z\dot{\xi}}{\xi^2}\left[\dot{\chi} - \dot{\mu} + \frac{(\mu-\chi)\dot{\xi}}{\xi}\right] - \ddot{\mu} - \frac{z}{\xi}\left[\ddot{\chi} - \ddot{\mu} + (\dot{\mu} - \dot{\chi})(\dot{\xi} + \ddot{\xi}) - \frac{\dot{\xi}^2}{\xi}(\dot{\mu} - \dot{\chi})\right]$,

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) - \mu(\tau_0) - [\chi(\tau_0) - \mu(\tau_0)]\frac{z}{\xi(\tau_0)};$$

$$\psi_1(z) = \psi(z) - \dot{\mu}(\tau_0) - [\dot{\chi}(\tau_0) - \dot{\mu}(\tau_0)]\frac{z}{\xi(\tau_0)} - \frac{[\mu(\tau_0) - \chi(\tau_0)]z\dot{\xi}(\tau_0)}{\xi^2(\tau_0)}.$$

Виходячи з виду крайових умов, застосуємо до диференціального рівняння та початкових умов інтегральне перетворення, яке має ядро $\sin\frac{n\pi z}{\xi}$. Тоді розкладення функції $\vartheta(\tau, z)$ у ряд Фур'є при фіксованому значенні τ має вигляд:

$$\vartheta(\tau, z) = \frac{2}{\xi(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin\frac{n\pi z}{\xi(\tau)},$$

$$\alpha_n(\tau) = \int_0^{l(\tau)} \vartheta(\tau, z) \sin\frac{n\pi z}{\xi(\tau)} dz.$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів $\alpha_n(\tau)$ помножимо члени рівняння у частинних похідних на ядро інтегрального перетворення та зінтегруємо за змінною x на відрізку $[0, \xi(\tau)]$:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2} \sin\frac{n\pi z}{\xi} dz = \frac{1}{\nu^2(\tau)}\int_0^l \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \sin\frac{n\pi z}{\xi} dz + \int_0^l f_1(\tau, z) \sin\frac{n\pi z}{\xi} dz.$$

Обчисливши отримані інтеграли, визначимо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно $\alpha_n(\tau)$:

$$\frac{d^2\alpha_n}{d\tau^2} + \left(\frac{n\pi}{\nu\,\xi}\right)^2 \alpha_n = \frac{\dot{\xi}}{2\xi}\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{nm}\alpha_m + q_n^{(1)}(\tau),$$

$$\gamma_{nm} = \frac{4(-1)^{n+m}_{nm}}{m^2 - n^2}, \quad \text{при} \quad n \neq m;$$

$$\gamma_{nm} = 1, \quad \text{при} \quad n = m;$$

$$q_n^{(1)}(\tau) = \int_0^l f_1(\tau, z) \sin\frac{n\pi z}{\xi} dz.$$

Приєднуючи до одержаної системи рівнянь початкові умови

$$\alpha_n(\tau_0) = \int_0^{l(\tau_0)} \varphi(z) \sin\frac{n\pi z}{\xi(\tau_0)} dz,$$

$$\left.\frac{d\alpha_n}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \int_0^{l(\tau_0)} \Psi_1(z) \sin\frac{n\pi z}{\xi(\tau_0)} dz,$$

розв'яжемо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Якщо покласти, що $\xi(\tau) = const$, тобто маємо частковий випадок моделі, то визначена задача Коші перетвориться до задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку. Таким чином, темп приросту капіталу в загальному випадку буде мати такий вигляд:

$$K(\tau,z)=\frac{2}{\xi(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\tau)\sin\frac{n\pi z}{\xi(\tau)}+\mu(\tau)+[\chi(\tau)-\mu(\tau)]-\frac{z}{\xi(\tau)}. \qquad (5)$$

Для випадку крайових умов другого роду

$$\left.\frac{\partial K}{\partial z}\right|_{z=0}=\omega(\tau),\quad \left.\frac{\partial K}{\partial z}\right|_{z=\xi(\tau)}=\Omega(\tau)$$

