

Ю. В. Михлин, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”
Г. В. Руднева, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”
Н. В. Перепелкин, аспирант кафедры прикладной математики Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Розглядаються перехідні процеси в системі, що містить лінійний осцилятор і суттєво нелінійний віброгасник з відносно невеликою масою; в системі з вібро-ударним гасником, а також у неідеальній системі, що містить електродвигун з обмеженою потужністю. Для опису перехідних процесів використовується метод багатьох масштабів. Числове моделювання підтверджує ефективність отриманих аналітичних розв'язків.

Рассматриваются переходные процессы в системе, содержащей линейный осциллятор и существенно нелинейный виброгаситель с относительно небольшой массой; в системе с вибро-ударным гасителем, а также в неидеальной системе, содержащей электродвигатель ограниченной мощности. Для описания переходных процессов использован метод многих масштабов. Численное моделирование подтверждает эффективность полученных аналитических решений.

It is considered a transient in a system, which contains the linear oscillator and the essentially nonlinear absorber with comparatively small mass; in a system with the vibro-impact absorber, as well in the non-ideal system, containing a motor with limited power supply. The transient is described by the multiple scales method. Numerical simulation confirms an efficiency of the obtained analytical solutions.

Ключевые слова. Переходные процессы, виброгашение, метод многих масштабов, численное исследование методом Рунге–Кутты, двигатель.

Введение. Исследование переходных процессов играет важную роль в инженерии, в частности в проблемах виброгашения. В последние годы различные новые устройства применялись для гашения механических колебаний. Интересным является использование для этих целей нелинейных пассивных гасителей [1–5].

Постановка задачи. В данной работе рассмотрены переходные процессы в системе, содержащей линейный осциллятор, связанный линейной пружиной с существенно нелинейным гасителем со сравнительно малой массой. Предполагается, что линейная система подвергается некоторому начальному возмущению. Для построения переходного процесса используется метод многих масштабов [6]. Наблюдается перекачка энергии из линейной подсистемы в нелинейный гаситель. Подобный расчет был проведен и для системы, содержащей линейный осциллятор и вибро-ударный гаситель сравнительно малой массы. Рассматриваются также переходные режимы в системе, которая содержит линейную упругую подсистему с одной степенью свободы, получающую возбуждение от двигателя ограниченной мощности и, в свою очередь, оказывающую влияние на источник энергии. Такой источник энергии называется неидеальным [7, 8].

Переходный процесс в системе с существенно нелинейным гасителем

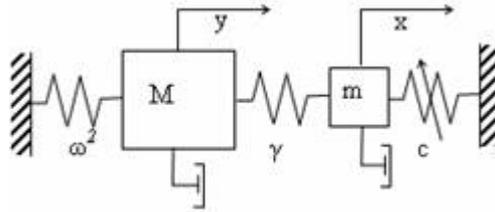


Рис. 1. Система, содержащая существенно нелинейный гаситель колебаний

Рассмотрим систему двух связанных осцилляторов, а именно линейного и существенно нелинейного со сравнительно малой массой (рис. 1). Данная система может быть описана следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon m \dot{x} + \varepsilon c x^3 + \varepsilon^2 \delta x + \varepsilon \gamma (x - y) = 0, \\ M \ddot{y} + \omega^2 y + \varepsilon^2 \delta y + \varepsilon \gamma (y - x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где ε – малый параметр.

Решение системы (1) найдем методом многих масштабов [6]. При этом используются следующие разложения:

$$\begin{aligned} x &= x_0(t_0, t_1, t_2, \dots) + \varepsilon x_1(t_0, t_1, t_2, \dots) + \varepsilon^2 x_2(t_0, t_1, t_2, \dots) + \dots, \\ y &= y_0(t_0, t_1, t_2, \dots) + \varepsilon y_1(t_0, t_1, t_2, \dots) + \varepsilon^2 y_2(t_0, t_1, t_2, \dots) + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где $t_0 = t, t_1 = \varepsilon t, t_2 = \varepsilon^2 t, \dots, t_n = \varepsilon^n t, \dots$, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{dt_0}{dt} + \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{dt_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{dt_2}{dt} + \dots =$

$$= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t_3} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \varepsilon^3 D_3 + \dots$$

и т. д.

