

І. Б. ЧЕПКОВ, д.т.н., професор, командир військової частини А4566, Київ,

А. С. ДОВГОПОЛИЙ, д.т.н., професор, головний науковий співробітник військової частини А4566, Київ,

О. О. БЛОБОРОДОВ, к.т.н., докторант військової частини А4566, Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВІДГУКУ СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗАНИХ РЕЗОНАНСНИХ КОНТУРІВ НА СТОХАСТИЧНЕ ЗБУРЕННЯ

Запропоновано вирішення задачі пошуку реакції багаточастотних коливальних систем на випадковий вплив на основі методу лишків. Представлено та обгрунтовано математичні основи запропонованого підходу. Продемонстровано закономірність реакції при різних параметрах впливу і системи. Вивчено вплив стохастичного збурення на поведінку системи. Запропоновані теоретичні засади вирішення задачі пошуку реакції багаточастотних коливальних систем на випадковий вплив на основі методу лишків, підтверджені результатами проведеного моделювання. Табл.: 1. Бібліогр.: 13 назв.

Ключові слова: система зв'язаних коливальних контурів; реакція багаточастотних коливальних систем; метод лишків.

Постановка проблеми. Багато природних або технічних процесів (систем) описуються диференційними рівняннями другого порядку і являють собою коливальні системи резонансного характеру. Реакція системи розглядається як відгук на одночастотний вплив, хоча характеристики відгуку на стохастичний вплив можна знайти за допомогою, наприклад, методу лишків. Останнім часом активно досліджуються системи, які можуть бути описані у вигляді довільним чином зв'язаних коливальних контурів. Якщо складові контури мають відмінні за значенням параметри, то пошук характеристик реакції системи у цьому випадку значно ускладнюється. Математична складність обумовлена необхідністю рішення, у самому загальному випадку, системи нелінійних неоднорідних диференційних рівнянь. При цьому, для часткових випадків пропонують варіанти пошуку поодиноких характеристик реакції системи. У той же час загальних підходів до рішення зазначених систем диференційних рівнянь на даний час не запропоновано.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Методологічні основи визначення реакції лінійної коливальної системи на гармонійний вплив

де σ^2 , μ , λ – відповідно дисперсія, показник нерегулярності (коефіцієнт затухання кореляційної функції, що визначає ступень нерегулярності коливань) і переважаюча частота впливу (частота зміни кореляційної функції).

Пошук реакції системи. При вивченні статистично змінних сил найбільший практичний інтерес становлять спектральні характеристики відгуку [10]. Застосування зворотного перетворення Фур'є до (2) призводить до інтегральної функції, яка не має аналітичного рішення. Тому методи прямого пошуку рішення (1) не можуть бути застосовані для стохастичного впливу, що представлений у (2). У той же час спектральні характеристики відгуку системи дозволяють знайти застосування теорії лишків.

Спектральна густина реакції системи $S_q(\omega)$ визначається за її передатною функцією $W(j\omega)$ [11] наступним чином (3)

$$S_q(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_E(\omega). \quad (3)$$

Дисперсія реакції системи описується невласним інтегралом (4)

$$D[q] = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) d\omega = I(\omega). \quad (4)$$

Поширюючи $I(\omega)$ на верхню півплощину комплексної площини ($I(\omega) \rightarrow I(z)$, $S_q(\omega) \rightarrow S(z)$, $z = \omega + jy$), перевіряються умови застосування і безпосередньо застосовується теорема Коші [6]. У результаті отримують шукане рішення (5)

$$I(\omega) = 2\pi j \sum_i \operatorname{Res}_{z=z_i} S(z), \quad (5)$$

де $\operatorname{Res}_{z=z_i} S(z)$ – лишок функції $S(z)$ у точці z_i , а z_i – особливі точки $S(z)$ у верхній півплощині комплексної площини.

