

УДК 532.6

В.М. КАПИНОС, д-р техн. наук, Е.Н. ИВАНЧЕНКО

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

### СРАВНИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ МОДИФИЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Запропоновано модифікації алгебраїчних моделей турбулентності з використанням універсальних профілів швидкості Томпсона і Коулса. Виконані порівняльні розрахунки трьох інтегральних характеристик турбулентного прикордонного шару для канонічних дослідів Стенфордської конференції з використанням даних моделей турбулентності та моделей Себесі-Сміта та Джонсона-Кінга, які підтверджують їх ефективність.

The modification of algebraic turbulent models with using universal profile of the velocity Thompson and Coles are presented. The results are computed to canonical measurements that were presented by Stanford conference. Comparison with calculation of the turbulent boundary layers with use modification turbulent models and models Cebeci-Smith and Johnson-King has conducted according to three integral characteristic of the turbulent boundary layer.

Модель турбулентности с применением профиля скорости Томпсона основывается на идее замены в диффузионном члене уравнения движения профиля скорости, вычисляемого в ходе расчета параметров турбулентного пограничного слоя, универсальным двухпараметрическим профилем Томпсона. Это позволяет вычислять производную от скорости не в конечных разностях, а аналитически.

Профиль скорости Томпсона, согласно [1] имеет вид:

$$u = \gamma u_{in} + (1 - \gamma) u_l, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – эмпирическая функция веса,  $\gamma = f(y/\delta)$ ;  $u_{in}$  – распределение скорости, удовлетворяющее логарифмическому закону стенки

$$\frac{u_{in}}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y v_*}{\nu} + B;$$

$u_l$  – скорость на внешнем крае пограничного слоя. Согласно работе [2], функция  $\gamma$  равна единице в интервале  $0 < y/\delta < 0,05$  и нулю вблизи внешнего края пограничного слоя при  $y/\delta = 0,95 - 1,0$ . В интервале  $0,05 < y/\delta < 0,95$   $\gamma$  аппроксимируется уравнением [3]

$$\gamma = 0,5 \left[ 1 + \cos \frac{10}{9} \pi \left( \frac{y}{\delta} - 0,05 \right) \right]. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что профиль скорости в пограничном слое описывается уравнением

$$\frac{u}{u_1} = 0,5 \left[ \left( 1 + \cos \frac{10}{9} \pi \eta \right) \left( \frac{\omega}{k} \ln \text{Re}_y + B \omega \right) + \left( 1 - \cos \frac{10}{9} \pi \eta \right) \right], \quad (3)$$

где  $\eta = \frac{y}{\delta} - 0,05$ ,  $\omega = \sqrt{0,5c_f}$ ;  $c_f = \frac{\tau_w}{0,5\rho u_l^2}$ ;  $Re_y = \frac{yV_*}{\nu}$ . Параметры  $k$  и  $B$  в

уравнении принимаем по данным Пейтеля равными соответственно 0,4186 и 5,45.

Необходимые при использовании профиля скорости Томпсона параметры  $c_f$  и  $\delta$  определяются численным интегрированием дифференциальных уравнений пограничного слоя. Толщина пограничного слоя устанавливается в итерациях по формуле [3]

$$\delta = \delta^* \left/ \left[ 0,5 - \omega(0,80095 + 1,1943 Re_\delta \omega) + \frac{50,7}{Re_\delta} \right] \right., \quad (4)$$

где  $Re_\delta = \frac{u_l \delta}{\nu}$ . Интегральная характеристика  $\delta^*$  может быть определена с более высокой точностью, чем  $\delta$  по условию  $du/dy = 0$ .

