Шевцов Вадим Михайлович – ассистент кафедры автомобиле- и тракторостроения, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: shevtsovvadim@ukr.net.

Shevtsov Vadim Michailovich – Assistant Professor at the Department of Car and Tractor Industry, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: shevtsovvadim@ukr.net.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН, М. В. АРТЮХ

УЗАГАЛЬНЕНА ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ, ЩО ЯВНО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ОБ'ЄМНИХ ПОКАЗНИКІВ РЕСУРСІВ ТА КАПІТАЛООЗБРОЄНОСТІ

Робота присвячена розробці виробничої функції, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності. Проведено огляд виробничих функцій зі сталими коефіцієнтами еластичності. Виробничі функції зі сталими коефіцієнтами еластичності дають меншу якість наближення до фактичних даних, тому є необхідність у розробці виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами еластичності. Запропоновано математичну модель виробничої функції, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності. Отримано виробничу функцію на основі даного методу. Наведено порівняльний аналіз виробничої функції Кобба – Дугласа та виробничої функції, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності. Ця модель дозволяє прогнозувати випуск продукції для різних значень капіталоозброєності, а також знаходити максимальний можливий випуск продукції при збільшенні капіталоозброєності.

Ключові слова: виробнича функція Кобба – Дугласа, еластичність заміщення, виробнича функція зі змінними коефіцієнтами.

Работа посвящена разработке производственной функции, явно зависящей от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности. Проведен обзор производственных функций с постоянными коэффициентами эластичности. Производственные функции с постоянными коэффициентами эластичности дают меньшее качество приближения к фактическим данным, поэтому есть необходимость в разработке производственных функций с переменными коэффициентами эластичности. Предложена математическая модель производственной функции, явно зависящей от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности. На основе данного метода получена производственная функция. Проведен сравнительный анализ производственной функции Кобба – Дугласа и производственной функции, явно зависящей от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности. Эта модель позволяет прогнозировать выпуск продукции при разных значениях капиталовооруженности, а также находить максимально возможный выпуск продукции при увеличении капиталовооруженности.

Ключевые слова: производственная функция Кобба – Дугласа, эластичность замещения, производственная функция с переменными коэффициентами.

The work is devoted to developing a production function, which depends explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment. The review of production functions with constant coefficients of elasticity is given. Production functions with constant elasticity coefficients give a lower quality of approximation to the actual data, so there is a need to develop production functions with variable coefficients of elasticity. A mathematical model of a production function, which depends explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment, is developed. A production function is built based on this method. The comparative analysis of the Cobb – Douglas production function versus the one depending explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment is given. This model allows us to predict the output for different values of capital endowment and to find the maximum possible output while increasing capital endowment.

Key words: the Cobb – Douglas production function, elasticity of substitution, production function with variable coefficients.

Вступ. На даний час є декілька *виробничих функцій*, які застосовуються для дослідження та прогнозування різних економічних систем. Вони моделюють залежність випуску продукції від кількості використаних ресурсів для виробництва цієї продукції. В даній роботі розглянемо виробничу функцію, яка має змінні коефіцієнти еластичності і також залежить від капіталоозброєності виробництва. Така функція буде краще наближувати дані і дасть змогу точніше робити прогнози для розвитку виробництва.

Огляд теорії виробничих функцій. Поняття виробничої функції з'явилося в 30-х роках XX століття. Американські вчені *Джордж Кобб* та *Пітер Дуглас* в своїй статті [1] використали дані американської легкої промисловості за 24 роки, та на їх основі побудували виробничу функцію, яка потім отримала назву *виробнича функція Кобба – Дугласа*. Ця функція має вигляд:

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}. \tag{1}$$

У цій виробничій функції основними факторами, що впливають на випуск продукції Y, вважаються K – основний капітал та L – робоча сила. Параметри A, α, β задовольняють таким умовам: $A > 0,\ \alpha \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$. Коефіцієнти α, β відображають вклад праці та капіталу у виготовлення продукту [2]. За *методом найменших квадратів* було визначено всі вказані параметри і функція Кобба – Дугласа набула такого вигляду:

$$Y = 1,01L^{0,75}K^{0,25}. \tag{2}$$

Для функції Кобба – Дугласа коефіцієнти α, β постійні й не залежать від обсягу факторів K, L.

