УДК 621.454.3

В. О. Яковенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних систем та технологій Академії митної служби України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕЖИМІВ РОБОТИ АПАРАТУРИ МИТНОГО КОНТРОЛЮ В УМОВАХ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

У статті розглядається вплив природних явищ, таких як вологість і підвищення температури на радіоелектронну апаратуру, що використовується для митного контролю.

В статье рассматривается влияние природных явлений, таких как влажность и повышение температуры, на радиоэлектронную аппаратуру, которая используется для таможенного контроля.

In the article examined. Influence of the natural phenomena, such as, humidity and increase of temperature on a radio electronic apparatus, which is used for custom control.

Ключові слова. Радіоелектронні пристрої, тепловий режим, вологий режим.

Вступ. Прилади митного контролю, як правило, працюють у складному тепловому та вологому режимі, що може призвести до істотного порушення точності вимірювань. Так, радіоелектронний апарат (РЕА), який переноситься із середовища з низькою температурою в середовище з більш високою, перебуває у складному динамічному та вологому режимі.

Окрім того, визначення теплового режиму РЕА пов'язано з труднощами врахування взаємодії елементів РЕА з джерелами тепла. Один із підходів до такої проблеми – наближений аналіз, де використовуються загальні закономірності теплообміну системи тіл.

Постановка завдання.

Теплоперенос. Розглянемо вологе тіло у вигляді необмеженої пластини товщини l. На поверхні $z = 0$ матеріалу передається теплова енергія випромінювання, густина потоку якого дорівнює $q(\tau)$. Припустімо, що на поверхні $z = 1$ під дією джерела тепла випаровується волога і пара транспортується в навколишнє середовище. Перенос пари через поверхню $z = 0$ неможливий. Межа фазового перетворення $\xi(\tau)$ визначає змінну товщину сухої області.

Тоді для сухої області:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, \quad (0 < z < \xi(\tau)), \tag{1}$$

$$T_1(0,z) = \varphi_1(z),$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = q(\tau),$$

$$T_1(\tau, \xi(\tau)) = \varphi_2(t),$$

волога область:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{Q}{c\rho_1}, \quad (\xi(\tau) < z < l), \tag{2}$$

$$T_2(0,z) = \varphi_1(z),$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}\bigg|_{z=1} = (1-\varepsilon) q(\tau),$$

$$T_2(\xi(\tau), \tau) = \varphi_2(\tau),$$

межа областей:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}\bigg|_{z=\xi} - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}\bigg|_{z=\xi} = m(\tau)\varepsilon + (c_2\rho_2 - c_1\rho_1)\varphi_2(\tau)\frac{d\xi}{d\tau}, \tag{3}$$

$$T_1(\xi(\tau),\tau) = T_2(\xi(\tau),\tau), \tag{4}$$

$$\xi(0) = \xi_0,$$

де ε – критерій фазового перетворення рідини на пару, T – температура, τ – час, φ(τ), m(τ) – будь-яка неперервна функція часу, a – коефіцієнт температуропровідності, λ – коефіцієнт теплопровідності, ρ – густина, c – питома теплоємкість, Q – об’ємна густина теплового потоку.

Результати дослідження. Для розв’язання рівнянь з відповідними крайовими умовами (1)–(4) застосуємо метод скінченних інтегральних перетворень.

Скінченне інтегральне косинус-перетворення Фур’є зі змінною верхньою межею і формула перетворення визначаються, відповідно, виразами:

$$\tilde{T}_{1n}(\tau) = \int_0^{\xi(\tau)} T_1(\tau, z)\cos\alpha_n z/\xi\, dz,$$

$$T_1(\tau, z) = \frac{2}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{1n}(\tau)\cos\alpha_n z/\xi, \tag{5}$$

де $\alpha_n = \pi(2n-1)/2$, $\cos\alpha_n z/\xi$ – “фіксовані” власні функції.

Коефіцієнти $\tilde{T}_{1n}(\tau)$ визначимо із систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\tilde{T}_{1n}}{d\tau} = \frac{1}{2\xi}\frac{d\xi}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}\tilde{T}_{1m} - \left(\frac{\alpha_n}{\xi}\right)^2 a_1 \tilde{T}_{1n} + a_1\left[\frac{q(\tau)}{\lambda_1} - (-1)^n \varphi_2(\tau)\right] \tag{6}$$

$$\tilde{T}_{1n}(0) = \int_0^{\xi(0)} \varphi_1(z)\cos\alpha_n z/\xi(0)\, dz,$$

$$\omega_{nm} = -\frac{(-1)^{n+m} 4\alpha_n\alpha_m}{\pi^2(n-m)(n+m-1)}, \quad (n \neq m),$$
$$\omega_{nm} = 1, \quad (n = m).$$

Розподіл температури у вологій області має вигляд:

$$T_2(z,\tau) = \frac{2}{1-\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{T}_{2n}(\tau)\sin\frac{\alpha_n}{1-\xi}(z-\xi), \tag{7}$$

де коефіцієнти ряду мають вигляд:

$$\tilde{T}_{2n}(\tau, z) = \int_{\xi}^{1} T_2(z,\tau)\sin\frac{\alpha_n}{1-\xi}(z-\xi)\, dz.$$