Распределение напряжения трения  $\tau_T = \rho \nu_T \frac{du}{dy}$  по толщине пограничного слоя для внешнего слоя двухслойной модели турбулентности с использованием соотношения, предложенного Клаузером для турбулентной вязкости, описывается уравнением

$$\tau_T = 0,0168 \rho u_l \delta^* \gamma_k \frac{du}{dy}. \quad (5)$$

Из (3) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} = 0,5 u_l \left\{ \left[ -\sin \frac{10}{9} \pi \left( \frac{y}{\delta} - 0,05 \right) \frac{10}{9} \frac{\pi}{\delta} \right] \left( \frac{\omega}{k} \ln Re_y + B \omega \right) + \right. \\ \left. + \left( 1 + \cos \frac{10}{9} \pi \left( \frac{y}{\delta} - 0,05 \right) \frac{\omega}{k} \frac{1}{y} \right) + \sin \frac{10}{9} \pi \left( \frac{y}{\delta} - 0,05 \right) \frac{10}{9} \frac{\pi}{\delta} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношение (3) справедливо вне буферного слоя, т.е. при  $\frac{yV_*}{\nu} > 30$ , где допустимо использование закона стенки. Около поверхности стенки турбулентную вязкость в рассматриваемом варианте модели турбулентности будем определять методом, который учитывает нелинейность изменения длины пути смешения по координате  $y$  вблизи стенки, а также зависимость значения  $k$  от градиента давления и других параметров. В данном методе предлагается вычислять безразмерную длину пути смешения  $I^* = \frac{I V_*}{\nu}$  по формуле:

$$I^* = k y^+ \left[ \operatorname{th} \left( \frac{0,012 y^+}{k} \right)^{0,5} \right]^2, \quad (7)$$

где  $y^+ = y v_* / \nu$  – безразмерная координата;  $k$  определяется по уравнению, предложенному в [4]

$$k_{y \delta} = k \sqrt{\frac{\tau}{\tau_w}}, \frac{\tau}{\tau_w} = 1 + P^+ y^* + \frac{1}{2} a^+ \left[ C_1 + y^* (C_2 \ln y^+)^2 + C_3 \ln y^+ + C_4 \right], \quad (8)$$

где  $P^+ = \frac{v}{\rho v_*^3} \frac{dP}{dx}$ ,  $a^+ = \frac{v}{\rho v_*^3} \frac{d\tau_w}{dx}$ ,  $C_1 = -7,77$ ;  $C_2 = -5,706$ ;  $C_3 = 14,82$ ;  $C_4 = 15,08$ .

Трехпараметрический профиль Коулса в виде суперпозиции логарифмического закона стенки и профиля "следа" описывается уравнением [5]

$$\frac{u}{u_l} = \omega \left[ \frac{1}{k} \ln \frac{y\omega u_l}{v} + B + \frac{\Pi}{k} w \right], \quad (k=0,4, B=5,10). \quad (9)$$

"Функцию следа" по предложению Хинце аппроксимируют формулой  $w = 1 - \cos \pi \frac{y}{\delta}$ . Распределение скорости по толщине пограничного слоя определяется тремя переменными:  $\omega$ ,  $\Pi$  и  $\delta$ . Параметр  $\Pi$  можно из уравнения (9) исключить. Для этого полагаем  $y \rightarrow \delta$ , тогда из (9) следует уравнение

$$1 = \omega \left( \frac{1}{k} \ln \frac{\delta\omega u_l}{v} + B + \frac{2\Pi}{k} \right). \quad (10)$$

Отсюда

$$\Pi = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{k} \ln \frac{\delta\omega u_l}{v} - B \right). \quad (11)$$

После подстановки в (1.9) будем иметь

$$\frac{u}{u_l} = \omega \left[ \frac{1}{k} \ln \frac{y\omega u_l}{v} + B + \frac{w}{2} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{k} \ln \frac{\delta\omega u_l}{v} - B \right) \right]. \quad (12)$$

Для определения напряжения трения во внешней части пограничного слоя отыскиваем значение производной

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_l \omega}{k} \left[ \frac{1}{y} + \frac{\pi k}{2\delta} \sin \pi \frac{y}{\delta} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{k} \ln \frac{\delta\omega u_l}{v} - B \right) \right]. \quad (13)$$

