УДК 539.3

Г. И. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»;
С. М. ВЕРЕЩАКА, д-р техн. наук; доцент, Сумской государственный университет

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ОСЛАБЛЕННЫМ КОНТАКТОМ МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ СЛОЯМИ

На основе дискретно-сруктурной теории тонких оболочек предложен вариант уравнений устойчивости, включающий параметры критической загрузки тонкостенных оболочек вращения слоистой структуры с ослабленным межфазным контактом. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта соседних слоев равны друг другу. Допускается упругое проскальзывание по поверхности контакта сопряженных слоев. Уравнения устойчивости включают компоненты геометрически нелинейного моментного докритического состояния сжатых тонкостенных элементов. Установлено, что изменение кинематических и статических условий контакта на межфазных границах слоистых элементов тонкостенных конструкций оказывает заметное влияние на величину критических напряжений.

Ключевые слова: теория тонких оболочек, критические напряжений.

В большинстве работ, посвященных исследованию устойчивости оболочек из композитов, предполагается, что между слоями выполняется условие идеального контакта. Это предположение является одной из идеализаций расчетной модели слоистой оболочки. На практике на границах слоев, как правило, имеют место локальные участки непроклея и отслоений. В этом случае предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта не выполняется.

Расчетная модель оболочек с расслоениями, в которой наличие межслоевых дефектов учитывается путем модификации выражения для изгибной жесткости, представляется наиболее простой и предлагается, например, в работе [1]. Очевидно, что эта модель не позволяет проанализировать множество механических явлений, которые сопутствуют процессу докритического деформирования и потере устойчивости слоистых конструкций.

Решение задачи устойчивости элементов конструкций с расслоениями с учетом локальных эффектов дано в [2, 3]. Благодаря такой постановке, проведено исследование влияния размеров и расположения межслоевых дефектов на устойчивость цилиндрических и сферических оболочек. Многослойные оболочки вращения с зазорами между слоями рассматривались в [4].

Вопрос о точности результатов расчета устойчивости оболочек с расслоениями, полученных при помощи различного рода допущений, был изучен в [5]. Отмечается, что двумерная теория в задачах устойчивости слоистых оболочек с неидеальным контактом слоев приводит к более существенным погрешностям, чем в случае оболочек неоднородной структуры без дефекта.

В данной работе для моделирования участков ослабленного контакта на межфазных границах рассматривается один из вариантов модели контактной задачи сопряжения жестких анизотропных слоев. Для этого варианта модели (первая модель) характерно выполнение статических условий контакта по поверхности сопряжения отдельных слоев. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой. При этом допускается упругое проскальзывание по поверхности контакта смежных слоев. Если на некотором локальном участке оболочки клеевая прослойка отсутствует, в этой области учитывается односторонний контакт между жесткими слоями.

Оценка достоверности результатов, полученных по первой модели, осуществлялась с привлечением непрерывно-структурной модели теории пластин и оболочек (вторая модель). Вторая модель хорошо известна и часто используется при расчете анизотропных тонкостенных элементов, когда кусочно-неоднородная по толщине слоистая пластина или оболочка рассматриваются как квазиоднородные с приведенными упругими характеристиками. При этом учитывается, что выполняется допущение об идеальном жестком контакте смежных слоев.

Постановка задачи. В соответствии с дискретно-структурной теорией математическая модель рассматриваемой здесь многослойной оболочки состоит из n тонких анизотропных слоев. Каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат α^i ($i = 1,2$), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$; k – номер слоя. Индекс «z» при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке (α^1, α^2, $z^{(k)}$) эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$.

