

УДК 519.6

В. Д. ДУШКИН**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН НА МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ГРЕБЁНКЕ**

Получены системы сингулярных интегральных уравнений исследуемой задачи. Исходная краевая задача для уравнения Гельмгольца с краевыми условиями третьего рода сведена к системе сингулярных интегральных уравнений с помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований. Показано, что системы интегральных уравнений задач дифракции на идеально проводящей и не идеально проводящей гребёнке имеют одинаковые типы особенностей и различаются видом гладких частей ядер. Для численного решения данной задачи применим метод дискретных особенностей.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, задачи дифракции, метод параметрических представлений интегральных преобразований.

В. Д. ДУШКИН**ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ МОНОХРОМАТИЧНИХ ХВИЛЬ НА БАГАТОЕЛЕМЕНТНІЙ ПЕРІОДИЧНІЙ НЕ ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНІЙ ГРЕБІНЦІ**

Отримані системи сингулярних інтегральних рівнянь досліджуваної задачі. Початкову крайову задачу для рівняння Гельмгольца з крайовими умовами третього роду зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою методу параметричних представлень інтегральних перетворень. Показано, що системи інтегральних рівнянь задач дифракції на ідеально провідній і не ідеально провідній гребінці мають однакові типи особливостей і відрізняються видом гладких частин ядер. Для чисельного розв'язання цієї задачі можна застосувати метод дискретних особливостей.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, задачі дифракції, метод параметричних представлень інтегральних перетворень.

V. D. DUSHKIN**INTEGRAL EQUATIONS FOR THE DIFFRACTION PROBLEM OF MONOCHROMATIC WAVES ON A MULTI-ELEMENT PERIODIC NOT PEC RECTANGULAR FLANGE**

Systems of singular integral equations of the investigated problem are obtained. The original mixed boundary value problem for the Helmholtz equation is reduced to a system of singular integral equations. The method of parametric representations of integral transformations is used. It is shown that systems of integral equations of problems of diffraction on conducting and non-perfectly conducting rectangular flanges have the same types of singularities. These systems of integral equations differ in the smooth part of the kernel. For the numerical solution of this problem the method of discrete singularities can be used.

Key words: singular integral equations, diffraction problems, the method of parametric representations of integral transforms.

Введение. Исследование процессов взаимодействия электромагнитных волн с различными электродинамическими структурами приводит к созданию математических моделей, описывающих процесс рассеяния волн на гребёночных структурах [1 – 3]. Для формирования нужных характеристик полей представляет интерес рассмотрение многоэлементных гребёнок и моделей, рассматривающих не идеально проводящие гребёночные структуры.

Анализ последних исследований. Применение численно-аналитического подхода, предложенного Ю.В. Ганделем, позволило построить математические модели большого класса задач электродинамики [2 – 7]. Данный подход предполагает сведение исходных краевых задач для уравнения Гельмгольца к системам сингулярных или гиперсингулярных уравнений помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований [8 – 10]. Для проведения численного моделирования на основе полученных систем уравнений применяется метод дискретных особенностей. Этот подход оказался также эффективен для построения математических моделей задач на не идеально проводящих структурах [11 – 15], где для описания поведения поля на границе раздела сред, как и в работах [16 – 17], использовались граничные условия Щукина-Леонтовича. Результаты работ [11 – 12], дали возможность получить систему сингулярных интегральных уравнений задачи дифракции монохроматических волн на периодической многоэлементной гребёнке, способ получения которых описан в этой статье.