Принимая турбулентную вязкость по Клаузеру

$$v_\tau = 0,0168\delta^* u_l \gamma_k,$$

получим выражение для напряжения трения в виде

$$\tau_\tau = 0,0168\rho\delta^* \gamma_k \frac{u_l^2 \omega}{k} \left[ \frac{1}{y} + \frac{\pi k}{2\delta} \sin \pi \frac{y}{\delta} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{k} \ln \frac{\delta\omega u_l}{v} - B \right) \right]. \quad (14)$$

Толщину пограничного слоя можно определить следующим образом. Вычтем из (10) выражение (9). После упрощений имеем:

$$1 - \frac{u}{u_l} = \frac{\omega}{k} \left[ \Pi \left( 1 + \cos \pi \frac{y}{\delta} \right) - \ln \frac{y}{\delta} \right]. \quad (15)$$

Интегрирование (15) дает

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_l}\right) dy = \frac{\omega \delta}{k} (\Pi + 1).$$

Отсюда

$$\Pi = \frac{k \delta^*}{\omega \delta} - 1. \quad (16)$$

Это уравнение, впервые полученное Коулсом, выведено в предположении, что течение в ламинарном подслое и переходной области пренебрежительно мало отклоняется от логарифмического закона стенки (интегрирование уравнения (15) проводится в пределах от 0 до  $\delta$ , а не от  $y = 30\nu/v_*$  до  $\delta$ ).

Исключая из (11) по уравнению (16) параметр  $\Pi$ , находим выражение для определения толщины пограничного слоя

$$\delta = 2\delta^* / \left(1 + \frac{\omega}{k} \left(2 - \ln \frac{\delta \omega u_l}{\nu}\right) - B\omega\right). \quad (17)$$

Как и в случае использования профиля Томпсона, турбулентную вязкость в переходной области пограничного слоя будем определять с учетом нелинейности зависимости длины пути смешения от координаты  $y$  и зависимости значения  $k$  от градиента давления и других параметров (уравнения (7) и (8)).

Недостатком профиля Коулса является то, что на внешней границе пограничного слоя производная  $du/dy$  не обращается в ноль. Заострение профиля скорости при  $y = \delta$  устранено в профиле Коулса–Финли

$$\frac{u}{u_l} = \omega \left[ \frac{1}{k} \ln \frac{y \omega u_l}{\nu} + B + \frac{1}{k} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) + \frac{2\Pi}{k} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \left(3 - 2\frac{y}{\delta}\right) \right]. \quad (18)$$

Повторяя выкладки, аналогичные тем, которые приведены выше для профиля Коулса, получаем:

$$\Pi = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{k} \ln \frac{\delta \omega u_l}{\nu} - B \right) \quad (19)$$

из условия, что когда  $y \rightarrow \delta$ , то  $u \rightarrow u_l$ , и после исключения в уравнении (18) параметра  $\Pi$  имеем

$$\frac{du}{dy} = \frac{\omega u_l}{k} \left\{ \frac{1}{y} + 2 \frac{y}{\delta^2} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + k \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{k} \ln \frac{\delta \omega u_l}{\nu} - B \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 2 \frac{y}{\delta^2} \left(3 - 2\frac{y}{\delta}\right) - \frac{2}{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) \right\}. \quad (20)$$

Далее отыскиваем следующие величины:

$$\Pi = \frac{k\delta^*}{\omega\delta} - \frac{11}{12}, \quad (21)$$

$$\delta = 2\delta^* \left/ \left( 1 - \frac{\omega}{k} \ln \frac{\delta\omega u_l}{\nu} - B\omega + \frac{\omega}{k} \frac{11}{6} \right) \right. \quad (22)$$

Для проверки предложенных усовершенствований проведены сравнительные расчеты для двух течений, представленных в трудах Стенфордской конференции [6]: течения 3300 (слабый положительный градиент давления) и течение 1300 (отрицательный градиент давления.). Результаты расчета для трех интегральных характеристик  $\delta^*$ ,  $\delta^{**}$  и  $c_f$  приведены на рис. 1, 2. Для расчетов была использована модель Себеси–Смита, в которой во внешнем слое расчет турбулентной вязкости в диффузионном члене уравнения движения проведен с использованием производной, полученной непосредственным алгебраическим дифференцированием двухпараметрического профиля Томпсона (формула (7)) в одном случае, и дифференцированием более сложного трехпараметрического профиля Коулса–Финли (формула (20)) в другом. Во внутреннем слое турбулентная вязкость рассчитывалась с учетом переменности «константы» турбулентности.