Вектор полного перемещения $\vec{u}_z^{(k)}$ точки жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек С.П.Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)}\vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z)\vec{\psi}^{(k)}, \qquad (1)$$

где $\vec{u}^{(k)}$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функция углов поворота и обжатия волокон, перпендикулярных к недеформированной срединной поверхности $S^{(k)}$; $\varphi^{(k)}(z)$ – нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине слоя [6]; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$ – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов $\vec{u}^{(k)}$, $\vec{\gamma}^{(k)}$, $\vec{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи следующих выражений

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} \gamma^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \qquad (2)$$

Компоненты тензора конечных деформаций в точке (α^1, α^2, $z^{(k)}$) определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до и после деформации

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)};\;\; 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)};\;\;\; 2\varepsilon_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1. \tag{3}$$

С учетом введенных обозначений вариационное уравнение Рейснера для многослойной оболочки запишется

$$\delta R = \sum_{k=1}^{n} \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} \iiint\limits_{V^{(K)}} \delta\left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}\right) dV \;\; = 0 \;\;\; (\alpha, \beta = 1,\,2,\,3)\,. \tag{4}$$

Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений координаты z от единицы до n. При этом $F^{(k)}$ – удельная дополнительная работа деформации; $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

Если по сопряженным лицевым поверхностям слоя выполняются условия идеального контакта:

$$u_{\beta}^{(k,k-1)} = u_{\beta}^{(k-1,k)}; \qquad\qquad X_{(k,k-1)}^{\beta} = X_{(k-1,k)}^{\beta}, \tag{5}$$

вариацию элементарной работы внешних сил δA_R можно представить в виде

$$\delta A_R = \sum_{k=1}^{n} \delta A_R^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{S_{(k)}} \left(\vec{X}_{(k)} \delta\vec{u}^{(k)} + M_{(k)}^{i} \vec{r}_i^{(k)} \delta\vec{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^{i} \vec{r}_i^{(k)} \delta\vec{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^{3} \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} \right) dS +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{l_1^{(k)}} \left(\vec{\Phi}_{(k)}^{S} \delta\vec{u}^{(k)} + \vec{G}_{(k)}^{S} \delta\vec{\gamma}^{(k)} + \vec{L}_{(k)}^{s} \delta\vec{\psi}^{(k)} \right) dl + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{l_2^{(k)}} \left(\vec{\Phi}_{(k)} \delta\vec{u}^{(k)} + G_{(k)} \delta\vec{\gamma}^{(k)} + \vec{L}_{(k)} \delta\vec{\psi}^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \left(\vec{u}^{(k)} - \vec{u}_S^{(k)}\right) \delta\vec{\Phi}_{(k)} + \left(\vec{\gamma}^{(k)} - \vec{\gamma}_S^{(k)}\right) \delta\vec{G}_{(k)} + \left(\vec{\psi}^{(k)} - \vec{\psi}_S^{(k)}\right) \delta\vec{L}_{(k)} \right) dl\,. \tag{6}$$

Здесь $S^{(k)}$ – срединная поверхность слоя; $l_1^{(k)}$, $l_2^{(k)}$ – части контура $l^{(k)}$; $\vec{X}_{(k)}$, $\vec{M}_{(k)}$, $\vec{B}_{(k)}$ – векторы внешних усилий, моментов и дополнительных моментов соответственно.

Элементарная работа (6) также включает векторы усилия $\vec{\Phi}_{(k)}^{S}$, момента $\vec{G}_{(k)}^{S}$, дополнительного момента $\vec{L}_{(k)}^{S}$, которые возникают от действия заданных внешних контурных сил на $l_1^{(k)}$. Векторы усилия $\vec{\Phi}_{(k)}$, момента $\vec{G}_{(k)}$, дополнительного момента $\vec{L}_{(k)}$, имеют место в точках контура $l_2^{(k)}$ при наличии заданного вектора перемещений точек контура $\vec{u}_S^{(k)}$.