Для нахождения нулевого приближения по малому параметру выпишем соответствующее уравнение:

$$\varepsilon^0 : M D_0^2 y_0 + \omega^2 y_0 = 0. \text{ Решением этого уравнения является функция } y_0 = A_1(t_1, t_2, \dots) \cos \psi_0, \text{ где}$$

$$\psi_0 = \Omega t_0 + \varphi_0(t_1, t_2, \dots), \quad \Omega^2 = \frac{\omega^2}{M}.$$

Для определения следующего приближения по малому параметру получаем уравнения:

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} m D_0^2 x_0 + c x_0^3 + \gamma (x_0 - y_0) = 0, \\ M D_0^2 y_1 + 2 M D_0 D_1 y_0 + \omega^2 y_1 + \gamma (y_1 - x_0) = 0. \end{cases}$$

Приближенное решение первого из этих уравнений принимается в таком виде: $x_0 = B_1(t_1, t_2, \dots) \cos \psi_0 + B_2(t_1, t_2, \dots) \cos \psi_1$, где $\psi_1 = \bar{\Omega}(t_1, t_2, \dots) t_0 + \varphi_1(t_1, t_2, \dots)$.

Приравнявая коэффициенты при косинусах в первом уравнении и исключая секулярные члены во втором, получим следующие нелинейные функциональные уравнения:

$$\begin{cases} -m B_1 \Omega^2 + c \left(\frac{1}{4} B_1^3 + \frac{1}{4} B_1 B_2^2 \right) + \gamma B_1 = \gamma A_1 \\ \gamma - m \bar{\Omega}^2 + \frac{1}{4} c B_2^2 + \frac{1}{4} c B_1^2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 M A_1 \Omega \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} + \gamma B_1 - \gamma A_1 = 0 \\ \frac{\partial A_1}{\partial t_1} = 0 \end{cases}$$

Таким образом, $A_1 = A_1(t_1, t_2, \dots)$, $\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} = \frac{\gamma(A_1 - B_1)}{2 M A_1 \Omega}$.

Пропуская для краткости изложения определение решений следующих приближений, приведём окончательные выражения для амплитуд, частот и фаз решения нулевого приближения

$$x_0, y_0: \quad B_2 = \varepsilon(t_1, t_1, \dots) e^{-\frac{\gamma}{2} t_1}, \quad B_1 = c_1(t_1, t_1, \dots) + c_2(t_1, t_1, \dots) e^{-\frac{\gamma}{2} t_1}, \quad A = \frac{\gamma - m\Omega^2}{\gamma} c_0 + \frac{3}{4\gamma} c c_0^3,$$

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{1}{m} \left(\gamma + \frac{1}{4} c B_2^2 + \frac{1}{2} c B_1^2 \right) = \frac{1}{m} \left(\gamma + \frac{1}{2} c c_0^2 \right),$$

[после усреднения по времени]

$$\varphi_0 = \frac{\gamma}{2M\Omega} t_1 - \frac{\gamma}{2M\Omega A} \left(c_0 t_1 - c_1 \frac{m}{\delta} e^{-\frac{\gamma}{2} t_1} \right) + c_2^*, \quad \text{где} \quad c_2^* = \frac{\frac{1}{4} c c_0^3 c_1}{m\Omega^2 - \gamma - \frac{3}{4} c c_0^2}.$$

Итак, получено нулевое приближение искомого решения, содержащее четыре функции, которые превращаются в постоянные, если не учитывать временные масштабы высших порядков:

$c_1^* = c_1^*(t_1, t_1, \dots)$, $c_2^* = c_2^*(t_1, t_1, \dots)$, $c_3^* = c_3^*(t_1, t_1, \dots)$, $F = F(t_1, t_1, \dots)$. Эти постоянные определяются численно методом Ньютона из начальных условий вида $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = V$, которые моделируют удар по линейной подсистеме. Рис. 2 представляет численные решения системы, найденные методом Рунге–Кутты, и аналитические решения для различных начальных скоростей V . Можно обнаружить хорошее совпадение аналитических и численных решений для достаточно большого времени расчета.