Для сравнения на рисунках представлены графики расчета интегральных характеристик с использованием модели Себеси–Смита и модели Джонсона–Кинга, которая признается наиболее точной моделью турбулентности, использующей представление о вихревой вязкости [7]. В первом случае видно, что предложенное усовершенствование модели дает значительное улучшение точности расчета всех интегральных характеристик. Сравнение с моделью Джонсона–Кинга позволяет отметить, что точность результатов сравнима с точностью, которую обеспечивает данная модель, хотя алгоритм расчета значительно проще. Использование двухпараметрического профиля скорости Томпсона и трехпараметрического профиля скорости Коулса дает практически равноценное улучшение точности расчетов параметров течения в пограничном слое.

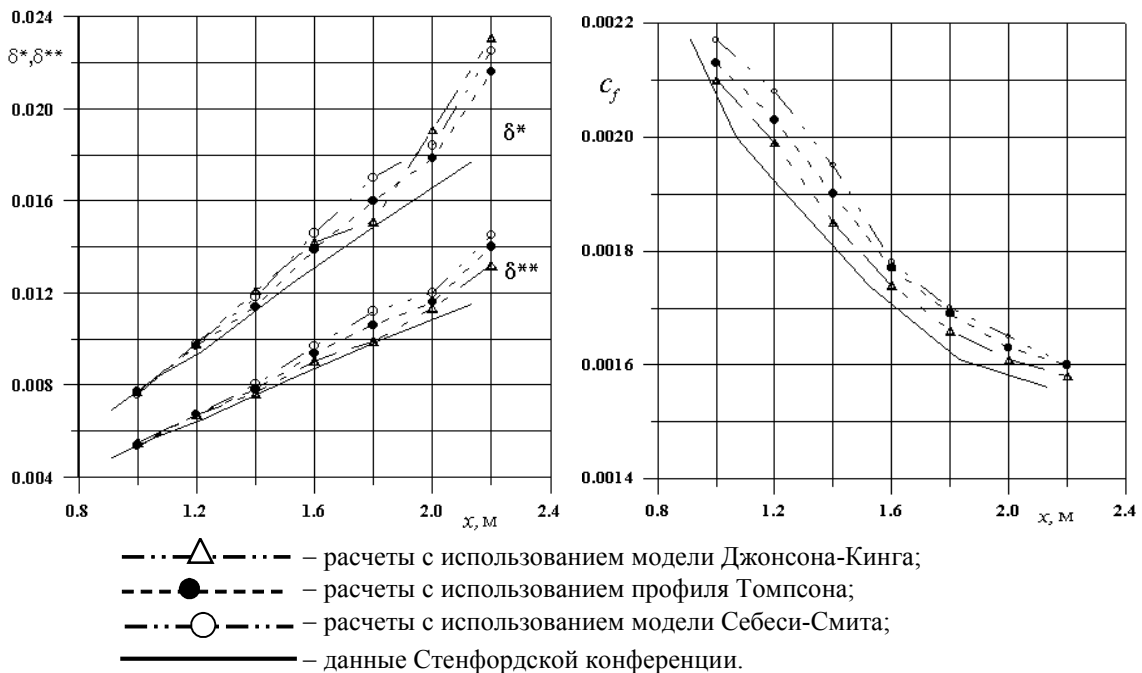


Рис. 1. Интегральные характеристики течения 3300

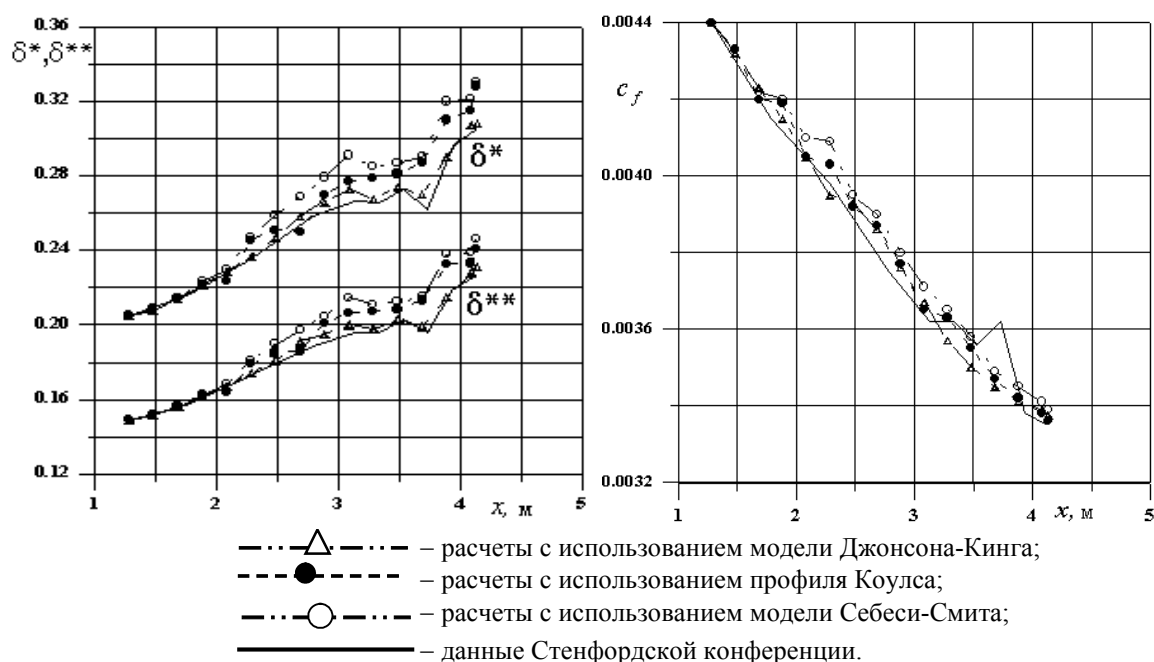


Рис. 2. Интегральные характеристики течение 1300