Второе слагаемое уравнения (4) следует представить в виде

$$\delta\Pi_R = \sum_{k=1}^{n} \left(\delta\Pi_{1R}^{(k)} + \delta\Pi_{2R}^{(k)} \right) = \sum_{k=1}^{n} \iiint\limits_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^{n} \iiint\limits_{V^{(k)}} \left(\partial F^{(k)} / \partial\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)} \right) \delta\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dV\,, \tag{7}$$

где $$\delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iiint\limits_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint\limits_{V^{(k)}} \left(\sigma_{(k)}^{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{(k)z} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta\varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{33} \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} \right) dV\,;$$

$$\delta\Pi_{2R}^{(k)} = -\iiint\limits_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^{f} dV = -\iiint\limits_{V^{(k)}} \Big\{ \Big(\partial F^{(k)} / \partial\sigma_{(k)}^{ij} - \varepsilon_{ij}^{(k)\neq}\Big)\delta\sigma_{(k)}^{ij} + \Big(\partial F^{(k)} / \partial\sigma_{(k)}^{i3} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\neq}\Big)\times$$

$$\times\,\delta\sigma_{(k)}^{i3} + \Big(\partial F^{(k)} / \partial\sigma_{(k)}^{33} - \varepsilon_{33}^{(k)\neq}\Big)\delta\sigma_{(k)}^{33} \Big\} dV \quad (i, j = 1, 2).$$

Подставив геометрические соотношения (1)-(3) в (4), на основе вариационного принципа Рейснера несложно получить для каждого отдельно взятого слоя оболочки систему уравнений равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Применение обобщенного закона Гука, нелинейной теории среднего изгиба оболочки значительно упрощает вывод уравнений равновесия и граничных условий.

Линеаризованные уравнения устойчивости. Для вывода линеаризованных уравнений устойчивости многослойных оболочек вращения используются геометрически нелинейные уравнения дискретно-структурной теории и статический критерий Эйлера, то есть допускаются смежные формы равновесия сжатого элемента конструкции, близкие к исходной, но отличные от нее. Критическая нагрузка определяется как наименьшая из нагрузок, при достижении которых наряду с исходной формой равновесия возможны смежные формы равновесия.

Пусть существование смежной равновесной конфигурации при действии внешней нагрузки определяется выражениями

$$u_i^{(k)0} + u_i^{(k)}; \quad w^{(k)0} + w^{(k)}; \quad \gamma_i^{(k)0} + \gamma_i^{(k)}; \quad \psi_i^{(k)0} + \psi_i^{(k)};$$

$$\gamma^{(k)0} + \gamma^{(k)}; \;\; T_{ii}^{(k)0} + T_{ii}^{(k)}; \;\; T_{12}^{(k)0} + T_{12}^{(k)}; \quad R_{i3}^{(k)0} + R_{i3}^{(k)}; \;\; M_{ii}^{(k)0} + M_{ii}^{(k)};$$

$$M_{12}^{(k)0} + M_{12}^{(k)}; \quad L_{ii}^{(k)0} + L_{ii}^{(k)}; \quad L_{12}^{(k)0} + L_{12}^{(k)}; \;\; Q_i^{(k)0} + Q_i^{(k)}; \;\; Q_3^{(k)0} + Q_3^{(k)} \quad (i = 1,2). \qquad (8)$$

Здесь компоненты исходного докритического напряженно-деформированного состояния отмечены нулем на месте верхнего индекса, дополнительные компоненты перемещений и усилий возмущенного состояния указаны без индекса.

Подставляя (8) в уравнения равновесия и вычитая из полученных соотношений уравнения равновесия исходного состояния, линеаризованные уравнения устойчивости k-го слоя многослойной оболочки, которые позволяют учесть деформации поперечного сдвига и обжатия, принимают вид

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}T_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial\left(A^{(k)}T_{12}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}} + T_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - T_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} +$$

$$+\,A^{(k)}B^{(k)}k_1^{(k)}R_{13}^{(k)} = 0 \qquad \left(1 \leftrightarrow 2;\, A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}\right);$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}R_{13}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial\left(A^{(k)}R_{23}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}} - A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}T_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}T_{22}^{(k)}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}M_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}M_{12}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}+M_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}-M_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}-$$

$$-A^{(k)}B^{(k)}\left(R_{13}^{(k)}-T_{11}^{(k)0}\omega_1^{(k)}-T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)}-\underline{T_{11}^{(k)}\omega_1^{(k)0}}-\underline{T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)0}}\right)=0\ \left(1\leftrightarrow 2; A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right);$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}L_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}L_{12}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}+L_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}-L_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}-$$

$$-A^{(k)}B^{(k)}L_{13}^{(k)}=0 \qquad \left(1\leftrightarrow 2; A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right). \tag{9}$$