Важливою характеристикою для виробничих функцій є *ефект заміщення ресурсів*. Ця числова характеристика показує, на яку величину x_2 зменшиться обсяг витрат другого ресурсу, якщо збільшити обсяг витрат першого ресурсу на x_1, щоб при цьому обсяг випуску Y залишився незмінним. Тобто *гранична норма* $S_{x_1x_2}$ заміни одного ресурсу іншим – це величина, що показує який обсяг ресурсу вивільняється при збільшенні витрат ресурсу – замінника на одиницю:

$$S_{x_1 x_2} = -\frac{x_2}{x_1}. \tag{3}$$

Тоді *еластичність заміни ресурсів* показує, на скільки відсотків повинно змінитись співвідношення ресурсів (при $Y = const$), при зміненні граничної норми заміни на 1 %:

$$\sigma_{x_1 x_2} = \frac{\partial\left(x_2 / x_1\right)}{\partial S_{x_1 x_2}} \cdot \frac{S_{x_1 x_2}}{x_2 / x_1}. \tag{4}$$

Поняття еластичності заміни факторів є одним із основних понять теорії виробничих функцій.

Теорія виробничих функцій постійно розвивалась і пізніше з’явилось ще декілька видів виробничих функцій.

На практиці часто використовується виробнича функція, яка належить до класу CES – функцій, тобто виробнича функція зі сталою еластичністю заміщення

$$Y = A\left(bK^{-\rho} + (1-b)L^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}},$$

$$A > 0,\ b \in [0,1],\ \rho \in [-1,0) \cup (0,+\infty),\ \ \gamma > 0. \tag{5}$$

Еластичність заміщення цієї функції стала і дорівнює $\sigma = \dfrac{1}{1+\rho}$. Поклавши в (5) $Y = const$, одержимо вираз для ізокванти CES – функції:

$$bK^{-\rho} + (1-b)L^{-\rho} = \left(\frac{Y}{A}\right)^{-\frac{\rho}{\gamma}}.$$

Можна показати, що *ізокванти* виробничої функції (5) є монотонно спадними опуклими функціями. Чим більше ρ (тобто чим менше σ), тим більша кривизна сполучної ділянки. Якщо $\sigma > 1$, то є можливість повного заміщення одного фактора виробництва іншим при збереженні випуску продукції незмінним, що суперечить припущенню про неможливість виробництва при відсутності принаймні одного ресурсу. Якщо $\sigma \le 1$, то можливості повного заміщення одного фактора іншим не існує. Якщо в (5) величину ρ спрямувати до нуля, то (за *правилом Лопіталя*) одержимо функцію Кобба – Дугласа

$$Y = AK^{b\gamma}L^{(1-b)\gamma}. \tag{6}$$

Їй відповідає значення $\sigma = 1$. Неважко переконатися, що в цій формулі показники ступеня $b\gamma$ та $(1-b)\gamma$ дорівнюють частинним еластичностям випуску Y по відповідних факторах K, L. Таким чином, у цьому випадку E_K та E_L сталі (не залежать від k).

Якщо в (5) величину ρ спрямувати до нескінченності, то одержимо виробничу функцію з фіксованими пропорціями (*функцію Леонтьєва*):

$$Y = \min(K, L)^{\gamma},$$

яку частіше записують у вигляді

$$Y = \min\left(\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right)^{\gamma}. \tag{7}$$

Виробнича функція Леонтьєва не є диференційовною у точці $K = K_0$ та $L = L_0$. Цій точці відповідає значення $\sigma = 0$. У цьому випадку фактори виробництва мають *властивість доповнюваності* (на відміну від властивості заміщення при $\sigma > 0$, відповідно до якої між ними є певні пропорції, при відхиленні від яких надлишок фактора не робить внеску у випуск продукції).