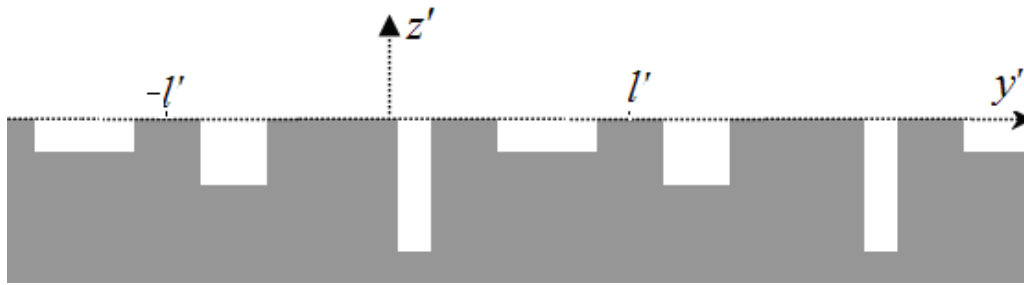
Постановка задачи. Дифракционная структура представляет $2l'$ периодическую по оси oy' и однородную по оси ox' гребёнку, изготовленную из металла, обладающего конечной проводимостью. На гребёнке находится M углублений прямоугольной формы (рис. 1).

На гребёнку из бесконечности сверху наклонно (угол θ) падает монохроматическая E – поляризованная электромагнитная волна, ненулевая компонента электрического поля которой имеет вид:

$$u^*(y', z') = E_x(y', z') = \exp\{ik(y' \cdot \sin \theta - z' \cdot \cos \theta)\}. \quad (1)$$

Необходимо найти компоненты электромагнитного поля, рассеянного структурой.

© В. Д. Душкин, 2018

Рис. 1 – Сечение структуры плоскостью $y'oz'$.

Математическая модель. Необходимо найти в области Ω' , которая представляет часть пространства вне гребёнки, решение уравнения Гельмгольца:

$$\Delta U' + k^2 U' = 0, \quad (2)$$

которое удовлетворяет импедансным граничным условиям:

$$\frac{\partial U'}{\partial n} - h' \cdot U' \Big|_{(y', z') \in \partial \Omega'} = 0, \quad (3)$$

условию на ребре, которое эквивалентно условию ограниченности энергии в любой ограниченной области плоскости $y'oz'$, условию излучения Зоммерфельда и условию квазипериодичности Флоке:

$$U'(y' + 2l', z') = \exp\{ikl' \cdot \sin \theta\} \cdot U'(y', z'). \quad (4)$$

Учитывая условия Флоке, поле достаточно искать только в слое шириной $2l'$ по переменной y' . Введём обозначения:

$$\kappa = \frac{l' \cdot k}{\pi} = \frac{2l'}{\lambda}, \quad y = \frac{\pi}{l'} y', \quad z = \frac{\pi}{l'} z', \quad h = \frac{l' \cdot h'}{\pi}, \quad U(y, z) = U'(y', z'). \quad (5)$$

Обозначим область над структурой Ω_0 :

$$\Omega_0 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \pi \wedge z > 0\}, \quad (6)$$

а области, отвечающие канавкам Ω_q :

$$\Omega_q = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : -\eta_q < z < 0, -\pi < \alpha_q < y < \beta_q < \pi\}, \quad q = 1, \dots, M. \quad (7)$$

Введём в рассмотрение функцию:

$$u_0(y, z) = \exp\{i\kappa(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta)\} + \frac{i\kappa \cos \theta + h}{i\kappa \cos \theta - h} \cdot \exp\{i\kappa(y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)\}. \quad (8)$$

Она является решением в области Ω_0 вспомогательной задачи дифракции волны

$$u^*(y, z) = \exp\{i\kappa(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta)\}$$

на экране, который полностью заполняет плоскость $z = 0$, на границе которого выполняются условия Щукина-Леонтовича:

$$\frac{\partial u_0(y, 0)}{\partial z} - h \cdot u_0(y, 0) = 0, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Полное поле $U(y, z)$ в области Ω_0 ищем в виде:

$$U(y, z) = u_0(y, z) + U_0(y, z), \quad (10)$$

где

$$U_0(y, z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\gamma_{0,n} + h} \cdot \exp(-i\gamma_{0,n}z) \cdot \exp(i(n + \kappa \sin \theta)y); \quad (11)$$

$$\gamma_{0,0} = -i\kappa \cos \theta, \quad \gamma_{0,n} = \sqrt{(n + \kappa \sin \theta)^2 - \kappa^2}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (12)$$