При учете обжатия k-го слоя к системе (9) добавляется восьмое уравнение

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}M_{13}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}M_{23}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}-A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}M_{11}^{(k)}+k_2^{(k)}M_{22}^{(k)}+k_1^{(k)}L_{11}^{(k)}+k_2^{(k)}L_{22}^{(k)}+Q_3^{(k)}\right)=0\,. \tag{10}$$

Аналогично уравнениям (9) – (10) линеаризуются и геометрические соотношения:

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)}=e_{ij}^{(k)}+e_{ji}^{(k)}+\omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)0};\qquad 2\chi_{ij}^{(k)}=\nabla_i\gamma_j^{(k)}+\nabla_j\gamma_i^{(k)}-в_i^{(k)\gamma}e_{j\gamma}^{(k)}-в_j^{(k)\gamma}e_{i\gamma}^{(k)};$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)}=2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma}+\varphi^{(k)\prime}(z)\psi_i^{(k)};\qquad \varepsilon_{33}^{(k)z}=\gamma^{(k)}\,. \tag{11}$$

Уравнения (9) – (10) следует дополнить граничными условиями, которые определяются из условий закрепления границ рассматриваемой пластины или оболочки.

При выводе уравнений (9)-(10) дополнительные перемещения $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ считались малыми величинами, что послужило достаточным основанием не учитывать эти величины выше первой степени. Поэтому на основе полученной системы уравнений можно найти только «верхние» значения критических нагрузок. Подчеркнутые слагаемые в четвертом и пятом уравнениях (9) при допущении о безмоментном докритическом состоянии обращаются в нуль.

На основе линеаризованных уравнений устойчивости (9) – (10), геометрических соотношений (11), физических соотношений и заданных граничных условий имеет место разрешающая система из 14–ти однородных дифференциальных уравнений в частных производных для k-го слоя оболочки

$$\frac{\partial\vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}=F\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},\vec{Y}^{(k)},\frac{\partial\vec{Y}^{(k)}}{B_{(k)}\partial\alpha_2^{(k)}}\right)\qquad k=1,2,\ldots,n, \tag{12}$$

где

$\vec{Y}^{(k)}=\left\{Y_1^{(k)},Y_2^{(k)},\ldots,Y_{14}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}=\left\{T_{11}^{(k)},T_{12}^{(k)},Q_1^{(k)},M_{11}^{(k)},L_{11}^{(k)},L_{12}^{(k)},u_1^{(k)},u_2^{(k)},w^{(k)},\gamma_1^{(k)},\gamma_2^{(k)},\psi_1^{(k)},\psi_2^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}$ – вектор решений.

Полагая, что физико-механические и геометрические характеристики оболочек вращения не изменяются в направлении координаты α_2, решение разрешающих уравнений (12) задачи устойчивости можно представить в виде рядов Фурье

$$\vec{Y}_1^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_{1,n}^{(k)} \cos n\alpha_2; \qquad \vec{Y}_2^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_{2,n}^{(k)} \sin n\alpha_2, \tag{13}$$

где

$$\vec{Y}_1^{(k)} = \{T_{11}^{(k)},\ T_{22}^{(k)},\ R_{13}^{(k)},\ Q_1^{(k)},\ M_{11}^{(k)},\ M_{22}^{(k)},\ L_{11}^{(k)},\ L_{22}^{(k)},\ Q_3^{(k)},$$
$$u_1^{(k)},\ w^{(k)},\ \gamma_1^{(k)},\ \psi_1^{(k)},\ \varepsilon_{11}^{(k)},\ \varepsilon_{22}^{(k)},\ \varepsilon_{33}^{(k)z},\ \chi_{11}^{(k)},\ \chi_{22}^{(k)},\ \psi_{11}^{(k)},\ \psi_{22}^{(k)}\}^T;$$

$$\vec{Y}_2^{(k)} = \left\{T_{12}^{(k)}, R_{23}^{(k)}, Q_2^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, L_{13}^{(k)}, L_{23}^{(k)}, u_2^{(k)}, \psi_2^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}, \chi_{12}^{(k)}, \psi_{12}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

