

К.Ф. ЧЕШКО, О.Ф. ПОЛИЩУК, К.В. АВРАМОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Отримано модель з кінцевим числом ступенів свободи, що описує вільні коливання пологої оболонки. Для виведення цієї динамічної системи застосовується метод Релея-Рітца і енергетичний підхід Лагранжа. Для апроксимації коливань використовувалися В-сплайни. Розглянуто збіжність власних частот, визначено внутрішні резонанси. Проведено експеримент з порушенням вільних і вимушених коливань оболонки, що підтверджує результати розрахунку. Для експериментального визначення форм коливань оболонки порушувалися її вимушені коливання за допомогою кінематичного руху защемлення. Крім амплітуд для побудови форм коливань вимірювалися фазові зрушення між коливаннями в опорній точці і коливаннями в інших точках. Представлено таблиці для порівняння результатів розрахунку і експерименту для власних форм і власних значень.

Ключові слова: вільні коливання, полого оболонка, В-сплайни, власні значення, власні форми.

Получена модель с конечным числом степеней свободы, описывающая свободные колебания пологой оболочки. Для вывода этой динамической системы применяется метод Рэлея-Ритца и энергетический подход Лагранжа. Для аппроксимации колебаний использовались В-сплайны. Рассмотрена сходимость собственных частот, определены внутренние резонансы. Проведен эксперимент с возбуждением свободных и вынужденных колебаний оболочки, подтверждающий результаты расчета. Для экспериментального определения форм колебаний оболочки возбуждались ее вынужденные колебания с помощью кинематического движения заделки. Кроме амплитуд для построения форм колебаний измерялись фазовые сдвиги между колебаниями в опорной точке и колебаниями в остальных точках. Представлены таблицы для сравнения результатов расчета и эксперимента для собственных форм и собственных значений.

Ключевые слова: свободные колебания, пологая оболочка, В-сплайны, собственные значения, собственные формы.

A model with the finite number of degrees of freedom was obtained, which describes free oscillations of a shallow shell. To derive this dynamical system, the Rayleigh-Ritz method and Lagrange's energy approach were applied provided that the deformations and displacements are related by the Cauchy relations. B-splines were used to approximate the oscillations. The convergence of natural frequencies was considered, for which calculations were made for a different number of basis functions in the expansion of the modes of oscillations. Internal resonances that significantly affect the nonlinear deformation of the structure are determined. The experiment was performed with excitation of free and forced oscillations of the shell, which confirms the results of the calculation. For the experimental determination of the modes of oscillation of the shell, its forced oscillations were excited with the aid of the kinematic motion of the embedding. Tables are presented for comparing the results of calculation and experiment for eigenmodes and eigenvalues.

Keywords: free vibrations, shallow shell, B-splines, eigenvalues, eigenmodes.

1 Введение. Оболочечные конструкции широко используются в аэрокосмической технике, энергомашиностроении и строительстве. Эти конструкции обладают высокой жесткостью при относительно малой их массе. Поэтому много усилий было предпринято для исследования колебаний этих конструкций. Подробный обзор литературы и основные результаты в этой области подробно изложены в монографиях [1-3] и обзорной статье [4].

В этой статье описывается установка для проведения экспериментальных исследований свободных линейных колебаний пологой оболочки постоянной толщины. Описываются результаты экспериментального анализа линейных колебаний пологой оболочки. В работе построена модель свободных линейных колебаний консольной пологой оболочки. Для аппроксимации колебаний используются В-сплайны. Результаты численного моделирования сравниваются с экспериментальными данными.

2 Описание эксперимента. Целью эксперимента является исследование колебаний консольно закрепленной пологой цилиндрической панели постоянной толщины. Фотография установки для эксперимен-

тального исследования колебаний этой конструкции представлена на рис. 1. Оболочка закреплена по одной стороне; по трем другим сторонам оболочка свободна. Как показано на рис. 1, по закрепленной стороне с помощью специального устройства оболочка крепится к платформе вибростенда ВЭДС – 400 А. С помощью вибростенда создавалось кинематическое движение заделки. Для измерения параметров вибрации использовались виброметр ВШВ-003, частотомер ЧЗ-34А, измеритель разности фаз Ф2-34 и анализатор спектра 2033.