### Литература

1. *Thompson B.G.J.* A new Two-parameter Family of Mean Velocity Smooth Walls // ARC RM. – N. 3463. – 1965. – 64 p.
2. *Galbraith R.A., Head M.R.* Eddy Viscosity and Mixing Length from Measured Boundary Layer Developments // The Aeronautical Quarterly. – 1975. – Vol. 26, part 2. – p. 133–154.
3. *Капинос В.М.* Коэффициент поверхностного трения при турбулентном течении в пограничном слое // Инж.–физ. журн. – Т.46, №1. – с. 51–55.
4. *Galbraith R.A., Sjolander, Head M.R.* Mixing Length in the Wall Region of Turbulent Boundary Layers // The Aeronautical Quarterly. – 1977. – Vol. 28, part 2. – p. 97–110.
5. *Coles D.* The Low of the Wake in the Turbulent Boundary Layers // Journal of Fluid Mechanics. – 1956. – Vol. 1, part 2. – h. 191–226.
6. Proceedings 1968 AFOSP - IFP Stanford Conference on Computation of Turbulent Boundary Layers. – California: Stanf. University. – 1969. – Vol. 2.– 519 p.
7. *Amorim J. C. C.* Turbulent Modeling in Engineering Application // Rev. Eng. Cienc. – Sao Paulo: 1996. – 3: 91–106.

© Капинос В.М., Иванченко Е.Н., 2006