Якщо в (5) величину ρ вважати рівною –1, одержимо виробничу функцію з лінійними ізоквантами

$$Y = A\left(bK + (1-b)L\right)^{\gamma}, \tag{8}$$

яку навіть при $\gamma \ne 1$ часто називають *лінійною*. Їй відповідає значення $\sigma = +\infty$, що свідчить про необмежені можливості заміщення (можливе навіть повне заміщення одного фактора іншим). Ізокванта виробничої функції (8) є прямою лінією.

Фактор часу у функції $F(K, L; t)$ вводиться, зокрема, для врахування впливу сукупності всіх інших, не фігуруючи безпосередньо у списку аргументів виробничої функції, факторів, які часто пов’язуються з технічним прогресом. Оскільки

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial K}K' + \frac{\partial F}{\partial L}L',$$

де штрих позначає диференціювання за часом, то

$$\frac{Y'}{Y}=\frac{\partial \ln F}{\partial t}+\frac{\partial \ln F}{\partial \ln K}\frac{K'}{K}+\frac{\partial \ln F}{\partial \ln L}\frac{L'}{L}$$

або

$$\delta_Y = p+E_K\delta_K+E_L\delta_L ,$$

де $\delta_Y=\frac{Y'}{Y}$, $\delta_K=\frac{K'}{K}$ і $\delta_L=\frac{L'}{L}$ – темпи випуску продукції, капіталу і праці відповідно; E_K та E_L – еластичності випуску продукції по фондах і праці відповідно; а $p=\frac{\partial \ln F}{\partial t}$ – складова, яка враховує внесок прогресу в темп випуску (вона часто називається *темпом автономного технічного прогресу*) [3].

В 1953 році американський економіст *Р. Солоу* запропонував виробничу функцію (ВФ)

$$Y = A\bar{\Phi}^{\lambda}(t)L^{1-\lambda}(t), \tag{9}$$

де

$$\bar{\Phi}=e^{\mu t}\int_{-\infty}^{t} e^{(\mu+\beta/\lambda)\tau}k(\tau)\,d\tau ,$$

$\bar{\Phi}$ – розрахунковий об’єм основних фондів; μ – норма вибуття фондів; β – темп НТП, який проявляється в якості основних фондів, що знову вводяться; $k(\tau)$ – капіталовкладення в основні виробничі фонди в році τ .

В рамках цієї ВФ науково-технічний прогрес не тягне ніяких змінень на рівні виробництва, доки не буде упредметнений в основних фондах [4].

Таким чином, існує декілька видів виробничих функцій, які можливо застосовувати для дослідження і прогнозування економічних систем різноманітних масштабів. Найбільш вдалою для дослідження є функція Кобба – Дугласа, оскільки вона може застосовуватись для систем як великого масштабу – галузь, так і для маленьких фірм.

Актуальність. Основною особливістю наведених вище виробничих функцій є те, що вони мають сталі коефіцієнти еластичності α,β. Але при більш детальному дослідженні (див. [5], зокрема аналіз даних, що використовувалися) виявляється, що частинні коефіцієнти еластичності виробничої функції Кобба – Дугласа можуть бути функціями від обох факторів L та K. Також необхідно врахувати те, що коефіцієнт капіталоозброєності не може бути константою, оскільки існує технічна взаємозамінність факторів K та L [6]. При введенні коефіцієнту капіталоозброєності в модель виробничої функції отримаємо більш точне врахування впливу рівня капіталоозброєності на кінцевий продукт. Таким чином, актуальною є задача побудови і дослідження виробничих функцій, які б враховували вплив на Y всіх факторів.