необхідно ввести нову невідому функцію у вигляді:

$$w(\tau,z)=K(\tau,z)-\omega(\tau)z-[\Omega(\tau)-\omega(\tau)]\frac{z^2}{2\xi(\tau)}.$$

Тоді крайова задача про визначення темпу приросту капіталу набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}=\frac{1}{\nu^2(\tau)}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+f_2(\tau,z),\quad \tau>0,\quad 0<z<\xi(\tau),$$

$$w(\tau_0,z)=F_2(z),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau_0}=\Phi_2(z);$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=\xi(\tau)}=0,$$

де $f_2(\tau,z)=\ddot{\omega}(\tau)z+[\ddot{\Omega}(\tau)-\ddot{\omega}(\tau)]\frac{z^2}{2\xi(\tau)}-[\dot{\Omega}(\tau)-\dot{\omega}(\tau)]\frac{z^2\dot{\xi}}{\xi^2(\tau)},$

$$F_2(z)=\varphi(z)-\omega(\tau_0)z-[\Omega(\tau_0)-\omega(\tau_0)]\frac{z^2}{2\xi(\tau_0)};$$

$$\Phi_2(z)=\Psi(z)-\dot{\omega}(\tau_0)z-[\dot{\Omega}(\tau_0)-\dot{\omega}(\tau_0)]\frac{z^2}{2\xi(\tau_0)}+[\Omega(\tau_0)-\omega(\tau_0)]\frac{z^2\dot{\xi}(\tau_0)}{2\xi^2(\tau_0)}.$$

Темп приросту капіталу наведемо у вигляді:

$$K(\tau,z)=\frac{2}{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\tau)\cos\frac{n\pi z}{\xi}+\omega(\tau)z+[\Omega(\tau)-\omega(\tau)]\frac{z^2}{2\xi(\tau)}, \qquad (6)$$

$$\beta_n(\tau)=\int_0^{\xi(\tau)}w(\tau,z)\cos\frac{n\pi z}{\xi}dz.$$

Для визначення коефіцієнтів $\beta_n(\tau)$ запишемо задачу Коші так:

$$\frac{d^2\beta_n}{d\tau^2}+\left(\frac{n\pi}{\nu\xi}\right)^2\beta_n=\frac{\dot{\xi}}{2\xi}\sum_{m=0}\delta_{nm}\beta_m+q_n^{(2)}(\tau),$$

$$\beta_n(\tau_0)=\int_0^{\xi(\tau_0)}F_2(z)\cos\frac{n\pi z}{\xi(\tau_0)}dz,$$

$$\left.\frac{d\beta_n}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}=\int_0^{\xi(\tau_0)}\Phi_2(z)\cos\frac{n\pi z}{\xi(\tau_0)}dz,$$

$$q_n^{(2)}(\tau)=\int_0^{\xi(\tau)}[f_2(\tau,z)+\frac{\omega(\tau)-\Omega(\tau)}{\omega^2\xi}]\cos\frac{n\pi z}{\xi}dz,$$

$$\delta_{nm}=\frac{4(-1)^{m+n}m^2}{m^2-n^2},\quad n\neq m;\quad \delta_{nm}=5,\quad n=m.$$

Якщо в економіко-математичній моделі врахувати мішані однорідні крайові умови:

$$K(\tau,z)=0,\quad \left.\frac{\partial K}{\partial z}\right|_{z=\xi(\tau)}=0,$$

то темп приросту капіталу можна визначити у вигляді:

$$K(\tau, z) = \frac{2}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(\tau) \sin \frac{\pi(2n+1)\, z}{2\xi}, \tag{7}$$