Переходный процесс в вибро-ударной системе. Рассмотрим вибро-ударную систему, которая содержит линейный осциллятор и гаситель сравнительно малой массы с односторонним ограничителем (рис. 3). Для описания переходного процесса вновь используем метод многих масштабов.

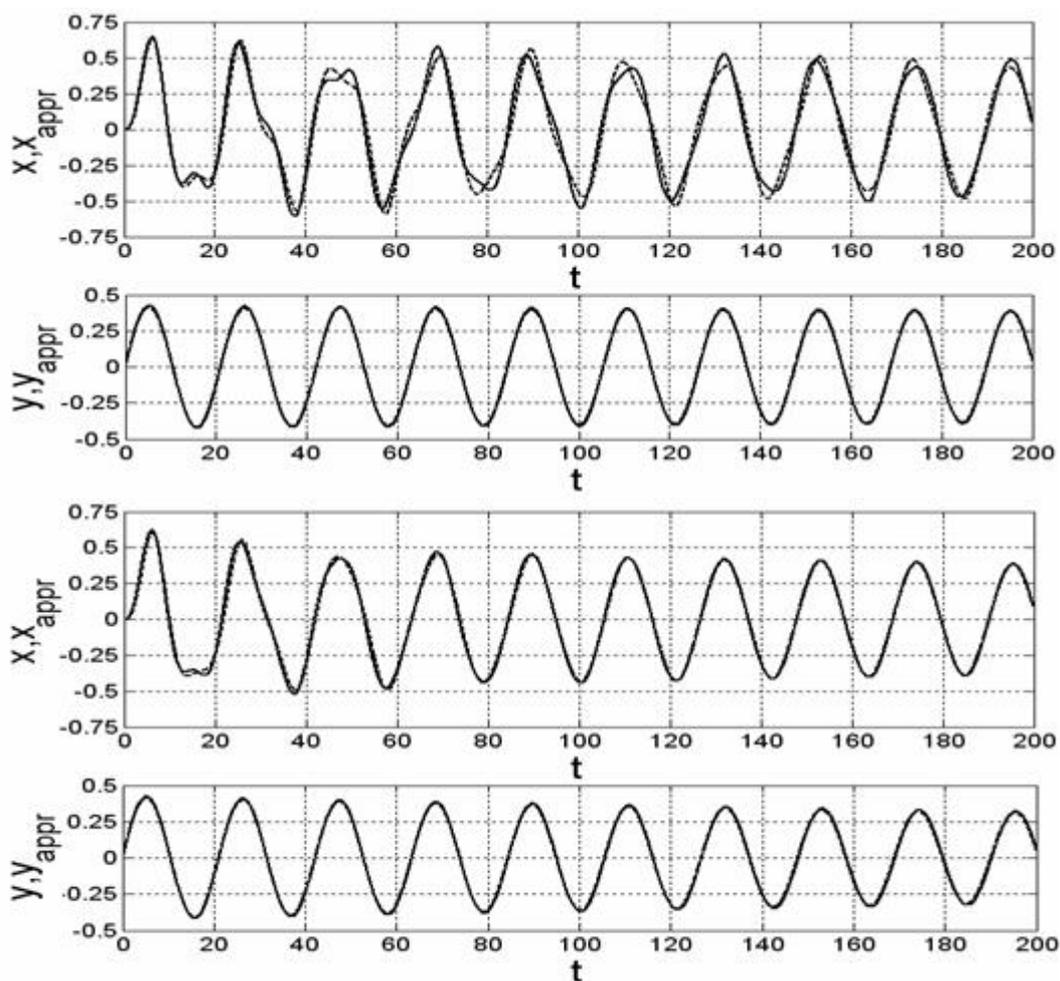


Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений для различных начальных значений

