УДК 539.3

І. В. Андріанов, доктор фізико-математичних наук, професор, науковий співробітник Інституту механіки Вищої технічної школи землі Північний Рейн – Вестфалія, Аахен, Німеччина
А. М. Пасічник, доктор фізико-математичних наук, професор, академік МАКНС, професор кафедри транспортних систем та технологій Академії митної служби України

ПОБУДОВА РОЗВ’ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ

На прикладі задачі коливань стрижня показано можливість побудови розв’язку задач динаміки розподілених систем з нелінійними крайовими умовами із застосуванням методу збурення та апроксимації Паде.

На примере задачи о колебаниях стержня показана возможность построения решения задач динамики распределенных систем с нелинейными краевыми условиями с применением методов возмущения и аппроксимации Паде.

By the example of tasks of rod vibrations the possibility of construction of decisions of the dynamics tasks of distributed systems with nonlinear boundary conditions using the perturbation method and Pade approximation is shown.

Ключові слова. Коливання механічних систем, нелінійна динаміка, метод збурень, нелінійні крайові умови, апроксиманти Паде.

Вступ. Стрімкий розвиток різних галузей машинобудування передбачає широке застосування у функції конструктивних вирішень пластин та стрижневих систем і ставить нові вимоги до міцності та надійності таких конструкцій. Особливо важливий клас задач, пов’язаних з урахуванням нелінійного характеру крайових умов. Тому вдосконалення методів розрахунку динамічних характеристик пластин і стрижневих систем – проблема досить актуальна.

Проблемі врахування нелінійного характеру крайових умов під час дослідження коливань механічних систем присвячено значну кількість праць, у яких використовуються різні варіанти методу малого параметра [1, 2, 3] та варіаційні підходи [4, 5]. При цьому для малих значень коефіцієнта нелінійності (α<<1) задача ефективно розв’язується методом збурень. У разі суттєво нелінійного характеру крайових умов (α~1) побудова розв’язку знач-
но ускладнюється і зводиться до розв’язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, для побудови розв’язків якої можна застосувати метод урізання, що призводить до значних ускладнень навіть за невеликої кількості рівнянь.

У цій статті для побудови асимптотичного розв’язку задачі подовжніх коливань стрижня використовується “метод малих δ” [6], відповідно до якого малий параметр уводиться в показник степеня нелінійності, а потім реалізується процедура асимптотичного інтегрування.

Постановка завдання. Розглянемо задачу подовжніх коливань стрижня з урахуванням нелінійності умов його закріплення. Крайова задача в даному випадку запишеться так [7]:

$$u_{tt} = u_{xx}, \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \tag{2}$$

$$u_x(l, t) + u(l, t) + u^3(l, t) = 0. \tag{3}$$

За “методом малих δ” уведемо в показник степеня нелінійності члена в крайових умовах (3) параметр δ:

$$u^3(l, t) = u^{1+2\delta}. \tag{4}$$

Розв’язок крайової задачі (1)−(3) подамо у вигляді асимптотичного ряду за степенями параметра δ:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k u_k. \tag{5}$$

Уведемо також заміну змінної часу:

$$t = \tau/\omega \tag{6}$$

та подамо частоту ω у вигляді розкладення за степенями параметра δ:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta^j\right), \tag{7}$$

де α_i – невідомі коефіцієнти розкладення, що необхідно визначити.

Нелінійний член (4) також подамо у вигляді розкладення:

$$u^3 = u^{1+2\delta} = u\,[1 + \delta\,(\ln(u^2)) + \delta/2\,(\ln(u^2))^2 + \ldots\,]. \tag{8}$$

Згідно з методологією асимптотичного підходу підставимо співвідношення (4)–(8) у вихідну крайову задачу (1)–(3) і, виконуючи розщеплення за параметром δ, отримаємо таку рекурентну послідовність крайових задач:

$$u_{0tt} = u_{0xx}, \tag{9}$$

$$u_i(0, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots\;, \tag{10}$$

$$u_{itt} = u_{ixx} - \sum_{j=0}^{i} \alpha_{j(i-j)} u_{jtt},\; i = 1, 2, 3, \ldots\;,\; \alpha_0 = 0, \tag{11}$$

$$\text{при } x = l \quad u_{0x} + 2u_0 = 0, \tag{12}$$

$$u_{1x} + 2u_1 = -u_0 \ln(u_0^2), \tag{13}$$

$$u_{2x} + 2u_2 = -u_1 \ln(u_0^2) - 2u_1 - 0{,}5\, u_0\, [\ln(u_0^2)]^2. \tag{14}$$

…………………………………………………………………….