Условия излучения Зоммерфельда будут выполнены, если $\text{Re}(\gamma_{0,n}) \geq 0$, $\text{Im}(\gamma_{0,n}) \leq 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Введём обозначения:

$$\phi_q = \frac{\beta_q + \alpha_q}{2}, \quad \psi_q = \frac{\pi}{\beta_q - \alpha_q}, \quad q = 1, \dots, M. \quad (13)$$

Рассмотрим систему функций:

$$\omega_{q,2n}(y) = \cos\left(\sqrt{\lambda_{q,2n}} \cdot (y - \phi_q)\right); \quad (14)$$

$$\omega_{q,2n-1}(y) = \sin\left(\sqrt{\lambda_{q,2n-1}} \cdot (y - \phi_q)\right), \quad n \in N, \quad q = 1, \dots, M, \quad (15)$$

где комплексные числа $\sqrt{\lambda_{q,2n}}$, $n \in N$, являются корнями уравнений:

$$\sqrt{\lambda_{q,2n}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{q,2n}} \cdot \psi_q}{2\pi}\right) - h \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_{q,2n}} \cdot \psi_q}{2\pi}\right) = 0, \quad (16)$$

а комплексные числа $\sqrt{\lambda_{q,2n+1}}$, $n \in N$, являются корнями уравнений:

$$\sqrt{\lambda_{q,2n+1}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_{q,2n+1}} \cdot \psi_q}{2\pi}\right) + h \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{q,2n+1}} \cdot \psi_q}{2\pi}\right) = 0. \quad (17)$$

Из свойств решений задач Штурма-Лиувилля [18] и результатов, приведенных в [6], следует, что система функций $\omega_{q,n}(y)$, $n = 1, \dots, \infty$ является полной на отрезке $[\alpha_q, \beta_q]$ и множество корней уравнений (16), (17) имеет единственную точку сгущения на бесконечности, причём:

$$\sqrt{\lambda_{q,n}} = \psi_q \cdot n + \frac{2h}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad q = 1, \dots, M. \quad (18)$$

Данные свойства доказывают законность представления полей $U_q(y, z)$ в областях Ω_q в виде:

$$U_q(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n,q}} C_{n,q} \cdot Z_{q,n}(z) \cdot \omega_{q,n}(y), \quad (19)$$

где

$$(\gamma_{q,n})^2 = \lambda_{q,n} - k^2; \quad (20)$$

$$Z_{q,n}(z) = \frac{\gamma_{q,n} \cdot \left[h \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{q,n}(z + \eta_q)) + \gamma_{q,n} \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{q,n}(z + \eta_q)) \right]}{(\gamma_{q,n}^2 - h^2) \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{q,n} \cdot \eta_q)}; \quad (21)$$

$$Z_{q,n}'(0) - h \cdot Z_{q,n}(0) = \gamma_{n,q}, \quad Z_{q,n}'(-\eta_q) - h \cdot Z_{q,n}(-\eta_q) = 0. \quad (22)$$

Действуя так же, как в [6], введем в рассмотрение функцию:

$$F(y) = \frac{\partial U_0(y, 0)}{\partial z} - h \cdot U_0(y, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \exp[i(n + \kappa \sin \theta)y], \quad |y| \leq \pi. \quad (23)$$