После подстановки (13) – (14) в систему уравнений (12) получается система обыкновенных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}_n^{(k)}}{A_{(k)}d\alpha_1^{(k)}} = F_n^{(k)}\left(\alpha_1^{(k)},\ \ n,\ \ \vec{Y}_n^{(k)}\right) \qquad k = 1,2,...,n\,. \tag{15}$$

Здесь

$$\vec{Y}^{(k)} = \left\{Y_{1,n}^{(k)}, Y_{2,n}^{(k)},...,\ Y_{14,n}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}} = \{T_{11,n}^{(k)}, T_{12,n}^{(k)}, R_{13,n}^{(k)}, M_{11,n}^{(k)}, M_{12,n}^{(k)}, L_{11,n}^{(k)}, L_{12,n}^{(k)},$$
$$u_{1,n}^{(k)}, u_{2,n}^{(k)}, w_n^{(k)}, \gamma_{1,n}^{(k)},\ \gamma_{2,n}^{(k)},\ \psi_{1,n}^{(k)},\ \psi_{2,n}^{(k)}\}^T -$$

вектор решений. Такая система для *k*-го слоя оболочки имеет четырнадцатый порядок.

Граничные условия, которые определяют условия закрепления торцов *k*–го слоя оболочки можно представить в матричной форме

$$B_0^{(k)}\vec{Y}_{(k)}\left(\alpha_{10}^{(k)}\right) = 0; \quad B_n^{(k)}\vec{Y}_{(k)}\left(\alpha_{1n}^{(k)}\right) = 0, \tag{16}$$

где $B_0^{(k)}$, $B_n^{(k)}$ прямоугольные матрицы размерности 7×14.

Устойчивый вычислительный процесс при численном решении краевой задачи (15) – (16) обеспечивает метод ортогональной прогонки С.К.Годунова. В результате интегрирования представленных уравнений имеет место система семи алгебраических уравнений относительно компонент вектора произвольных постоянных $\vec{C}^{(k)}$:

$$B_n^{(k)} Z\left(\alpha_{1n}^{(k)},\ \lambda\right)\vec{C}^{(k)} = 0\,.$$

Здесь $Z\left(\alpha_{1n}^{(k)},\ \lambda\right)$ – матрица размера 7×7, коэффициенты которой получены в результате ортогонализации и нормирования системы векторов решения на каждом шаге численного интегрирования, λ –собственное значение.

Для существования нетривиального решения задачи устойчивости (15) – (16) должно выполняться условие

$$\left|B_n^{(k)} Z\left(\alpha_{1n}^{(k)},\ \lambda\right)\right| = 0\,. \tag{17}$$

Равенство нулю определителя (17) дает величину собственного значения задачи λ. Величина λ представляет собой верхнюю критическую нагрузку и находится методом подбора, пока для двух последующих итераций λ определитель (17) не будет менять знак. Уточняется величина собственного значения λ методом хорд до выполнения условия

$$\left|\frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right| < \varepsilon ,$$

где ε – заданное число, которое определяется с требуемой точностью решения, i – шаг итерации.

Если оболочка составлена из двух и более жестких слоев, то при составлении разрешающей системы уравнений устойчивости такой слоистой системы необходимо учесть статические и кинематические условия контакта по сопряженным поверхностям каждого слоя.