де коефіцієнти $\eta_n(\tau) = \int_0^{\xi(\tau)} K(\tau,z) \sin \frac{\pi(2n+1)}{2\xi} xzdz$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\frac{d^2 \eta_n}{d\tau^2} + \left[\frac{\pi(2n+1)}{2\nu\xi}\right]^2 \eta_n = \frac{\ddot{\xi}\xi - 2\dot{\xi}^2 - \dot{\xi}^2}{4\xi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{nm}\eta_m + q_n^{(1)}(\tau),$$

$$\eta_n(\tau_0) = \int_0^{\xi(\tau_0)} \varphi(z) \sin \frac{\pi(2n+1)z}{2\xi(\tau_0)} dz,$$

$$\left.\frac{d\eta}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \int_0^{\xi(\tau_0)} \Psi(z) \sin \frac{\pi(2n+1)z}{2\xi(\tau_0)} dz,$$

$$\rho_{nm} = \frac{(2n+1)^2(-1)^{m+n+1}}{(m+n+1)(m-n)}, n \neq m; \quad \rho_{nm} = 1, n = m.$$

Порівняння одержаних числових результатів у частковому випадку моделі при однорідних крайових умовах першого роду: $\xi(\tau) = const, \quad n = 3$ з результатами роботи [2] показало, що точки кривої очікуваного темпу приросту капіталу у США в 1938, 1949, 1958, 1970, 1982 рр. збігаються зі спадом економічної активності. Разом з тим самі цикли економічної активності спряжені з переходом темпу приросту капіталу від одного рівня до другого. Таким чином, для економічної динаміки, яка відповідає темпам приросту капіталу, характерна циклічність. Це дає можливість у подальшому навести розрахунки щодо реальних даних економічної активності в державі.

Доведемо єдиність розв'язку такої задачі: знайдемо функцію $K(z, \tau)$, що визначена та неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку в області $D(\xi) = \{(z, \tau)$: $0 < z < \xi(\tau)$, $0 < \tau < \infty\}$ усюди за винятком, можливо, точок (0, 0), (1, 0) та задовольняє задачі (1)–(3).

Розв'язок задачі має вигляд (5), де коефіцієнти $\alpha_i(\tau)$, за умовою $\chi(\tau) = 0$ визначаються за допомогою граничного переходу $n \to \infty$ з розв'язку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} &\alpha_k^{(n)''} + \alpha_k^{(n)'} + \frac{a^2k^2\pi^2}{\xi^{(n)2}}\alpha_k^{(n)} = -k\xi^{(n)'}\left[\frac{2}{\xi^{(n)}}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)}W_{ik} - \frac{\mu(\tau)(-1)^k}{k^2\pi}\right] - \frac{\xi^{(n)'}k}{\xi^{(n)}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)'}W_{ik} + \\ &+\frac{(\xi^{(n)'})^2 k}{(\xi^{(n)})^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}W_{ik} + \frac{1}{\xi^{(n)}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}\theta_{ik}\right] - \frac{\mu(\tau)\xi^{(n)}}{k\pi} - \\ &-\frac{\tau}{k\pi}\left[\mu''(\tau)\xi^{(n)} + \mu(\tau)\xi^{(n)'} + \mu(\tau)\xi^{(n)''} - \mu(\tau)\xi^{(n)''}(-1)^k + \frac{2\mu(\tau)\left(\xi^{(n)'}\right)^2}{\xi^{(n)}}(-1)^k\right] + \int_0^{\xi^{(n)}} \psi_1(\tau, z) \sin\frac{k\pi z}{\xi^{(n)}} dz, \end{aligned} \tag{8}$$

де $\xi(0) = \xi_0; \quad \alpha_k^{(n)}(0) = \int_0^{\xi_0} \varphi_1(z) \sin \frac{k\pi z}{\xi_0} dz, \quad \alpha_k^{(n)'}(0) = \int_0^{\xi_0} \psi_1(z) \sin \frac{k\pi z}{\xi_0} dz, \quad \varphi_1(z), \psi_1(z), f_1(\tau, z)$, функції та коефіцієнти W_{ik}, θ_{ik} визначені в [5].

Ураховуючи той факт, що має місце оцінка [6]: $\alpha_k(0) \leq \frac{M}{k^3}$,

де $M = \frac{1}{\pi^3}\left|\xi_0^3 \cdot M_{c0}\right|$, $M_{c0} = \max_{0 \leq z \leq \xi_0}\left|\varphi''(z)\right|$, для оцінювання розв'язку системи рівнянь введемо заміну змінних: $\alpha_k^{(n)} = \frac{1}{k^3}A_k; \alpha_k^{(n)'} = \frac{1}{k^3}C_k$.