Основной целью экспериментальных исследований оболочки являлось определение ее частот и форм колебаний. Поверхность оболочки расчерчивалась эквидистантными линиями с шагом 15 мм на маленькие прямоугольники. В результате образовалась сетка с 224 узлами, в каждом из которых последовательно устанавливался вибропреобразователь ДН-4, входящий в состав ВШВ-003. Для определения формы во всех этих узлах измерялись амплитуды, резонансные частоты и фазы колебаний.

Экспериментально исследовались свободные колебания. В режиме свободных колебаний определялись резонансные частоты оболочки для этого вибро-

преобразователь ДН-4 устанавливался в каждой из 224 точек. Способ получения этих точек описан в разд. 2. С помощью анализатора 2033 определялись спектры свободных колебаний оболочки.



Рисунок 1 – Фотография установки для экспериментального исследования колебаний оболочки

Для экспериментального определения форм колебаний оболочки возбуждались ее вынужденные колебания с помощью кинематического движения заделки. Амплитуда кинематического движения заделки поддерживалась постоянной, и составляла 5 м/с². Кроме амплитуд для построения форм колебаний прибором Ф2-34 измерялись фазовые сдвиги между колебаниями в опорной точке и колебаниями в остальных точках.

Оболочка изготовлена из стали 10. Параметры оболочки принимались следующими:

$$E = 2,06 \times 10^{11} \text{ Па}; \quad \rho = 7,856 \times 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad a = 0,2 \text{ м};$$

$$b = 0,24 \text{ м}; \quad \mu = 0,3, \quad h = 3 \times 10^{-3} \text{ м}; \quad R = 0,26 \text{ м},$$

где E, μ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала оболочки; R, h – радиус кривизны и толщина оболочки; b, a – длина и ширина оболочки.

3 Постановка задачи и основные уравнения.

Исследуем свободные линейные колебания консольной цилиндрической панели (см. рис. 1). Для этого свяжем с оболочкой криволинейную систему координат (x, θ, z) . Ось x направим вдоль образующей оболочки перпендикулярно ее заделки; ось θ направлена в окружном направлении оболочки; ось z перпендикулярна срединной поверхности оболочки. Проекция перемещений точек срединной поверхности на оси (x, θ, z) обозначим через $u(x, \theta, z), v(x, \theta, z), w(x, \theta, z)$. Так как оболочка тонкая, то сдвигом и инерцией вращения можно пренебречь. Элементы тензоров напряжений и деформаций удовлетворяют закону Гука. Так как рассматриваются линейные колебания, то деформации и перемещения связаны между собой соотношениями Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R}; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x}; & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}; \\ k_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}; & k_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & k_3 &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ – элементы тензора деформаций срединной поверхности оболочки; k_1, k_2, k_3 – изменения кривизны срединной поверхности. Потенциальная энергия оболочки принимает следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\mu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{12}^2 \right\} d\theta dx + \\ &+ \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ k_1^2 + k_2^2 + 2\mu k_1 k_2 + \frac{1-\mu}{2} k_3^2 \right\} d\theta dx + \quad (2) \\ &+ \frac{D}{R} \int_0^a \int_0^b \left\{ \varepsilon_{11} k_1 + \varepsilon_{22} k_2 + \mu\varepsilon_{11} k_2 + \mu\varepsilon_{22} k_1 + \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{12} k_3 \right\} d\theta dx, \end{aligned}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; h – толщина оболочки; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; b, a – длины сторон пологой оболочки. Кинетическая энергия оболочки имеет следующий вид:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^a \int_0^b (\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) d\theta dx, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала оболочки.

Для расчета собственных частот и форм колебаний воспользуемся методом Релея-Ритца. При использовании этого метода приходится удовлетворять только геометрическим граничным условиям. Естественные граничные условия можно не рассматривать. Геометрические граничные условия на защемленной стороне оболочки принимают следующий вид:

$$w|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=0} = 0; \quad v|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

4 Анализ линейных колебаний. Колебания оболочки представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= U(x, \theta) \cos(\omega t); \\ v &= V(x, \theta) \cos(\omega t); \\ w &= W(x, \theta) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $U(x, \theta), V(x, \theta), W(x, \theta)$ – функции, подлежащие определению. Тогда кинетическую и потенциальную энергию оболочки можно представить так:

$$\begin{aligned} T &= \omega^2 \tilde{T} \sin^2(\omega t); \\ \Pi &= \tilde{\Pi} \cos^2(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Формы колебаний оболочки разложим по базисным функциям так:

$$\begin{aligned} W(x, \theta) &= \sum_{k=1}^{N_1} A_k w_k(x, \theta); \\ U(x, \theta) &= \sum_{k=1}^{N_2} A_{k+N_1} u_k(x, \theta); \\ V(x, \theta) &= \sum_{k=1}^{N_3} A_{k+N_1+N_2} v_k(x, \theta), \end{aligned} \quad (7)$$