Розглянемо питання пошуку передатних функцій. Якщо представити вихідні процеси (1) через передатні функції окремих контурів, то отримується наступна система рівнянь (6):

$$\begin{aligned}
 q_1 &= W_1 E(t) + \frac{1}{C_1} W_1 q_2; \\
 q_2 &= \frac{1}{C_1} W_2 q_1 + \frac{1}{C_2} W_2 q_3; \\
 &\dots\dots\dots \\
 q_n &= \frac{1}{C_{n-1}} W_n q_{n-1} + \frac{1}{C_n} W_n q_{n+1}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 q_N &= \frac{1}{C_{N-1}} W_N q_{N-1},
 \end{aligned} \tag{6}$$

де $W_1 = \frac{1}{L_1 p^2 + R_1 p + 1/C_1}$, $W_n = \frac{1}{L_n p^2 + R_n p + (1/C_{n-1} + 1/C_n)}$ – передатні функції окремих (незв’язаних) контурів.

Легко побачити, що систему рівнянь (6) можна формалізувати у вигляді $\mathbf{W} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{U}$, де $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$, $\mathbf{U} = (W_1 E(t), 0, \dots, 0)^T$, а \mathbf{W} –

тридіагональна матриця. Для розв’язання (6) відносно збурення $E(t)$ можна скористатись, наприклад, методом прогонки. Після знаходження передатної функції кожної ланки можна з використанням (5) знайти реакцію кожної ланки за результатами дії вхідного збурення. Запропонований метод дозволяє знайти реакцію системи зв’язаних контурів на стохастичний вплив за передатними функціями окремих контурів, або за параметрами довільного числа зв’язаних контурів.

Розглянемо випадок двох контурів. Система диференціальних рівнянь, що описує систему двох зв’язаних контурів (7), є:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= W_1 E(t) + \frac{1}{C_1} W_1 q_2; \\
 q_2 &= \frac{1}{C_1} W_2 q_1,
 \end{aligned} \tag{7}$$

де $W_1 = \frac{C_1}{L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1}$, $W_2 = \frac{C_1 C_2}{L_2 C_1 C_2 p^2 + R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2}$.

Розв’язуючи систему (7) відносно $E(t)$, отримаємо (8) та (9):

$$q_1 = \frac{W_1}{1 - (1/C_1)^2 W_1 W_2} E(t), \quad (8)$$

$$q_2 = \frac{(1/C_1) W_1 W_2}{1 - (1/C_1)^2 W_1 W_2} E(t). \quad (9)$$

Обмежимо розглядом першого ланцюга. Маємо

$$W_{1\Sigma} = \frac{W_1}{1 - (1/C_1)^2 W_1 W_2}, \quad (10)$$

або

$$W_{1\Sigma} = \frac{L_2 p^2 + R_1 p + (1/C_1 + 1/C_2)}{(L_1 p^2 + R_1 p + 1/C_1)(L_2 p^2 + R_2 p + (1/C_1 + 1/C_2)) - (1/C_1)^2}. \quad (11)$$

Здійснюючи заміну $p \rightarrow j\omega$, отримується передатна функція першого контуру (12):

$$W_{1\Sigma}(j\omega) = \frac{(1/C_1 + 1/C_2) - L_2 \omega^2 + j\omega R_2}{(1/C_1 - \omega^2 L_1 + j\omega R_1)((1/C_1 + 1/C_2) - \omega^2 L_2 + j\omega R_2) - (1/C_1)^2}, \quad (12)$$

звідки

$$\begin{aligned} |W_{1\Sigma}(j\omega)|^2 &= \\ &= \frac{((1/C_1 + 1/C_2) - L_2 \omega^2)^2 + \omega^2 R_2^2}{((1/C_1 - \omega^2 L_1)((1/C_1 + 1/C_2) - \omega^2 L_2) - \omega^2 R_1 R_2 - (1/C_1)^2)^2 + D^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

де $D = \omega^2 (R_2 2/C_1 + R_1 1/C_2 - \omega^2 (R_2 L_1 - R_1 L_2))$.