Постановка задачі. В даній статті розглянемо математичну модель виробничої функції, що залежить від капіталоозброєності та має частинні коефіцієнти еластичності, які є функціями від обох факторів L та K .

Математична модель. Припустимо, що виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y\left(L,K,\frac{K}{L},C_1,a,b\right)=e^{C_1\cdot\frac{K}{L}}\cdot L^{f(L,K,a)}\cdot K^{g(L,K,b)}, \tag{10}$$

де

$$f(L,K,a)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{m=0}^{N}a_{im}\,\varphi_i(L)\varphi_m(K); \tag{11}$$

$$g(L,K,b)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{m=0}^{N}b_{im}\,\varphi_i(L)\varphi_m(K); \tag{12}$$

$\varphi_i(L)=L^i$; $\varphi_m(K)=K^m$; C_1, a_{im}, b_{im} – невідомі параметри (коефіцієнти); M, N – параметри.

Теорема. *Для знаходження невідомих* C_1, a_{im}, b_{im} *з умов*

$$Y_p\left(L_p,K_p,\frac{K_p}{L_p},C_1,a,b\right)=e^{C_1\cdot\frac{K_p}{L_p}}\cdot L_p^{f(L_p,K_p,a)}\cdot K_p^{g(L_p,K_p,b)},\quad p=\overline{1,Q};\ Q=24 \tag{13}$$

методом найменших квадратів

$$j(C)=\sum_{p=1}^{Q}\left(e^{C_1\cdot\frac{K_p}{L_p}}\cdot L_p^{f(L_p,K_p,a)}\cdot K_p^{g(L_p,K_p,b)}-Y_p\right)^2\to \min_{A,\,a_{im},\,b_{im}}$$

матриця невідомих коефіцієнтів $C=\left[C_1\ a_{00}\ a_{10}\ a_{01}\ \ldots\ a_{MN}\ b_{00}\ b_{10}\ b_{01}\ \ldots\ b_{MN}\right]$ *знаходиться за формулою*:

$$C = \left(B \cdot B^T\right)^{-1} \cdot B \cdot Y1,$$

де B *– матриця з* Q *рядками наступного вигляду*:

$$B_p = \left[\frac{K_p}{L_p} \quad \ln L_p \quad \left(\ln L_p\right) L_p \quad \left(\ln L_p\right) K_p \quad \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \left(\ln L_p\right) K_p^M L_p^N \quad \ln K_p \quad \left(\ln K_p\right) L_p \quad \left(\ln K_p\right) K_p \quad \ldots \quad \left(\ln K_p\right) K_p^M L_p^N\right]^T,$$

а $Y1_p = \ln Y_p$, $p = \overline{1, Q}$, *що отримується, якщо*

$$f\left(L, K, a\right) = a_{00} + a_{10} L + a_{01} K + a_{11} LK + \ldots + a_{MN} L^M K^N,$$

$$g\left(L, K, b\right) = b_{00} + b_{10} L + b_{01} K + b_{11} LK + \ldots + b_{MN} L^M K^N.$$

Доведення. Прологарифмувавши вираз (10), підставимо в нього вирази (11) та (12). Отримаємо:

$$\ln Y = C_1 \cdot \frac{K}{L} + \left(\ln L\right) \cdot f\left(L, K, a\right) + \left(\ln K\right) \cdot g\left(L, K, b\right).$$

Підставляємо в цю рівність значення K_p, L_p, Y_p:

$$\ln Y_p = C_1 \cdot \frac{K_p}{L_p} + \left(\ln L_p\right) \cdot f\left(L_p, K_p, a\right) + \left(\ln K_p\right) \cdot g\left(L_p, K_p, b\right), \; p = \overline{1, Q}. \tag{14}$$

Вираз (14) можна переписати у наступному вигляді:

$$jj\left(C\right) = \sum_{p=1}^{Q} \left(C_1 \cdot \frac{K_p}{L_p} + \left(\ln L_p\right) \cdot f\left(L_p, K_p, a\right) + \left(\ln K_p\right) \cdot g\left(L_p, K_p, b\right) - \ln Y_p \right)^2 \to \min_{C_1, a_{im}, b_{im}}.$$