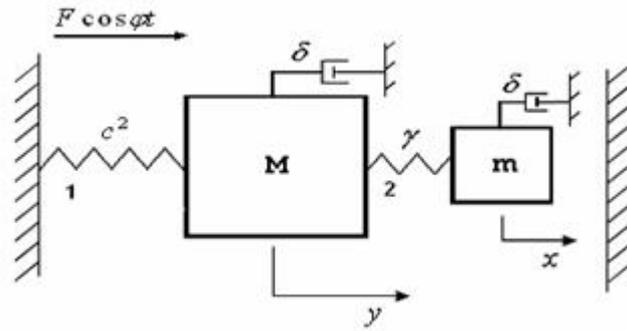


Рис. 3. Рассматриваемая вибро-ударная система

Уравнения свободных колебаний здесь имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon m \ddot{x} + \varepsilon \gamma (x - y) + \varepsilon^3 \delta \dot{x} = 0; \\ M \ddot{y} + c^2 y + \varepsilon \gamma (y - x) + \varepsilon^3 \delta \dot{y} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где M – масса главной линейной системы; m – масса гасителя; δ характеризует линейную силу трения, γ и c^2 – коэффициенты упругости пружин. Малый параметр ($\varepsilon \ll 1$) введён для того, чтобы показать малость массы гасителя, а также диссипации и связи между осцилляторами. Предполагается, что удар в системе происходит в системе мгновенно. Коэффициент восстановления e ($0 \leq e \leq 1$) характеризует потери скорости в момент удара. Таким образом, имеем следующие условия удара:

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) = x_{\max}, \quad \dot{x}(t_k^+) = -e \dot{x}(t_k^-), \quad y(t_k^+) = y(t_k^-), \quad \dot{y}(t_k^+) = \dot{y}(t_k^-). \quad (4)$$

Здесь t_k – момент удара (k – номер удара), t_k^- – момент перед ударом, t_k^+ – момент после удара, x_{\max} – расстояние между положением равновесия и ограничителем. Для построения аналитического решения методом многих масштабов используются выражения (2). В нулевом приближении получаем решение в таком виде:

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0(t_1, t_2, t_3, \dots) \cos \Omega_0 t_0 + B_0(t_1, t_2, t_3, \dots) \sin \Omega_0 t_0, \\ x_0 &= \beta (A_0(t_1, \dots) \cos \Omega_0 t_0 + B_0(t_1, \dots) \sin \Omega_0 t_0) + \\ &+ A_1(t_1, \dots) \cos \sqrt{\gamma/m} t_0 + B_1(t_1, \dots) \sin \sqrt{\gamma/m} t_0. \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Omega_0^2 = c^2/M$, $\beta = \frac{\gamma}{m(\gamma/m - \Omega_0^2)}$.

Исключая секулярные члены в следующем приближении по малому параметру, определим выражения для амплитуд нулевого приближения: $A_0 = -C_1 \sin \Omega_1 t_1 + C_2 \cos \Omega_1 t_1$, $B_0 = C_1 \cos \Omega_1 t_1 + C_2 \sin \Omega_1 t_1$.