Для спрощення запису індекс *(n)* при A_k, C_k, ξ надалі будемо опускати. Від системи диференціальних рівнянь другого порядку перейдемо до системи рівнянь першого порядку.

У нових позначеннях рівняння наберуть вигляду:

$$A_k' = C_k \tag{9}$$

$$C_k' = -C_k - \frac{a^2 k^2 \pi^2}{\xi^2} A_k - k^4 \xi \left[\frac{2}{\xi} \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{i^3} W_{ik} - \frac{\mu(\tau)(-1)^k}{k^2 \pi} \right] - \frac{\xi' \cdot k^4}{\xi} \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{i^3} W_{ik} +$$

$$+ \frac{(\xi')^2 k^4}{(\xi)^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{i^3} W_{ik} + \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{i^3} \theta_{ik} \right] - \frac{\mu'(\tau) \cdot \xi \cdot k^2}{\pi} - \frac{k^2}{\pi} \{ \mu''(\tau) \cdot \xi + \mu'(\tau) \cdot \xi' +$$

$$+ \mu(\tau) \cdot \xi'' - \left(\mu'(\tau) \cdot \xi' - \frac{2\mu(\tau) \cdot (\xi')^2}{\xi} \right) (-1)^k \} + k^3 \int_0^{\xi} f_1 \sin \frac{k\pi z}{\xi} dz, \tag{10}$$

Запишемо рівняння (9) у вигляді:

$$C_k' = -p \cdot C_k - r_k. \tag{11}$$

де вираз для $r_к$ – це доданок, що залишився в цьому рівнянні. Для спрощення викладу індекс k опустимо.

Як відомо з [3], для розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку виду: $y' = -p(x)y + r(x)$, $p(x) > 0$; $y(0) = y_0$ справедливі оцінки

$$|y| \le |y_0| + \max_{0 \le s \le x} |r(s)| \cdot x; \quad |y| \le |y_0| + \frac{\max |r(s)|}{\min |p(s)|}, 0 \le s \le x.$$

Застосовуючи ці нерівності до рівняння (11), одержимо:

$$|C_k(\tau)| \le |C_k(0)| + \max |r_k(s)| \tau, \quad 0 \le s \le \tau;$$

$$|C_k(\tau)| \le |C_k(0)| + \max |r_k(s)|, \quad 0 \le s \le \tau, \tag{12}$$

де $C_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, n}$.

Нехай $C_k(\tau)$ набуває максимального значення при деякому значенні $\tau = \bar{t}, \{0 \le \bar{t} \le \tau\}$ Тоді правдиві нерівності:

$$|C_k(\bar{t})| \le \max |r_k(s)| \cdot \tau, \tag{13}$$

$$|C_k(\bar{t})| \le \max |r_k(s)|, 0 \le s \le \tau. \tag{14}$$

Дійсно, поклавши в нерівностях (12) $\tau = \bar{t}$, одержимо:

$$|C_k(\bar{t})| \le \max |r_k(s)| \cdot \bar{t}, \quad |C_k(\bar{t})| \le \max |r_k(s)|, \quad 0 \le s \le \tau. \tag{15}$$

Із того, що праві частини нерівностей (15) монотонно не спадають при зростанні τ, а праві частини нерівностей (12) більші відповідних правих частин нерівностей (14), випливає виконання (13) і (14).

Для рівнянь (9) правдива оцінка: $|A_k(\tau)| \le |A_k(0)| + \tau \cdot |C_k(\tau)|$.

Тепер доведемо, що розв’язок задачі єдиний. Припустимо, що існує ще один розв’язок задачі $\tilde{K}(z, \tau)$, який має неперервну другу похідну по z і τ. Зробимо над нею ті ж перетворення, що й над $K(z, \tau)$ [5]. Для всіх допоміжних величин, що відповідають $\tilde{K}(z, \tau)$, будемо використовувати ті ж позначення, тільки зі знаком ~ зверху.