Кинематические и статические условия идеального контакта отдельных слоев тонкостенных элементов по лицевым сопряженным поверхностям запишутся:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma_i^{(k-1)} - \varphi^{(k+1)}\left(\frac{h^{(k+1)}}{2}\right)\psi_i^{(k+1)} + \varphi^{(k-1)}\left(\frac{h^{(k-1)}}{2}\right)\psi_i^{(k-1)} \quad (i = 1,2),$$

$$2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma^{(k-1)}; \tag{18}$$

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}; \qquad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+} \qquad (i = 1,2),$$

$$\sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}; \qquad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \tag{19}$$

Выполняя кинематические (18) и статические (19) условия контакта по лицевым сопряженным поверхностям при помощи метода штрафных функций, нетрудно составить полную систему разрешающих уравнений (15) для решения контактной задачи дискретно-континуальной теории многослойных оболочек.

Вследствие того, что между жесткими слоями в процессе изготовления анизотропных оболочек образуется межфазный мягкий клеевой слой (толщину этого слоя, как правило, считают равной нулю), в предлагаемом варианте модели допускается упругое проскальзывание жестких слоев друг относительно друга, то есть по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта (19).

Система уравнений (9) включает усилия $T_{11}^{(k)0}$, $T_{12}^{(k)0}$, $T_{22}^{(k)0}$, перемещения и деформации сдвига координатной поверхности k-го слоя $u_2^{(k)0}$, $w_{(k)}^0$, $\gamma_1^{(k)0}$, $2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma 0}$, которые определяют докритическое напряженно-деформированное состояние.

Проведенное сопоставление систем разрешающих уравнений равновесия и уравнений устойчивости указывает на их подобие, что позволяет построить единый вычислительный процесс определения напряжений и деформаций нелинейного моментного докритического состояния оболочек вращения и вычисления критических параметров внешней нагрузки.

Если между слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на поверхности сопряжения этих слоев $S_z^{(k,k+1)}$ могут возникать неизвестные векторы усилий $\vec{q}_{(k)}$, $\vec{q}_{(k+1)}$ контактного взаимодействия. Согласно 3-го закона Ньютона имеет место зависимость: $\vec{q}_{(k)} = -\vec{q}_{(k+1)}$. Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в вариационное уравнение принципа Рейсснера (4) необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу сил контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$\mathrm{A}_q = \sum_{m=1}^{n-1} \iint\limits_{S_z^{(m,m+1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{u}_z^{(m)} dS.$$

Усилия контактного взаимодействия $\vec{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \vec{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \vec{m}^{(k)}$ возникают при выполнении условия

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \tag{20}$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (20) не выполняется при перемещении точек области $S_z^{(k,k+1)}$ в процессе деформации, контактное давление $\vec{q}_{(k)}$ в уравнениях равновесия принимает значение $\vec{q}_{(k)} = 0$. Решая указанную задачу несложно с заданной точностью найти значение контактного давления докритического состояния на основе итерационного метода, предложенного в [4].

Результаты расчета. Оценка эффективности предлагаемого варианта расчетной модели при решении задач устойчивости сжатых цилиндрических оболочек проводится на тестовом примере работы [7]. Рассматривались двухслойные цилиндры из стеклопластика симметричной структуры с толщиной каждого слоя $h = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

Цилиндры отличались друг от друга углами армирования слоев φ: [0°/0°], [20°/–20°], [30°/–30°], [45°/–45°], [60°/–60°], [75°/–75°], [90°/–90°]. Всего исследовалось семь типов цилиндров с разной структурой армирования. Радиус оболочек R = 0,1 м, длина L = (2,4)R с отношением R = (100,45)h. Физико-механические характеристики волокон и матрицы соответственно равны: $E_в = 8{,}6 \cdot 10^5$ МПа; $E_м = 3{,}5 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_в = 0{,}21$; $\nu_м = 0{,}35$.

Объемное содержание стекловолокна составляет 45 %. Остальные параметры стеклопластика определялись по методике, предложенной в [8]. Так, например, для цилиндров со структурой первого типа модуль сдвига, модули упругости стеклопластика в меридиональном и окружном направлениях соответственно равны – $G_{12} = 4{,}0 \cdot 10^3$ МПа; $E_{11} = 4{,}4 \cdot 10^4$ МПа; $E_{22} = 1{,}2 \cdot 10^4$ МПа.