где $\Omega_1 = \frac{\gamma(\beta - 1)}{2M\Omega_0}$. В результате получаем приближенное решение:

$$\begin{aligned} x &= \beta (\cos \Omega_1 t \cdot (-R_1 C_1 + R_2 C_2) + \sin \Omega_1 t \cdot (R_1 C_1 + R_2 C_2)) + e^{-\varepsilon t} \{C_1 \sin \beta_1 t + C_2 \cos \beta_1 t\}, \\ y &= C_1 \sin \Omega_2 t + C_2 \cos \Omega_2 t + \varepsilon \beta_1 e^{-\varepsilon t} \{C_1 \sin \beta_1 t + C_2 \cos \beta_1 t\}. \end{aligned} \quad (6)$$

где $R_1 = \frac{\varepsilon \delta \Omega}{m(\gamma/m - \Omega^2)}$, $R_2 = 1 - \frac{2\varepsilon \Omega \Omega_0}{\gamma/m - \Omega^2}$, $\beta_1 = \sqrt{\gamma/m} - \beta_1 \varepsilon$, $\Omega_2 = \Omega - \varepsilon \Omega_1$.

Из условий удара (4) определяется связь между коэффициентами C_i до (C_i^*) и после (C_i^{*-d}) удара.

Численное исследование было проведено методом Рунге–Кутты 4-го порядка с переменным шагом в окрестности точек удара для следующих значений параметров: $M = 1$, $m = 1$, $\varepsilon = 0,01$, $\delta = 10$, $e = 0,9$, $x_{\max} = 1,4$, $\gamma = 1,5$, $c = 1$. При этом выбирались начальные условия вида $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0^* = 1$.

Сравнение аналитического и численного решений показало хорошую точность аналитического приближения (рис. 4).

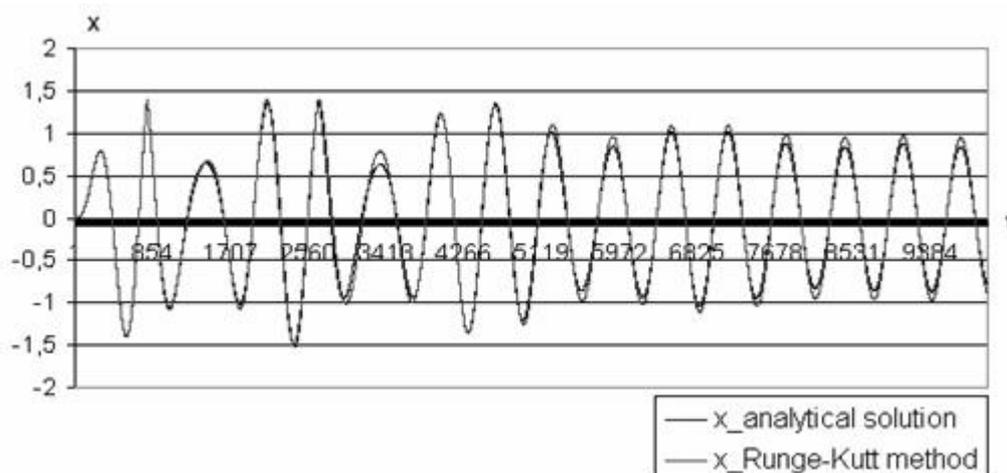


Рис. 4. Переходный процесс в случае свободных колебаний вибро-ударной системы. Удар проходит при $x_{\max} = 1,4$

Переходный процесс в неидеальной системе. Рассмотрим колебания системы, которая содержит линейную упругую подсистему с одной степенью свободы, получающую возбуждение от двигателя и, в свою очередь, оказывающую влияние на источник энергии. Подобный источник энергии называется неидеальным. Рассматриваемая модель, изображенная на рис. 5, изучалась, в частности, в работах [7, 8].