Звідси маємо: $B^T \cdot C = Y1$, що приводить до системи:

$$\left(B \cdot B^T\right) \cdot C = B \cdot Y1,$$

з якої отримаємо доведення теореми:

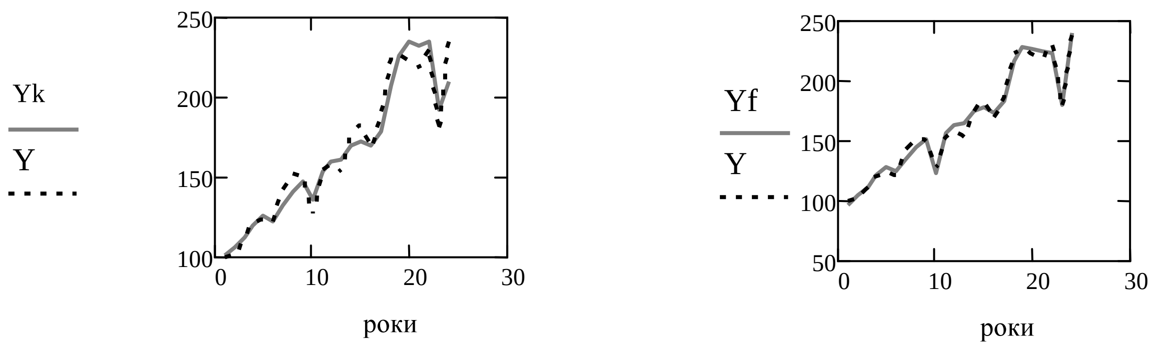
$$C = \left(B \cdot B^T\right)^{-1} \cdot B \cdot Y1.$$

Теорему доведено.

Обчислювальний експеримент. Наведемо результати обчислювального експерименту, проведеного за даним методом з використанням сукупності даних Кобба – Дугласа [1]. В результаті при $M = 1$; $N = 1$ для невідомих коефіцієнтів отримані наступні значення:

$$C_1 = -21,614; \; a_{00} = -15,272; \; a_{10} = 0,097; \; a_{01} = -0,053; \; a_{11} = 4,65 \times 10^{-4}; \; b_{00} = 22,264; \; b_{10} = -0,133;$$

$$b_{01} = 0,072; \; b_{11} = -4,272 \times 10^{-4}.$$



а *б*

Рис. 1 – Графіки наближення розрахункових функцій до фактичних даних:
а – функція Кобба – Дугласа (Yk); *б* – функція, що явно залежить від обсємних показників та капіталоозброєності (Yf).

Таким чином, отримали виробничу функцію такого вигляду:

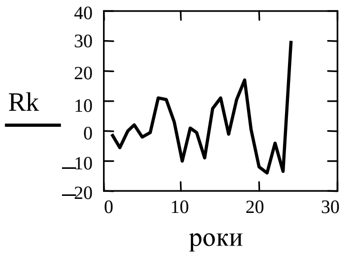
$$Y_F = e^{-21,614} \bullet L^{-15,272 + 0,097 \bullet L - 0,053 \bullet K + 4,65 \times 10^{-4} \bullet L \bullet K} \bullet K^{22,625 - 0,133 \bullet L + 0,072 \bullet K - 4,272 \times 10^{-4} \bullet L \bullet K}. \tag{15}$$

Для функції Кобба – Дугласа (2) середньоквадратичне відхилення $\sigma_1 = 10,182$, для функції з частинними коефіцієнтами еластичності отримали $\sigma_2 = 4{,}876$.