Якщо підставити (2) та (13) до (3), а потім до (4) то отримується невласний інтеграл, який вирішується запропонованим вище методом лишків. У верхній півплощині комплексної змінної лежать $z_2, z_4, z_6, z_8, z_{10}, z_{12}$ – полюси першого порядку. Враховуючи, що знаменник $S(z)$ не обертається на нуль на дійсній осі, а також його ступінь більше, ніж на

дві одиниці перевищує ступінь чисельника, то можна говорити про виконання умов застосування теореми Коші про лишки [5]. Тоді, відповідно до (5) отримується (14)

$$I(\omega) = 2\pi j \sum_{i=1}^6 \operatorname{Res} S(z). \quad (14)$$

Використовуючи правила обчислення лишків [12, 13], обчислюються складові (14) для кожної особливої точки, як це представлено в (15)

$$\operatorname{Res} S(z) = \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i)S(z)]. \quad (15)$$

Після обчислення отримується значення (5) дисперсії вихідного процесу для обраної системи зв'язаних коливальних контурів. Якщо визначити співвідношення μ/λ , наприклад $\mu/\lambda = 0,1$, то для обраних параметрів дисперсія реакції системи є відношенням поліномів 16 ступеню (16)

$$D[q_1] = \frac{Y_{16}(\lambda)}{P_{16}(\lambda)}, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} Y_{16}(\lambda) &= \lambda^3 (\lambda + 15,77)(\lambda + 12)(\lambda + 0,03) \times \\ &\times (\lambda^2 + 14\lambda + 49,1)(\lambda^2 - 14\lambda + 49,1)(\lambda^2 + 5,8\lambda + 8,5)(\lambda^2 - 5,8\lambda + 8,5) \times \\ &\times (\lambda^2 - 26,4\lambda + 178,46); \\ P_{16}(\lambda) &= (\lambda^2 + 16,16\lambda + 66,52)(\lambda^2 - 16,16\lambda + 66,52) \times \\ &\times (\lambda^2 + 12\lambda + 37,88)(\lambda^2 - 12\lambda + 37,88)(\lambda^2 + 6,24\lambda + 10,34)(\lambda^2 - 6,24\lambda + 10,34) \times \\ &\times (\lambda^2 + 5,08\lambda + 6,70)(\lambda^2 - 5,08\lambda + 6,70). \end{aligned}$$

За аналогічною методикою були проведені розрахунки для інших вхідних даних. Графіки отриманих залежностей реакції системи від переважаючої частоти вхідного стохастичного збурення наведені на рис. 1. Реакція система представлена у вигляді величини дисперсії амплітуди вихідного випадкового процесу (віднесеної до дисперсії

вхідного стохастичного збурення) залежно від переважаючої частоти вхідного збурення (2).