где $w_k(x, \theta), u_k(x, \theta), v_k(x, \theta)$ – базисные функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям; A_1, \dots, A_{N_*} – подлежащие расчету константы; $N_* = N_1 + N_2 + N_3$. В качестве базисных функций используются В-сплайны [5, 6]. Для объяснения вида

В-сплайна, собственные формы колебаний представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 W(x, \theta) &= \sum_{k_1=1}^{M_1+3} \sum_{k_2=1}^{M_2+3} a_{k_1 k_2}^{(w)} \bar{w}_{k_1 k_2}(x, \theta); \\
 U(x, \theta) &= \sum_{k_1=1}^{M_1+3} \sum_{k_2=1}^{M_2+3} a_{k_1 k_2}^{(u)} \bar{u}_{k_1 k_2}(x, \theta); \\
 V(x, \theta) &= \sum_{k_1=1}^{M_1+3} \sum_{k_2=1}^{M_2+3} a_{k_1 k_2}^{(v)} \bar{v}_{k_1 k_2}(x, \theta),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_{k_1 k_2}(x, \theta) &= x^2 B_3 \left(\frac{M_1 \theta}{a} + k_1 - 2 \right) B_3 \left(\frac{M_2 x}{b} + k_2 - 2 \right); \\
 \bar{u}_{k_1 k_2}(x, \theta) &= \bar{v}_{k_1 k_2}(x, \theta) = x B_3 \left(\frac{M_1 \theta}{a} + k_1 - 2 \right) B_3 \left(\frac{M_2 x}{b} + k_2 - 2 \right); \\
 B_3(\phi) &= \begin{cases} 0; & -\infty < \phi \leq -2; \\ 0,25(\phi + 2)^3; & -2 < \phi \leq -1; \\ -0,75\phi^3 - 1,5\phi^2 + 1; & -1 < \phi \leq 0; \\ 0,75\phi^3 - 1,5\phi^2 + 1; & 0 < \phi \leq 1; \\ -0,25\phi^3 + 1,5\phi^2 - 3\phi + 2; & 1 < \phi \leq 2; \\ 0; & 2 < \phi < \infty; \end{cases} \tag{9}
 \end{aligned}$$

$M_1 + 3$ – число сплайнов в направлении θ ; $M_2 + 3$ – число сплайнов в направлении x ; $B_3(\phi)$ – сплайн Шенберга третьего порядка. Неизвестные параметры разложения (8) представим в следующем виде:

$$\mathbf{a} = (a_{1,1}^{(w)}, \dots, a_{M_1+3, M_2+3}^{(w)}, a_{1,1}^{(u)}, \dots, a_{1,1}^{(v)}, \dots) = (a_1, \dots, a_{N_*}).$$

Для исследования линейных колебаний оболочки воспользуемся следующим функционалом, в который введем разложение (8):

$$\int_0^{2\pi/\omega} (\Pi - T) dt = \frac{\pi}{\omega} [\tilde{\Pi}(a_1, \dots, a_{N_*}) - \omega^2 \tilde{T}(a_1, \dots, a_{N_*})]. \tag{10}$$

Колебания системы соответствуют минимуму функционала (10), который удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} (\tilde{\Pi} - \omega^2 \tilde{T}) = 0; \quad j = 1, \dots, N_*. \tag{11}$$

Из (11) следует проблема собственных значений:

$$(K - \omega^2 M) A^T = 0, \tag{12}$$

где K, M – матрицы масс и жесткости.

5 Численный анализ колебаний.