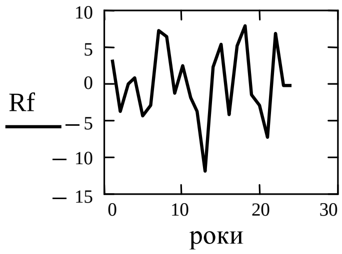
Наведемо графіки наближення до фактичних даних функції Кобба – Дугласа (2) (рис. 1, *а*) та функції (15), що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності (рис. 1, *б*), де Y – фактичні значення обсягів виробництва.

Бачимо, що функція, яка явно залежить від об'ємних показників та капіталоозброєності (Yf) (15) дає краще наближення до фактичних даних.

Далі наведемо графіки відхилень розрахункового випуску від фактичного (рис. 2). На зображеннях видно, що відхилення розрахункових значень від фактичних у виробничої функції, що явно залежить від об'ємних показників та капіталоозброєності (15), менше, ніж у виробничої функції Кобба – Дугласа (2).



а



б

Рис. 2 – Графіки відхилення розрахункового випуску продукції до фактичного:
а – функція Кобба – Дугласа; *б* – функція, що явно залежить від об'ємних показників та капіталоозброєності.

Висновки. В роботі досліджена виробнича функція $Y = Y(K, L, K/L)$, де Y – обсяг продукції; K – основний капітал; L – робоча сила; K/L – капіталоозброєність. Пропонується в цій узагальненій формулі Кобба – Дугласа вважати, що показники степеня над L і K є білінійними функціями від змінних L і K, а Y – загальний випуск. Множник A замінюється на $e^{C_1 \frac{K}{L}}$.

Досліджений метод знаходження невідомих параметрів $C_1 \dots C_9$ за умови найкращого середньоквадратичного наближення до експериментальних даних, що використовувалися в праці Кобба і Дугласа [1].

Запропонована формула для залежності $Y = Y(K, L, K/L)$ і для даних, що використовувались в статті Кобба – Дугласа, отримані параметри цієї формули. Вона підтверджує відомий в економіці факт, що при збільшенні капіталоозброєності Y (обсяг продукції) спочатку зростає, а потім прямує до деякого сталого значення. Ця модель дозволяє нам прогнозувати значення Y для тих значень капіталоозброєності, які виходять за межі таблиці даних, що використовувались в статті Кобба і Дугласа. А також знаходити максимальний можливий випуск продукції Y при збільшенні капіталоозброєності, відповідний даній таблиці експериментальних значень.

Список літератури

1. *Cobb C. W., Douglas P. H.* A Theory of Production // American Economic Review. – 1928. – December. – pp. 139 – 165.
2. *Гераськин М. И.* Математическая экономика : теория производства и потребительского выбора. Учеб. Пособие // Самар. гос. аэроксом. ун-т. – Самара, 2004. – 102 с.
3. *Зацерkляний М. М., Мельников О. Ф.* Основи економічної кібернетики : Навч. посібник. – Чернівці : ТОВ «Видавництво «Наші книги»», 2008. – 392 с.
4. *Шапиро Л. Д., Виноградов Т. В., Лотош Я. М.* Экономико-математическое моделирование. – Томск : Изд-во Том. Ун-та, 1987. – 248 с.
5. *Артюх М. В., Литвин О. М.* Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі даних Кобба – Дугласа // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2012. – № 27. – С. 124 – 129.
6. *Калюжний В. В.* Пояснення парадоксів неокласичної моделі економічного зростання Р. Солоу // Вісник Національного банку України. – Київ, 2005. – № 2. – С. 32 – 40.
7. *Литвин О. М.* Дивідіріальні та мультигральні числення : монографія. – К. : Наук. думка, 2006. – 144 с.