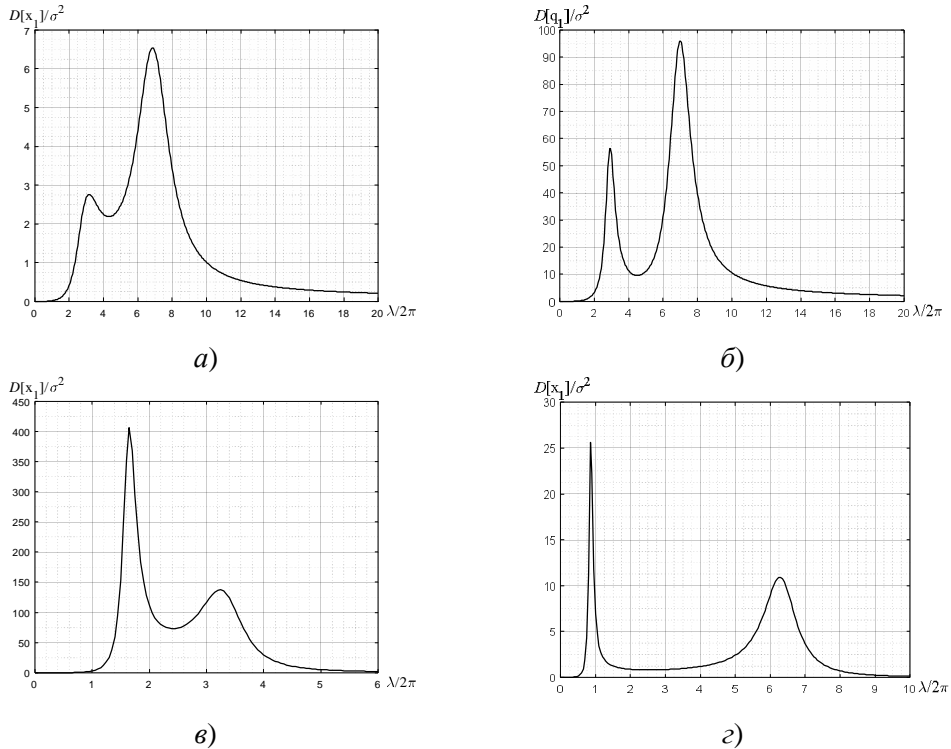


Рис. 1. Реакція системи двох зв'язаних коливальних контурів з різними параметрами на стохастичне збурення із переважаючою частотою (вихідні дані – відповідно до табл.1)

Таблиця 1

Значення параметрів для аналізу реакції системи

Параметр	Значення параметра			
	0,10	0,10	0,10	1,00
L_1	0,10	0,10	0,10	1,00
L_2	0,12	0,12	1,00	0,10
C_1	0,50	0,50	1,00	1,00
C_2	0,40	0,40	0,33	0,33
$R_1=R_2$	0,10	0,01	0,10	0,10
μ	0,1 λ	0,1 λ	0,01 λ	0,01 λ
Графік	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>

Аналіз реакції системи зв'язаних контурів на випадковий вплив свідчить про наявність резонансних явищ при наближенні переважаючої частоти впливу до власних резонансних частот коливальних контурів системи (рис. 1 а – в). При цьому вища добротність коливальних контурів (менше значення коефіцієнта опору) звужує ширину реалізації завдань впливу (рис. 1 б). Збільшення коефіцієнту опора призводить до зміщення резонансних максимумів, їх зменшення, а також збільшення ширини реалізацій.

Перевірка отриманих результатів здійснювалась в Matlab з використанням пакету Simulink шляхом аналізу спектральної густини потужності вихідних сигналів коливальних контурів, що входять до складу системи. Реакція системи на сигнал з рівномірним спектром (виду δ -функції, яка у дослідженні отримувалась диференціюванням функції Гевісайда) підтвердила аналітичні результати щодо характеру резонансних явищ і значень резонансних частот.

Висновки. У дослідженні представлено розроблений метод пошуку аналітичних рішень визначення реакції складної багаточастотної коливальної системи, який є універсальним для стохастичного вхідного впливу, що представлений спектром, якщо складові одержуваного невластного інтегралу задовольняють умовам теореми Коші. Проведено аналіз реакції при різних параметрах впливу. Достовірність одержаних результатів підтверджується збіжністю аналітичних результатів з результатами моделювання. Напрямоком подальших досліджень можна визначити застосування розробленого методу для вирішення практичних інженерних задач.

Список літератури:

1. *Киясов С.Н.* Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач / *С.Н. Киясов, В.В. Шурыгин.* – Казань: Казанский федеральный университет, 2011. – 112 с.
2. *Зайцев В.Ф.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / *В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин.* – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
3. *Гавриков А.В.* Механические колебания. Учебно-методическое пособие / *А.В. Гавриков, Н.А. Ворона.* – М.: МФТИ, 2011. – 36 с.
4. *Suárez Rodríguez A.* New methodologies for the analysis and synthesis of oscillator circuits / *Rodríguez A. Suárez, Lobete M.I. Pontón, S.M. Sancho Lucio, Terán F. Ramírez* // IEEE MTT-S Latin America Microwave Conference (LAMC 2018), Arequipa, Peru. – 2018. – P. 1 - 4.
5. *Стеклов В.А.* Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: 1-я Образцовая Типография Госиздата, 1927. – 419 с.
6. Теория функций комплексной переменной. Методы решения задач / *Ред.: А.Г. Свейников.* – М.: КД Либроком, 2012. – 248 с.

7. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон – М.: URSS, 2015. – 864 с.
8. Боков П.Ю. Изучение явления резонанса в контурах с емкостной связью / П.Ю. Боков, В.И. Козлов, И.В. Митин, П.В. Полевой, А.М. Салецкий, А.В. Червяков, А.П. Штыркова. – URL: http://genphys.phys.msu.ru/rus/lab/elmag/Lab312_el-37CM.pdf (дата звернення: 08.08.2018).
9. Григорьев В.В. Проектирование регуляторов для стохастических систем и объектов с неопределенными параметрами / В.В. Григорьев, С.В. Быстров, В.И. Бойков, Г.И. Болтунов, А.Н. Коровьяков, О.К. Мансурова, И.М. Першин. – Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2013. – 172 с.
10. Варенцова С.А. Восстановление сигнала и его мгновенных спектральных характеристик методом скользящих окон / С.А. Варенцова, В.А. Трофимов // Журнал технической физики. – 2007. – Том 77. – № 5. – С. 58-64.
11. Власов К. Теория автоматического управления. Основные положения. Примеры расчета / К. Власов. – Харьков: Гуманитарный центр, 2013. – 544 с.
12. Ильинкова Н.И. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов / Н.И. Ильинкова, О.А. Кононова, Н.К. Филиппова. – Минск: БГУ, 2012. – 21 с.
13. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. I Функции одного переменного / Б.В. Шабат – М.: URSS, 2015. – 336 с.

References:

1. Kiyasov, S.N., and Shurygin, V.V. (2011), *Differential Equations. Fundamentals of theory, methods of solving problems*, Kazan: Kazan Federal University, 112 p.
2. Zaytsev, V.F., and Polyanin, A.D. (2001), *Handbook of Ordinary Differential Equations*, Moscow, Fizmatlit Publ., 576 p.
3. Gavrikov, A.V., and Vorona, N.A. (2011), *Mechanical vibrations*, Moscow, MFTI Publ., 36 p.
4. Suárez, A., Pontón, M., Sancho, S., and Ramírez, F. (2018), "New methodologies for the analysis and synthesis of oscillator circuits", *2018 IEEE MTT-S Latin America Microwave Conference (LAMC 2018)*, Arequipa, Peru, pp. 1-4.
5. Steklov, V.A. (1927), *Fundamentals of the theory of integration of ordinary differential equations*, Moscow, 1-st Gosizdat Exemplary printing house Publ., 419 p.
6. *The theory of functions of a complex variable. Problem Solving Methods* (1974), editor: Sveshnikov, A.G., Moscow, Nauka Publ., 319 p.
7. Uitteker, E.T., and Watson, D.N. (2015), *Modern Analysis Course*. Moscow, URSS, 864 p.
8. Bokov, P.Y., Kozlov, V.I., Mitin, I.V., Polevoy, P.V., Saletskiy, A.M., Chervyakov, A.V., and Shtyirkova, A.P. *Study of the resonance phenomenon in capacitively coupled circuits*, URL: http://genphys.phys.msu.ru/rus/lab/elmag/Lab312_el-37CM.pdf (accessed 08.08.2018).
9. Grigorev, V.V., Bystrov, S.V., Bojkov, V.I., Boltunov, G.I., Korovyakov, A.N., Mansurova, O.K., and Pershin, I.M. (2013), *Design of regulators for stochastic systems and objects with undefined parameters*, St. Petersburg, NIU ITMO Publ., 172 p.
10. Varencova, S.A., and Trofimov, V.A. (2007), "Recovery of a signal and its instantaneous spectral characteristics by the sliding window method", *Journal of Technical Physics*, Vol. 77, No. 5, pp. 58-64.
11. Vlasov, K. (2013), *Theory of automatic control. The main provisions. Calculation Examples*, Kharkov, Gumanitarnyj centr Publ., 544 p.
12. Ilinkova, N.I., Kononova, O.A., and Filippova, N.K. (2012), *Application of the theory of residues to the calculation of integrals*, Minsk, BGU Publ., 21 p.