Исследования проведены для двух вариантов расчетной модели анизотропных элементов. Учитывалось влияние нелинейного моментного докритического состояния, деформаций поперечного сдвига и обжатия на величину критических напряжений (см. таблицу).

Таблица – Значения критических напряжений при осевом сжатии цилиндрических оболочек из стеклопластика

Тип структуры	-Структура	L/R	$\sigma_{кр}$, МПа				
			Форма потери устойчивости				
			осесимметричная			неосесимметричная	
			клас. теория	модель		модель	
				вторая	первая	вторая	первая
1	2	3	4	5	6	7	8
R/h = 100,0							
1	[0°/0°]	2,0	132,74	131,99	59,12	54,78 (7)	45,00 (10)
		4,0		131,25	59,12	52,01 (4)	44,62 (8)
2	[20°/ – 20°]	2,0	123,23	106,99	69,34	79,71 (7)	56,00 (3)
		4,0		106,99	69,34	78,57 (4)	55,70 (5)
3	[30°/ – 30°]	2,0	116,13	94,26	69,34	94,26 (0)	57,01 (6)
		4,0		94,26	69,34	94,26 (0)	57,37 (8)
4	[45°/ – 45°]	2,0	112,07	97,99	39,89	84,06 (1)	39,89 (0)
		4,0		97,99	39,89	84,06 (1)	39,89 (0)
5	[60°/ – 60°]	2,0	116,13	94,26	45,93	94,26 (0)	45,93 (0)
		4,0		94,26	45,93	94,26 (0)	45,93 (0)
6	[75°/ – 75°]	2,0	127,13	131,99	69,34	71,85 (8)	42,44 (11)
		4,0		126,99	69,34	70,73 (3)	42,44 (11)
7	[90°/ – 90°]	2,0	132,74	131,99	69,34	54,06 (7)	46,05 (10)
		4,0		131,25	69,34	52,01 (3)	45,67 (8)

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
R/h = 45,0							
1	[0°/0°]	2,0	294,98	275,02	135,06	116,99 (5)	104,56 (8)
		4,0		275,02	129,93	116,99 (5)	104,56 (8)
2	[20°/ – 20°]	2,0	273,85	239,99	110,01	177,99 (5)	104,00 (3)
		4,0		239,99	109,74	181,92 (6)	102,02 (5)
3	[30°/ – 30°]	2,0	258,07	219,99	95,41	208,00 (2)	92,46 (1)
		4,0		219,99	94,95	208,00 (2)	92,46 (1)
4	[45°/ – 45°]	2,0	249,04	188,43	77,59	188,43 (0)	77,59 (0)
		4,0		188,43	77,02	185,07 (1)	77,02 (0)
5	[60°/ – 60°]	2,0	258,07	210,01	127,99	183,01 (5)	89,08 (1)
		4,0		210,01	123,99	182,85 (1)	88,69 (1)
6	[75°/ – 75°]	2,0	282,52	245,01	136,04	175,02 (4)	87,01 (8)
		4,0		245,01	135,66	169,14 (5)	86,77 (7)
7	[90°/ – 90°]	2,0	294,98	275,02	108,95	122,01 (5)	75,02 (9)
		4,0		275,02	108,95	122,01 (5)	74,79 (8)

Расхождение результатов классической теории при осесимметричной форме потери устойчивости, которые получены при помощи формулы $\sigma_{кр} = h\sqrt{\overline{E}_{11}E_{22}}\,/(R\sqrt{3})$ и предлагаемого варианта уточненной теории, составило 1-19 % при R/h = 100,0 и 6-25 % при R/h = 45,0. В выражение для нахождения $\sigma_{кр}$ введено обозначение $\overline{E}_{11} = E_{11}(1-\nu_{12}\nu_{21})$. Заметное снижение величины критических напряжений исследуемых оболочек дают расчеты на основе первой модели. Считалось, что оболочка включает два жестких анизотропных слоя одинаковой толщины с ослабленными условиями контакта по сопряженным лицевым поверхностям.