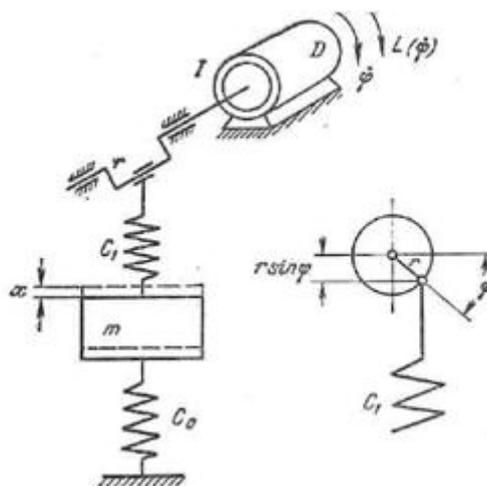


Рис. 5. Модель системы с неидеальным источником энергии

Во время вращения двигателя D кривошип, радиус которого r , деформирует упругую связь c_1 , благодаря чему создается сила $c_1 r \sin(\varphi)$ и ее момент $c_1 r \sin(\varphi) r \cos(\varphi)$. Уравнения движения системы имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = c_1 r \sin(\varphi) \\ J\ddot{\varphi} = L(\varphi) - H(\varphi) + c_1 r (x - r \sin(\varphi)) \cos(\varphi), \end{cases} \quad (7)$$

где m – масса колебательной системы, $c = c_0 + c_1$ – ее жесткость, J – момент инерции вращающихся масс. В уравнениях учтены: диссипация, взятая в виде линейной функции скорости $\beta\dot{x}$; момент сил сопротивления вращению ротора в виде заданной функции $H(\varphi)$ и движущий момент источника энергии $L(\varphi)$ (характеристика двигателя). Примем в качестве источника энергии электродвигатель постоянного тока с параллельным возбуждением. Его механическая характеристика имеет вид $L = a + b\dot{\varphi}$ (a, b – некоторые известные постоянные). Момент сил сопротивления, приложенный к валу двигателя, также представим в виде линейной функции $H = d\dot{\varphi}$.

Рассматривается переходный процесс, то есть процесс разгона из положения покоя и выход на стационарные режимы движения. Считаем малым трение, а также слагаемые, характеризующие

взаимодействие колеблющейся массы и двигателя. Проведем теперь обезразмеривание системы, выбрав характерные масштабы времени и перемещений и полагая, что ε – малый параметр:

$$y = x/r, \quad \tau = \omega t, \quad M = A/(I\omega^2), \quad N = B/(I\omega^2), \quad \varepsilon g = c_1 r^2 / (I\omega^2), \quad \varepsilon k = c_1 / (m\omega^2), \quad \varepsilon h = \beta / (m\omega).$$

В результате уравнения движения принимают такой вид:

$$\begin{aligned} y'' + \varepsilon^2 y' + \omega^2 y &= \varepsilon k \sin \varphi, \\ k\varphi'' &= M - N\omega + \varepsilon g (y \cos \varphi - 0,5 \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее вновь используется метод многих масштабов. В нулевом приближении по малому параметру получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \quad & \begin{cases} D_0^2 y_0 + y_0 = 0 \\ D_0^2 \varphi_0 = M - N\omega D_0 \varphi_0 \end{cases} \\ y_0 &= A_0(T_1, T_2) \sin(T_0 + \Psi_0(T_1, T_2)) \\ \varphi_0 &= \Phi_0(T_1, T_2) + \frac{M}{N\omega} T_0 + F_0(T_1, T_2) \frac{1}{N\omega} e^{-N\omega T_1}. \end{aligned}$$

Заметим, что последнее слагаемое в выражении для φ_0 за чрезвычайно короткий промежуток времени становится пренебрежимо малым. Опуская дальнейшие преобразования, запишем до сих пор неопределенные функции, входящие в решение нулевого приближения. Их можно получить из условия отсутствия секулярных членов в решении уравнений первого приближения.