Для исследования колебаний полой оболочки воспользуемся методом Рунге-Кутты. Рассмотрим сходимость собственных частот. Для этого произведем расчеты для разного числа функций в разложении (7) и сравним полученные результаты. Результаты анализа собственных частот представлены в табл. 1 в Гц. В первой строке таблицы показано число слагаемых в разложении (7), при которых производились расчеты собственных частот. В таблице 1 представлены первые десять собственных частот. Номера этих собственных частот показаны в первом столбце таблицы. Во втором, третьем и четвертом столбцах таблицы показаны собственные частоты при $N_1 = N_2 = N_3 = 5$; $N_1 = N_2 = N_3 = 7$ и $N_1 = N_2 = N_3 = 8$, соответственно. Результаты расчетов, полученные с помощью программного комплекса ANSYS, представлены в пятом столбце таблицы. Итак, при $N_1 = N_2 = N_3 = 8$ наблюдается сходимость полученных результатов, то есть результаты полученные методом Рунге-Кутты и с помощью ANSYS близки. В шестом столбце таблицы представлены первые пять собственных частот, полученных экспериментально. В седьмом столбце таблицы представлена относительная разница собственных частот δ , полученных экспериментально и с помощью программного комплекса ANSYS. Относительная разница собственных частот δ находится в рамках допустимых значений.

Таблица 1 – Собственные частоты колебаний оболочки

	$N_1 = N_2 = N_3 = 5$	$N_1 = N_2 = N_3 = 7$	$N_1 = N_2 = N_3 = 8$	ANSYS	Эксперимент	δ
ω_1	154,76	152,83	152,76	152,38	140,00	0,08
ω_2	246,47	242,67	242,56	246,49	231,00	0,06
ω_3	528,60	499,24	498,82	487,61	445,00	0,09
ω_4	624,48	602,42	600,93	600,76	545,00	0,1
ω_5	750,96	719,35	718,80	714,15	714,00	$2,1 \cdot 10^{-4}$
ω_6	1345,94	1209,47	1178,90	1153,30		
ω_7	1386,65	1298,25	1287,23	1281,90		
ω_8	1457,81	1303,60	1303,03	1295,60		
ω_9	1728,89	1429,28	1428,60	1419,80		
ω_{10}	2047,07	1659,62	1616,69	1584,30		

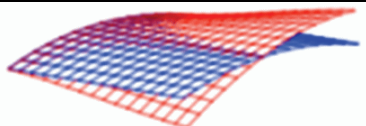
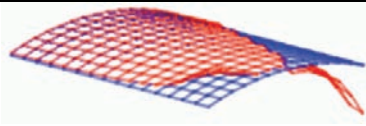
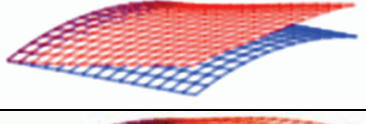
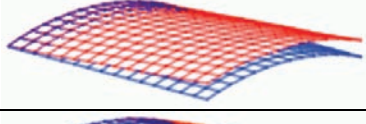
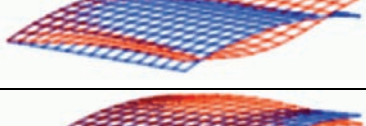
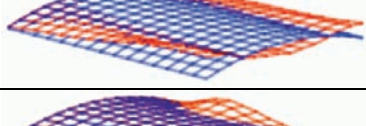
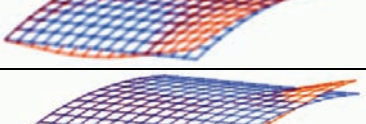
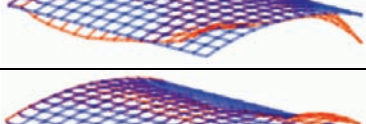
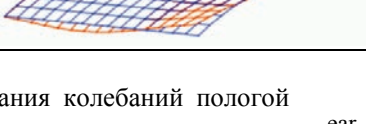

Как следует из табл. 1, рассматриваемая оболочка чрезвычайно богата внутренними резонансами:

$$\begin{aligned}
 3\omega_1 / \omega_3 &= 0,91; \quad 2\omega_2 / \omega_3 = 0,97; \quad 3\omega_2 / \omega_5 = 1,01; \\
 2\omega_4 / \omega_6 &= 1,01; \quad 2\omega_4 / \omega_7 = 0,93; \quad 2\omega_5 / \omega_9 = 1,006; \\
 \omega_6 / \omega_7 &= 0,91; \quad \omega_7 / \omega_8 = 0,98; \quad \omega_8 / \omega_9 = 0,91.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Существование внутренних резонансов существенно влияет на нелинейное деформирование конструкции.

Собственные формы колебаний оболочки представлены в табл. 2. В первом столбце таблицы представлены номера собственных частот, которым соответствуют собственные формы, показанные во втором столбце таблицы. В третьем столбце таблицы представлены собственные формы, полученные экспериментально. Расчетные и экспериментальные собственные формы близки.