Із неперервності $\frac{\partial^2 \tilde{K}(z, \tau)}{\partial x^2}$ випливає, що $\tilde{\alpha}_k \le \frac{M}{k^3}$, $\tilde{A}_k \le M$.

Крім того, правдиво [5] $\tilde{\xi} + \frac{1}{\tilde{\xi}} + (1 - \tilde{\xi}) + \frac{1}{1 - \tilde{\xi}} \le M$.

Складемо для $\tilde{C}_k$, $\tilde{A}_k$ задачі Коші, аналогічні (1)–(2).

Позначимо $\tilde{C}_k - C_k = \delta C_k$, , $\tilde{A}_k - A_k = \delta A_k$.

Для величини δC_k правдива оцінка:

$$|\delta C_k(\tau)| \le \tau \cdot \max \left\{ \frac{1}{\tau} \cdot \delta A_k(s) + \frac{k^2}{\tau} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta A_i(s)}{i^3} \cdot W_{ik} + k^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta C_i(s)}{i^3} \cdot W_{ik} + \right.$$

$$+k^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta A_i(s)}{i^3} \cdot W_{ik} + k^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta A_i(s)}{i^3} \cdot \theta_{ik} + \frac{1}{\tau}(\delta\xi^{'}(s) + \delta\xi(s)) + \delta\xi^{'}(s) + \delta\xi(s) + \delta\xi^{''}(s))\Big\}.$$

Підставляючи оцінки для $\delta\xi''(s), \delta\xi'(s), \delta\xi(s)$ у вираз для δC_k, знайдемо:

$$\sup|\delta C_k(s_l)| \le M$$
$$\sup\left|\delta A_k(s) + k^2 \cdot (1+\tau) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta A_i(s)}{i^3} \cdot W_{ik} + \left(1+\frac{1}{\tau}\right) k^2 \left(te^{Mt} + 1\right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta A_i(s)}{i^2} + \right.$$
$$\left. + k^2 \cdot \tau \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta C_i(s)}{i^3} \cdot W_{ik} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta A_i(s)}{i^3} \cdot \theta_{ik}\right)\right|, \tag{16}$$
$$0 \le s \le \tau.$$

Вважаючи, що для $0 \le s \le \tau$:

при $k \le m$ $\sup|\delta C_k| = \tilde{R}$, $\sup|\delta A_k| = \tilde{H}$,

при $k > m$ $\sup|\delta C_k| = \tilde{S}$, $\sup|\delta A_k| = \tilde{L}$,

одержимо:

$$\tilde{R} \le Mt(\tau + te^{(\tau+1)Mt} + 1)m^2(\tilde{H} + \frac{\tilde{L}}{m} + \tilde{R} + \frac{\tilde{S}}{m}); \quad \tilde{H} \le \tilde{R}t; \quad \frac{\tilde{L}}{m} \le \frac{\tilde{S}}{m}t.$$

Додавши ці нерівності, отримаємо:

$$\tilde{H} + \frac{\tilde{L}}{m} + \tilde{R} + \frac{\tilde{S}}{m} \le \beta(\tilde{H} + \frac{\tilde{L}}{m} + \tilde{R} + \frac{\tilde{S}}{m}), \tag{17}$$

де $\beta = M \cdot (\tau + te^{(\tau+1)Mt} + 1)(\frac{1}{m} + m^2 t)(t+1).$

Підберемо величини m і t так, щоб величина β була строго менша 1. Тоді з нерівності (17) випливає, що $\tilde{H} \equiv 0$; $\tilde{L} \equiv 0$; $\tilde{R} \equiv 0$; $\tilde{S} \equiv 0$. Отже, $\delta A_k, \delta C_k$ також тотожно дорівнюють 0; єдиність розв'язку задачі доведено.