13. Shabat, B.V. (2015), *Introduction to comprehensive analysis. Part 1 Functions of one variable*, Moscow, URSS Publ., 336 p.

Статью представил д.т.н., проф. Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" С.Ю. Леонов.

Надійшла (received) 31.03.2020

Chepkov Igor Borisovich, Dr.Sci.Tech, Prof.

Military unit A4566

Povitroflotskyu avenue, 28, Solomianskyu district, Kyiv, Ukraine, 03049

Tel.: (044) 520-12-84

Dovhopoly Anatoly Stepanovich, Dr.Sci.Tech, Prof.

Military unit A4566

Povitroflotskyu avenue, 28, Solomianskyu district, Kyiv, Ukraine, 03049

Tel.: (044) 520-12-84

Biloborodov Oleh Oleksandrovych, Cand.Sci.Tech.

Military unit A4566

Povitroflotskyu avenue, 28, Solomianskyu district, Kyiv, Ukraine, 03049

Tel.: (044) 520-12-84, e-mail: 22bredly@gmail.com

УДК 53.097:51-74

Дослідження характеристик відгуку системи зв'язаних резонансних контурів на стохастичне збурення / Чепков І.Б., Довгополий А.С., Білобородов О.О. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2020. – № 1 (3). – С. 67 – 77.

Запропоновано вирішення задачі пошуку реакції багаточастотних коливальних систем на випадковий вплив на основі методу лишків. Представлено та обґрунтовано математичні основи запропонованого підходу. Продемонстровано закономірність реакції системи при різних параметрах впливу і системи. Вивчено вплив стохастичного збурення на поведінку системи. Запропоновані теоретичні засади вирішення задачі пошуку реакції багаточастотних коливальних систем на випадковий вплив на основі методу лишків підтверджені результатами проведеного моделювання. Табл.: 1. Бібліогр.: 13 назв.

Ключові слова: система зв'язаних коливальних контурів; багаточастотна коливальна система; реакція системи; метод лишків.

УДК 53.097:51-74

Исследование характеристик отклика системы связанных резонансных контуров на стохастическое возмущение / Чепков И.Б., Довгопольный А.С., Белобородов О.А. // Вестник НТУ "ХПИ". Серія: Інформатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2020. – № 1 (3). – С. 67 – 77.

Предложено решение задачи поиска реакции многочастотных колебательных систем на случайное воздействие на основе метода вычетов. Представлены и обоснованы математические основы предложенного подхода. Продемонстрировано закономерность реакции при различных параметрах воздействия и системы. Изучено влияние стохастического возмущения на поведение системы. Предложенные теоретические основы решения задачи поиска реакции многочастотных колебательных систем на случайное воздействие на основе метода вычетов подтверждены результатами проведенного моделирования. Табл.: 1. Библиогр.: 13 назв.

Ключевые слова: система связанных колебательных контуров; многочастотная колебательная система; реакция системы; метод вычетов.

UDC 53.097:51-74

An investigation of the response characteristics of a system of coupled resonant circuits to stochastic disturbance / Chepkov I.B., Dvhopoly A.S., Biloborodov O.O. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2020. – № 1 (3). – P. 67 – 77.

The solution to the problem of searching for the reaction of multi-frequency oscillatory systems to random action based on the residual method is proposed. The mathematical foundations of the proposed approach are presented and justified. The regularity of the reaction is demonstrated for various exposure and system parameters. The effect of stochastic disturbance on the behavior of the system is studied. The proposed theoretical foundations for solving the problem of searching for the response of multi-frequency oscillatory systems to random action based on the residual method are confirmed by the results of the simulation. Table: 1. Refs.: 13 titles

Keywords: system of coupled oscillatory circuits; multi-frequency oscillatory system; system response; residual method.