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial A_0}{\partial T_1} - A_0 &= 0 \rightarrow A_0 = A_1(T_2) e^{-kT_1/N} \\ -A_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial T_1} &= 0 \rightarrow \Psi_0 = \Psi_1(T_2) \\ -N\omega \frac{\partial \Phi_0}{\partial T_1} &= 0 \rightarrow \Phi_0 = \Phi_1(T_2). \end{aligned} \quad (9)$$

В двух приближениях метода многих масштабов получаем:

$$\begin{aligned} y(\tau) &= A_1(T_2) e^{-k\tau/N} \sin(T_0 + \Psi_1(T_2)) + \varepsilon k (1 - \Theta^2)^{-1} \sin(\Phi_1(T_2) + \Theta T_0), \\ \varphi(\tau) &= \Phi_1(T_2) + \Theta T_0 + F_1(T_2) \frac{1}{N\omega} e^{-N\omega \tau} + \\ &+ \varepsilon \left[-\frac{g}{2} A_1(T_2) e^{-k\tau/N} \frac{1}{\sqrt{(N\omega)^2 + (1 - \Theta)^2}} \frac{1}{|1 - \Theta|} \sin((1 - \Theta)T_0 + \Psi_1 - \Phi_1 + \arctg\left(\frac{N\omega}{1 - \Theta}\right)) \right] + \\ &+ \varepsilon \left[-\frac{g}{2} A_1(T_2) e^{-k\tau/N} \frac{1}{\sqrt{(N\omega)^2 + (1 + \Theta)^2}} \frac{1}{|1 + \Theta|} \sin((1 + \Theta)T_0 + \Psi_1 + \Phi_1 + \arctg\left(\frac{N\omega}{1 + \Theta}\right)) \right] + \\ &+ \varepsilon \left[\frac{g}{2} \frac{1}{\sqrt{(N\omega)^2 + (2\Theta)^2}} \frac{1}{|2\Theta|} \sin(2\Theta T_0 + 2\Phi_1 + \arctg\left(\frac{N\omega}{2\Theta}\right)) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\Theta = M/(N\omega)$.

Данное решение описывает переход системы к стационарному режиму вращения ротора двигателя с угловой скоростью Θ , на которое накладывается малая составляющая с частотой 2Θ . Колебания линейной упругой подсистемы происходят с частотой, равной угловой скорости вращения двигателя и небольшими амплитудами. Численная проверка решения (10) показывает хорошую точность этого аналитического решения.

Режимы, приближающиеся при некоторых параметрах системы к резонансным, должны быть получены при другой оценке малости слагаемых в уравнениях движения системы.

Выводы. Результаты представленного анализа показывают эффективность метода многих масштабов для аналитического представления переходных процессов как в системах с существенно нелинейными гасителями, так и в неидеальных системах. Численное моделирование подтвердило точность полученных аналитических результатов.

Литература

1. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем [Текст] / М. З. Коловский. – М. : Наука, 1966. – 317 с.
2. Shaw J. On the response of the non-linear vibration absorber [Text] / J. Shaw, S. Shaw, A. J. Haddow // Int. Journal of Nonlinear Mechanics. – 1989. – Vol. 24. – P. 281–293.
3. Вибрации в технике [Текст] / под ред. К. В. Фролова. – М. : Машиностроение, 1995. – 456 с.
4. Cuvalci O. Pendulum as vibration absorber for flexible structures: experiments and theory [Text] / O. Cuvalci, A. Ertas // Trans. of the ASME. Journal of Vibration Acoustics. – 1996. – Vol. 118. – P. 558–566.
5. Mikhlin Yu. V. Dynamical interaction of an elastic system and essentially nonlinear absorber [Text] / Yu. V. Mikhlin, S. N. Reshetnikova // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – V. 283 – P. 91–120.
6. Avramov K. V. Snap-through truss as a vibration absorber [Text] / K. V. Avramov, Yu. V. Mikhlin // Journal of Vibration and Control. – 2004. – V. 10. – P. 291–308.
7. Найфэ А. Введение в методы возмущений [Текст] / А. Найфэ. – М. : Мир, 1984. – 536 с.
8. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением [Текст] / В. О. Кононенко. – М. : Наука, 1985. – 254 с.
9. Алифов А. А. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии [Текст] / А. А. Алифов, К. В. Фролов. – М. : Наука, 1985. – 327 с.