Результати дослідження. Побудова розв’язку нульового наближення. Розв’язок крайової задачі (9), (10), (12) в нульовому наближенні подаємо у такому вигляді

$$u_0 = A \sin(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t), \tag{15}$$

де частота ω_0 визначається з такого трансцендентного рівняння

$$-\,\omega_0/(2\pi) = \operatorname{tg}\,\omega_0. \tag{16}$$

Розрахунок перших десяти ненульових значень ω_0 наведено в табл. 1.

Розв’язок трансцендентного рівняння (16) при $k \to \infty$ має вигляд

$$\omega_0^{(k)} \to \pi/2\,(2k + 1). \tag{17}$$

Таблиця 1

Числові значення параметра ω_0

$\omega_0^{(1)}$	$\omega_0^{(2)}$	$\omega_0^{(3)}$	$\omega_0^{(4)}$	$\omega_0^{(5)}$	$\omega_0^{(6)}$	$\omega_0^{(7)}$	$\omega_0^{(8)}$	$\omega_0^{(9)}$	$\omega_0^{(10)}$
2,289	5,087	8,096	11,173	14,276	17,393	20,518	23,646	26,778	29,912

Побудова розв’язку першого наближення. З урахуванням отриманого розв’язку нульового наближення крайова задача першого наближення запишеться так:

$$u_{1xx} - u_{1tt} = \alpha_1 A \omega_0^2 \sin(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t), \tag{18}$$

$$u_1(0, t) = 0, \tag{19}$$

при $x = l$

$$u_{1x} + 2u_1 = A \sin\omega_0 \sin(\omega_0 t) \ln(A^2 \sin^2 \omega_0) - A \sin\omega_0 \sin(\omega_0 t) \ln(\sin^2 \omega_0). \tag{20}$$

Загальний розв’язок крайової задачі першого наближення складається з частинного розв’язку рівняння (18) та розв’язку відповідного однорідного рівняння.

Частинний розв’язок рівняння (18), що задовольняє крайову умову (19), має такий вигляд:

$$u_1^{(1)} = \alpha_1\, x\, A \sin(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t). \tag{21}$$

Сталу величину α_1 визначаємо з умови компенсації резонансної складової

$$\alpha_1 = \frac{\ln(A^2 \sin^2 \omega_0) + 0{,}5 - \ln 2}{(6 + \omega_0^2)}. \qquad (22)$$

Праву частину крайової умови (20) подамо так:

при $x = l$ $$u_{1x} + 2u_1 = A_1 \sum_{k=1}^{\infty} T_k \sin(k\omega_0 t), \qquad (23)$$

де $A_1 = -A \sin \omega_0$;

$$T_k = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \sin(k\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \ln\left(\sin^2(\omega_0 t)\right) dt.$$

Розрахунок перших десяти ненульових значень періоду коливань T_k наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Числові значення параметра T_k

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
– 0,193	0	– 0,25	0	– 0,083	0	– 0,042	0	– 0,025	0

Розв'язок однорідного рівняння запишеться так:

$$u_1^{(1)} = A_1 \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)} \sin(k\omega_0 x) \sin(k\omega_0 t), \qquad (24)$$

де $T_k^{(1)} = \dfrac{T_k}{k\,\omega_0 \cos(k\omega_0) + 2\sin(k\omega_0)}$.