Анализ результатов позволяет отметить, что форма потери устойчивости исследуемых элементов, исключая цилиндры с углами армирования – 30°, 45°, 60°, является неосесимметричной. При этом результаты, полученные согласно второй расчетной модели, во многом определяются направлением армирования отдельных слоев цилиндра. Так, например, критические напряжения оболочки с третьим типом структуры более чем в 1,7 раза выше критических напряжений цилиндров со структурой первого и седьмого типов.

Значения критических напряжений, которые определялись на основе первой расчетной модели, мало зависят от направления армирования слоя и отличаются друг от друга не более чем на 30 %.

Вывод. В процессе исследований установлено, что изменение кинематических и статических условий контакта по сопряженным поверхностям жестких слоев анизотропных элементов тонкостенных конструкций существенно влияет на характер распределения деформаций поперечного сдвига и является одним из основных факторов определяющих величину параметра критической нагрузки рассматриваемых цилиндров. Вариант модели, когда напряжения поперечного сдвига и обжатия на межфазных границах контакта равны между собой, но при этом допускается упругое проскальзывание этих слоев друг относительно друга, адекватно отражает работу слоистых тонкостенных конструкций при больших деформациях.

Список литературы: **1.** *Бабич Д.В.* Влияние расслоения материала на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек / *Д.В.Бабич* // Прикладная механика. – 1988. – Т. 2, № 10. – С. 52-56. **2.** *Андреев Л.В.* О бифуркации равновесия сферических оболочек с расслоениями / *Л.В.Андреев, И.П.Железко, Н.И.Ободан* // Проблемы прочности. – 1986. – № 2. – С. 49-53. **3.** *Болотин В.В.* Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов / *В.В.Болотин* // Механика композитных материалов. – 1984. – № 2. – С. 239-255. **4.** *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / *Б.Я.Кантор* / Отв. ред. *А.Н.Подгорный*; АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – К.: Наукова думка, 1990. – 136 с. **5.** *Гузь А.Н.* Механика разрушения при сжатии композитных материалов / *А.Н.Гузь*. – К.: Наукова думка, 1990. – 630 с. **6.** *Болотин В.В.* Механика многослойных конструкций / *В.В.Болотин, Ю.Н.Новичков.* – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **7.** *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов / *В.В.Васильев.* – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с. **8.** *Верещака С.М.* Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры / *С.М.Верещака.* – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с.

Поступила в редколлегию 21.05.2013

УДК 539.3

Устойчивость многослойных оболочек вращения с ослабленным контактом между жесткими слоями / Г. И. Львов, С. М. Верещака // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 99-110. – Бібліогр.: 8 назв.

На основі дискретно-структурної теорії тонких оболонок запропонований варіант рівнянь стійкості, який включає параметри критичного навантаження тонкостінних оболонок обертання шаруватої структури з послабленим міжфазним контактом. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту сусідніх шарів дорівнюють один одному. Припускається пружне проковзування на поверхні контакту суміжних шарів. Рівняння стійкості включають компоненти геометрично нелінійного моментного докритичного стану стиснутих тонкостінних елементів. Встановлено, що зміна кінематичних та статичних умов контакту на міжфазних границях шаруватих елементів тонкостінних конструкцій суттєво впливає на величину критичних напружень.

Ключові слова: теорія тонких оболонок, критичні напруження.

Based on the discrete - structural theory of thin plates and shells, a variant of the equations of buckling with parameter of critical loading of thin-walled elements of layered structure with the weakened interfacial contact is put forward. It is assumed that the transverse shear and compression stresses are equal on the interfaces. Elastic slippage is allowed over the interfaces between adjacent layers. The equations buckling include components of geometrically nonlinear moment sub buckling conditions of the compressed thin-walled elements. It is found that the kinematic and static contact conditions on the interfaces of layered thin-walled structural members greatly affect the magnitude of critical stresses.
Key words: theory of thin plates and shells, critical stresses.