Таблица 2 – Собственные формы колебаний оболочки

№ частоты	Результаты численного моделирования	Результаты экспериментального анализа
1		
2		
3		
4		
5		

Выводы. Для исследования колебаний пологой оболочки создана экспериментальная установка, которая описана в этой статье. Эта установка включает в себя исследуемую конструкцию и вибростенд. Предложена методика экспериментальных исследований пологих оболочек. Для численного моделирования колебаний пологой оболочки использован метод Релея-Ритца. Для аппроксимации колебаний конструкций чрезвычайно эффективно использовать разложения по B-сплайнам. Полученные численно собственные частоты сравнивались с данными, рассчитанными с помощью программного комплекса ANSYS. Собственные частоты и собственные формы колебаний, полученные численно и экспериментально, близки. Пологая оболочка чрезвычайно богата внутренними резонансами, которые существенно влияют на нелинейные колебания конструкции.

Литература:

1. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / M. Amabili. – Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
2. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Подходы, методы, явления. 2-е изд. перераб. и доп. / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. – М.: Институт компьютерных исследований, 2015. – 716 с.
3. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 2. Приложения. / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. – М.: Институт компьютерных исследований, 2015. – 700 с.

4. Amabili M. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction / M. Amabili, M.P. Paidoussis // Appl. Mech. Rev. – 2003. – P. 349-381.

5. Awrejcewicz J. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation. ZAMM / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, A. Osetrov. – J. of Appl. Math. and Mech. – 2001. – P. 458-467.

6. Hollig K. Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems / K. Hollig, U. Reif, J. Wipper // SIAM J. on Num. Anal. – 2001. – P. 442-462.

References (transliterated):

1. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge University Press, Cambridge, 2008
2. Avramov K.V., Mihlin U.V. Nelinejnaya dinamika uprugih system. Vol. 1. Podhodi, metodi, yavleniya. 2-e izdanie pererbotanoy i dopolnenoye. Moscow: Institute komputernih issledovaniy, 2015. 716 p.
3. Avramov K.V., Mihlin U.V. Nelinejnaya dinamika uprugih system. Vol. 2. Applications. Moscow: Institute komputernih issledovaniy, 2015. 700 p.
4. Amabili M, Paidoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction. Appl. Mech. Rev. 2003. PP. 349-381.
5. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation. ZAMM. J. of Appl. Math. and Mech. 2001. PP. 458-467.
6. Hollig K., Reif U., Wipper J. Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems. SIAM J. on Num. Anal. 2001. PP. 442-462.

Поступила (received) 17.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про коливання осцилятора з кубічно-нелінійною жорсткістю / К.Ф. Чешко, К.В. Аврамов, О.Ф. Поліщук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 81-85. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Експериментальний і чисельний аналіз свobodних колебаний пологой оболочкі / К.Ф. Чешко, К.В. Аврамов, О.Ф. Поліщук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 81-85. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Experimental and numerical analysis of free shallow shell oscillations / K.F. Cheshko, K.V. Avramov, O.F. Polischuk // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 40 (1262). – P. 81-85. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Чешко Ксенія Федорівна – аспірант, ІПМаш НАН України; e-mail: cheshko.ks@gmail.com

Чешко Ксения Федоровна – аспірант, ИПМаш НАН Украины; e-mail: cheshko.ks@gmail.com

Cheshko Kseniya Fedorivna, PHD student, IPMach NAS of Ukraine ; e-mail: cheshko.ks@gmail.com

Аврамов Костянтин Віталійович – доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, ІПМаш НАН України, тел.: (068) 605-74-21, e-mail: kvavr@kharkov.ua

Аврамов Константин Витальевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ИПМаш НАН Украины, тел.: (068) 605-74-21, e-mail: kvavr@kharkov.ua

Avramov Konstantin Vitalievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Researcher, IPMach NAS of Ukraine, tel.: (068) 605-74-21, e-mail: kvavr@kharkov.ua

Поліщук Олег Федорович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, ІПМаш НАН України, e-mail: PolischukOleg@nas.gov.ua

Полищук Олег Федорович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник ИПМаш НАН Украины, e-mail: PolischukOleg@nas.gov.ua

Polischuk Oleg Fedorovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Research Officer, IPMach NAS of Ukraine, e-mail: PolischukOleg@nas.gov.ua