Нехай промислове підприємство виробляє довільну кількість n видів продукції ($n \ge 1$), використовуючи при цьому m видів витрат. Позначимо через d_i рівень випуску продукції виду i, тоді загальний випуск продукції є n-вимірним вектором $d = (d_i)_{i=1,n}$. Враховуючи, що існують різні підходи до опису технологічних зв'язків між вектором випуску продукції і вектором витрат $x = (x_j)_{j=1,m}$, припустимо, що виробнича функція підприємства задається як векторна функція у просторі витрат R_+^m і залежить від приросту капіталу в зовнішньому економічному середовищі, тобто $F(\Pi, x)$, де $\Pi = \int_0^T K(\tau, z) d\tau$ – приріст капіталу на відрізку $[0, \xi(\tau)]$.

Таким чином, $F(\Pi, x) = \left(\Phi_i(\Pi, x^i)\right)_{i=1,n}$, $d_i = \left(\Phi_i(\Pi, x^i)\right)$, де $i = 1,..., n$ – окремі виробничі функції, $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i, \quad j = 1,..., m.$

Позначимо через $P = (P_i)_{i=1,n}$ – вектор цін продукції, де P_i – ціна однієї i-ї продукції. Тоді функція доходу D матиме вигляд

$$D = F(\Pi, x)P = \sum_{i=1}^{n} P_i \Phi_i(\Pi, x^i).$$

Функцію прибутку підприємства запишемо у вигляді

$$\Pi(\Pi, x) = F_p - xw = \sum_{i=1}^{n} P_i \Phi_i(\Pi, x^i) - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j,$$

де $w = (w_j)_{j=1,m}$ – вектор цін на витрати.

Отже, задача оптимізації, яка відповідає запропонованій економіко-математичній моделі, може бути сформульована таким чином: визначити такий вектор витрат $(x^1, x^2, ..., x^n)$, де $x^i = (x_j^i)_{j=1,m}$ – вектори окремих витрат на i-ту продукцію, щоб максимізувати прибуток

$$\Pi\left(\Pi, x^1, x^2, \ldots, x^n\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i \Phi_i\left(x^i\right) - \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_j^i\right) \to \max,$$

за обмежень $x^1 \geq 0,\ x^2 \geq 0, \ldots, x^n \geq 0$.

Для кожної виробничої функції $\Phi_i\left(x^i\right)$, пов'язаної з випуском i-го виду продукції, виконуються неокласичні умови оптимальності:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_j^i} = P_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j^i} - w_j \leq 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_j^i} x_j^i = \left(P_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j^i} - w_j\right) x_j^i = 0,$$

$$x_j^i \geq 0, i = 1, 2, \ldots n; \ j = 1, 2, \ldots m.$$

Висновки. Розроблено економіко-математичну модель циклічного зростання капіталу та його вплив на діяльність промислового підприємства для узагальнюючого випадку стосовно моделей [1, 4]. Запропоновано метод розв'язування задач для областей зі змінною межею, яка залежить від часу τ, доведено єдиність розв'язку такої задачі.

Література

1. Кондратьев Н. Д. Проблемы экономической динамики [Текст] / Н. Д. Кондратьев. – М. : Экономика, 1989. – 526 с.
2. Моргенштерн О. О точности экономико-статистических наблюдений [Текст] / О. Моргенштерн. – М. : Статистика, 1968.
3. Меньшиков С. М. Длинные волны в экономике [Текст] / С. М. Меньшиков, Л. А. Клименко. – М. : Международные отношения, 1989.
4. Николаев Л. К. О циклах экономической активности в процессе роста капитала [Текст] / Л. К. Николаев // Экономика и математические методы. – 2003. – Т. 39. – № 1. – С. 33–42.
5. Яковенко О. Г. Циклічні процеси у макромоделях економічної динаміки [Текст] / О. Г. Яковенко // Економічна кібернетика. – 2004. – № 5, 6.
6. Коряшкина Л. С. О решении одной задачи теплопереноса с фазовым превращением [Текст] / Л. С. Коряшкина, В. А. Яковенко // Зб. наук. праць "Питання прикладної математики і математичного моделювання". – Дніпропетровськ : ДНУ, 2003. – С. 100–113.