References (transliterated)

1. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production. *American Economic Review*. 1928, December, pp. 139–165.
2. Geras'kin M. I. *Matematicheskaya ekonomika : teoriya proizvodstva i potrebitel'skogo vybora. Ucheb. posobie* [Mathematical Economics: Theory of Production and Consumer Choice. Textbook]. Samara, Samarskiy gosudarstvennyy aerokosmicheskiy universitet Publ., 2004. 102 p.
3. Zatserklyanyy M. M., Mel'nykov O. F. *Osnovy ekonomichnoyi kibernetyky : Navch. posibnyk* [Fundamentals of Economic Cybernetics: Textbook]. Chernivtsi, TOV "Vydavnytstvo "Nashi knygy"" Publ., 2008. 392 p.
4. Shapiro L. D., Vinogradov T. V., Lotosh Ya. M. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie* [Economic-mathematical modeling]. Tomsk, Izd-vo Tom. Un-ta Publ., 1987. 248 p.
5. Artyukh M. V., Lytvyn O. M. Vyrobnycha funktsiya zi zminnymy koefitsiyentamy elastychnosti, pobudovana na osnovi danykh Kobba – Duglasa [Production function with variable flexibility coefficients built on the basis of Cobb – Douglas data]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats'. Tematychnyy vypusk : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» *Tematychnyy vypusk:* Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI»

Publ., 2012, no. 27, pp. 124–129.
6. Kalyuzhnyy V. V. Poyasnennya paradoksiv neoklasychnoyi modeli ekonomichnogo zrostannya R. Solou [The explanation of the paradoxes of the neoclassical model of economic growth R. Solow]. *Visnyk Natsional'nogo banku Ukrayiny* [Bulletin of the National Bank of Ukraine]. Kyyiv, 2005, no. 2, pp. 32–40.
7. Lytvyn O. M. *Dyvidirial'ni ta mul'tygral'ni chyslennya : monografiya* [Dyvidirial and multyhral calculus. Monograph]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2006. 144 p.

Надійшла (received) 06.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Узагальнена виробнича функція, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 51 – 56. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Обобщенная производственная функция, явно зависящая от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 51 – 56. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

The generalized production function, which depends explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment / O. M. Lytvyn, M. V. Artyukh // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 51 – 56. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Литвин Олег Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Litvin Oleg Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Артюх Марина Володимирівна – асистент кафедри інформаційних, комп'ютерних і поліграфічних технологій, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

Артюх Марина Владимировна – ассистент кафедры Информационных, компьютерных и полиграфических технологий, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

Artyukh Maryna Volodymyrivna – Assistant at the Department of Information, Computer and Printing Technologies, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН, О. П. НЕЧУЙВІТЕР, К. В. КЕЙТА

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ У ВИПАДКУ РІЗНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Робота присвячена розробці математичних моделей цифрової обробки сигналів та зображень на прикладі побудови кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних. Розглядається кубатурна формула обчислення інтегралів від тригонометричних функцій двох змінних з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її значеннями в точках. Кубатурна формула будується з використанням оператора інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Отримано оцінку похибки наближення кубатурних формул на класі диференційованих функцій. Наведено чисельний експеримент, який підтверджує теоретичні результати дослідження.

Ключові слова: інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних, кубатурні формули, інтерлінація функцій.

Работа посвящена усовершенствованию математических моделей цифровой обработки сигналов и изображений на примере построения кубатурных формул приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций двух переменных. Рассматривается кубатурная формула вычисления интегралов от тригонометрических функций двух переменных с использованием интерлинации в случае, когда информация о функции задана ее значениями в точках. Кубатурная формула строится с использованием оператора интерлинации со вспомогательными функциями в виде кусочно-постоянных сплайнов. Получены оценки погрешности приближения кубатурных формул на классе дифференцированных функций. Приведен численный эксперимент, подтверждающий теоретические результаты исследования.

Ключевые слова: интегралы от быстроосциллирующих функций двух переменных, кубатурные формулы, интерлинация функций.

The paper deals with improving mathematical models of digital processing of signals and images by the example of constructing cubature formulas for computing integrals of high oscillating functions of two variables. The cubature formula for computing integrals of trigonometric functions of two variables using interlineation is considered for the case when the information about the function is given pointwise. The cubature formula is construc-