Остаточно повний розв'язок задачі у першому наближенні матиме такий вигляд:

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)}. \qquad (25)$$

Побудова розв'язку другого наближення. Для цього праву частину крайової умови (14) подамо в такому вигляді:

при $x = l$ $$u_{2x} + 2u_2 = 2\,u_1 - 0{,}5\ln(u_0^2)\,[2u_1 + u_0 \ln(u_0^2)] = -2\,u_1 - 0{,}5\ln(u_0^2)\,u_{1x}. \qquad (26)$$

Виокремимо у правій частині крайової умови (26) резонансну гармоніку:

при $x = l$ $$u_{2x} + 2\,u_2 = -R_2 A \sin\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \varphi(t), \qquad (27)$$

де $R_2 = 0{,}5\{x_1[4 + \omega_0(\omega_0 + 2)\ln(A^2 \sin^2\omega_0) + 0{,}5 - \ln 2] + \beta\}$,

$$\beta = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \left[\sin(\omega_0 t) \ln\left(\sin^2(\omega_0 t)\right) \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)} \cos(\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t) \right] dt,$$

через $\varphi(t)$ позначено суму резонансних гармонік.

Побудуємо частинний розв'язок рівняння (27), який задовольняє крайову умову (10) для резонансної правої частини

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} &= \alpha_2 A\omega_0^2\, x \cos(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t) + \\ &+ \alpha_1^2 A\omega_0^3\, x^2 \cos(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t) - \alpha_1^2 A\omega_0^2\, x \sin(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t) = \\ &= A \sin(\omega_0 t)\, \omega_0^2\, [\alpha_2\, x \cos(\omega_0 x) + \alpha_1^2\, x(x\,\omega_0 \cos(\omega_0 x) - \sin(\omega_0 x))]. \qquad (26) \end{aligned}$$

Стала величина α_2 визначається з умови виключення резонансних членів у правій частині крайової умови (26). У результаті отримуємо такий вираз

$$\alpha_3 = \frac{R_3 - \alpha_1^3 \omega_0 (9 + \omega_0^2)}{\omega_0 (6 + \omega_0^2)}. \qquad (27)$$

Отже, із точністю до членів третього порядку малості за параметром δ шукану частоту коливань можна подати так:

$$\omega \cong \omega_0 \sqrt{1 + \alpha_1 \delta + \alpha_3 \delta^3}. \qquad (28)$$

Застосовуючи апроксимацію Паде до розкладення (28), отримаємо уточнений розв’язок задачі в такому вигляді:

(29)

Висновки. Побудований розв’язок дає задовільні результати для низьких значень частоти коливань. Для випадку високих частот коливань необхідно застосовувати асимптотичне розвинення за величинами, оберненими частоті ω. Запропонований метод допускає узагальнення для побудови розв’язків та дослідження більш складних дво- і тривимірних систем.

Література

1. Андрианов И. В. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями [Текст] / И. В. Андрианов, О. Н. Сазонец // Прикл. пробл. прочности и пластичности. – М. : Тов. научн. изд. КМК, 1999. – С. 55–60.

2. Милосердова И. В. Импульсные волны в одномерной системе с нелинейными границами [Текст] / И. В. Милосердова, А. И. Потапов, А. А. Новиков // Волны и дифракция. – 1987. – Т. 27. – № 2. – С. 296–301.

3. Найфэ А. Методы возмущений [Текст] / А. Найфэ. – М. : Мир, 1984. – 546 с.

4. Голоскоков Е. Г. Нестационарные колебания деформируемых систем [Текст] / Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов. – К. : Наукова думка, 1977. – 356 с.

5. Муницын А. И. Собственные колебания балки с нелинейными опорами [Текст] / А. И. Муницын // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 1998. – № 2. – С. 36–39.

6. Bender C. M. A new perturbative approach to nonlinear partial differential equations [Text] / C. M. Bender, S. Boettcher, K. M. Milton // J. Math. Phys. – 1991. – Vol. 32. – № 11. – P. 3031–3038.

7. Каудерер Г. Нелинейная механика [Текст] / Г. Каудерер. – М. : ИЛ, 1961. – 778 с.

8. Andrianov I. V. Asymptotic investigation of the nonlinear dynamics boundary value problem for rods [Text] / I. V. Andrianov, V. V. Danishevsky // Technische Mechanik. – 1995. – Vol. 15. – № 1. – P. 53–55.