Для їх визначення скористуємось такою системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\tilde{T}_{2n}}{d\tau} = \frac{2}{1-\xi}\frac{d\xi}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{\omega}_{nm}\tilde{T}_{2m} + \left(\frac{\alpha_n}{1-\xi}\right)^2 a_2\tilde{T}_{2n} + a_2\left[\frac{(-1)^n(1-\varepsilon)q(\tau)}{\lambda_2} + \frac{\varphi_2(\tau)}{1-\xi}\right] + \frac{2\int_{\xi}^{1}\vec{E}^2\, dz(1-\xi)}{\pi c \rho_1 (2n-1)}, \tag{8}$$

$$\tilde{T}_{2n}(0) = \int_{\xi(0)}^{1}\varphi_1(z)\sin\frac{\alpha_n}{1-\xi(0)}(z-\xi(0))\, dz,$$

$$\bar{\omega}_{nm} = (-1)^{n+m+1}\cdot\omega_{nm}, \quad (n \neq m),$$
$$\bar{\omega}_{nm} = 1, \quad (n = m).$$

Закон руху межі фазового перетворення визначимо з умови енергетичного балансу на ізотермічній поверхні розподілу фаз

$$\lambda_2\frac{2}{(1-\xi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\tilde{T}_{2n}(\tau) + \lambda_1\frac{2}{\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\tilde{T}_{1n}(\tau) = m(\tau)\varepsilon + (c_2\rho_2 - c_1\rho_1)\varphi_2(\tau)\frac{d\xi}{d\tau} \tag{9}$$

$$\xi(0) = \xi_0. \tag{10}$$

Коефіцієнти $\tilde{T}_{1n}(\tau)$, $\tilde{T}_{2n}(\tau)$ і закон розподілу фаз $\xi(\tau)$, а отже, температурні функції T_1 і T_2 можуть бути визначені шляхом сумісного розв'язку систем диференціальних рівнянь (6), (8) і рівнянь (9) з відповідними початковими умовами.

Постановка задачі вологопереносу. Задачу визначення полів вологовмісту і профілю поверхні розподілу фаз, яка дозволяє дослідити результати з аналітичними розв'язками, можна сформулювати так:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tau} = a_{m1}\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2},\ \left(0 < z < \xi(\tau)\right),$$

$$V_1(0,z) = \psi_1(z),$$

$$V_1(\tau,0) = \psi_2(\tau),$$

$$V_1(\tau,\xi(\tau)) = \psi_3(\tau),$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \tau} = a_{m2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} + a_{m2}\delta S,\ \ \left(\xi(\tau) < z < 1\right)$$

$$V_2(0,z) = \psi_1(z),$$

$$V_2(\tau,\xi(\tau)) = \psi_3(\tau),$$

$$V_2(\tau,1) = \psi_4(\tau),$$

де V_1, V_2 – вологовміст у вологому та сухому матеріалі відповідно, ξ – профіль поверхні розподілу фаз, z – осьова координата, τ – час, a_m – коефіцієнт дифузії вологи, ψ_2, ψ_2, ψ_2 – задані неперервні функції часу, δ – коефіцієнт молярного потоку вологи, S – об'ємна густина потоку вологи.

Результати дослідження. Наведемо розв'язок задачі в загальній постановці. Одержимо розподіл вологовмісту в такому вигляді:

$$V_1(\tau,z) = \frac{2}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{V}_{1n}(\tau)\sin\frac{n\pi}{\xi}z,$$

де коефіцієнти за відомим законом руху межі розподілу фаз ξ(τ) визначаються із системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\tilde{V}_{1n}}{d\tau} = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{nm}\tilde{V}_{1m} - \left(\frac{n\pi}{\xi}\right)^2 a_{m1}\tilde{V}_{1n} + \frac{a_{m1}n\pi}{\xi}\left[\psi_2(\tau) - (-1)^n\psi_3(\tau)\right],$$

$$\tilde{V}_{1n}(0) = \int_0^{\xi(0)}\psi_1(z)\sin\frac{n\pi}{\xi(0)}z\,dz,$$

$$\beta_{nm} = \frac{(-1)^{n+m}2nm}{m^2 - n^2},\quad (n \neq m),$$

$$\beta_{nm} = 0{,}5,\quad (n = m).$$

Розв'язок задачі влагообміну у вологій області може бути записано таким рівнянням:

$$V_2(\tau,z) = \frac{2}{1-\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{V}_{2n}(\tau)\sin\frac{n\pi}{1-\xi}(z-\xi).$$

Для коефіцієнтів $\tilde{V}_{2n}(\tau)$ отримано систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\tilde{V}_{2n}}{d\tau} = \frac{1}{\xi-1}\frac{d\xi}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+m}\beta_{nm}\tilde{V}_{2m} - \left(\frac{n\pi}{1-\xi}\right)^2 a_{m2}\tilde{V}_{2n} + \frac{a_{m2}n\pi}{1-\xi}\left[\psi_3(\tau) - (-1)^n\psi_4(\tau)\right] +$$

$$+\frac{a_{m2}\delta S(1-\xi)}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\tilde{V}_{2n}(0) = \int_{\xi(0)}^{1}\psi_1(z)\sin\frac{n\pi}{1-\xi(0)}\left(z-\xi(0)\right)dz.$$

Висновки. Наведений у статті розв'язок задачі визначення теплового та вологого режиму елементів РЕА може бути використаний для розв'язання проблем автоматизованого теплового проектування.

Література

1. Яковенко В. О. Моделювання процесів переносу в областях з рухомими межами під дією енергії надвисоких частот : [монографія] / Яковенко В. О. – Дніпропетровськ : Академія митної служби України, 2009. – С. 196.