Пусть $L = \bigcup_{q=1}^M (\alpha_q, \beta_q)$ – множество y -координат точек плоскости $z = 0$, свободных от структуры и расположенных на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Из (3) и (9) следует равенство:

$$F(y) = 0, \quad y \in CL = [-\pi, \pi] \setminus L. \quad (24)$$

Согласно определению (23) функции $F(y)$ имеем:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_L F(t) \cdot \exp(-i(n + \kappa \sin \theta)t) dt; \quad (25)$$

$$U_0(y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_L K_{0,1}(y, t) F(t) dt, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} K_{0,1}(y, t) = & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,n} + h} \cdot \exp(i(n + \kappa \sin \theta) \cdot (y - t)) = Q_0(y, t) + \\ & + \exp(i\kappa \sin \theta \cdot (y - t)) \cdot \left(2 \cdot \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{(y-t)}{2} \right| - 2\kappa i \sin \theta \cdot \int_0^{y-t} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds \right); \quad (27) \\ Q_0(y, t) = & - \exp(i\kappa \sin \theta \cdot (y - t)) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_{0,n} + h} + \frac{1}{\gamma_{0,-n} + h} - \frac{2}{n} \right) \cdot \cos[n(y-t)] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\gamma_{0,0} + h} + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_{0,n} + h} - \frac{1}{\gamma_{0,-n} + h} + \frac{2\kappa \sin \theta}{n^2} \right) \cdot \sin[n(y-t)] \Bigg\}. \quad (28)$$

Заметим, что $Q_0(y, t) \in C^{1,\varphi}[-\pi, \pi]$, $\varphi > 0$.

Пусть

$$K_{0,2}(y, t) = \frac{\partial K_{0,1}(y, t)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,n} + h} \cdot \exp[i(n + \kappa \sin \theta) \cdot (y-t)] = \frac{\partial Q_0(y, t)}{\partial y} + \exp[i\kappa \sin \theta \cdot (y-t)] \cdot \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{(y-t)}{2} \right) + \kappa^2 \sin^2 \theta \cdot \int_0^{y-t} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds \right). \quad (29)$$

Из условия непрерывности поля и его производных на границе раздела областей Ω_0 и Ω_q и следуют соотношения:

$$u_0(y, 0) + U_0(y, 0) = U_q(y, 0), \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M); \quad (30)$$

$$\frac{\partial U_0(y, 0)}{\partial z} - h \cdot U_0(y, 0) = \frac{\partial U_q(y, 0)}{\partial z} - h \cdot U_q(y, 0), \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M). \quad (31)$$

Введём обозначения:

$$W_{q,n} = Z_{q,n}(0), \quad n \in N, \quad (q = 1, \dots, M), \quad (32)$$

где

$$Z_{q,n}(0) = 1 + \left(\frac{1}{n} \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Следствием (31) являются следующие соотношения:

$$F(y) = \frac{\partial U_q(y, 0)}{\partial z} - h \cdot U_q(y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{q,n} \cdot \omega_{q,n}(y), \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M); \quad (34)$$

$$C_{q,n} = \frac{2 \cdot \psi_q}{\pi \cdot [\omega_{q,n}]^2} \cdot \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \omega_{q,n}(t) \cdot F(t) dt, \quad (35)$$

где

$$[\omega_{q,n}]^2 = \frac{\pi}{2\psi_q} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \omega_{q,n}^2(t) dt, \quad (q = 1, \dots, M); \quad (36)$$

$$[\omega_{q,n}]^2 = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (37)$$

Таким образом, учитывая (34 – 36), для функций $U_q(y, 0)$ получаем представления:

$$U_q(y, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K_{1,q}(y, t) \cdot F(t) dt, \quad (38)$$

где

$$K_{1,q}(y, t) = 2\psi_q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_{q,n} \cdot \omega_{q,n}(t) \cdot \omega_{q,n}(y)}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} = \psi_q \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_{q,n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_{q,n}}(t-y))}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{W_{q,n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_{q,n}}(t+y-2\phi_q))}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} \right]. \quad (39)$$

Справедливы равенства:

$$\theta_q \cdot \frac{W_{q,n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_{q,n}} \cdot t)}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} = \frac{\cos(\psi_q \cdot nt)}{n} - \frac{2ht}{n^2 \cdot \pi} \sin(\psi_q \cdot nt) + Q_{q,n}(t); \quad (40)$$

$$Q_{q,n}(t) = \left[\frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_{q,n}} \cdot t)}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} - \frac{\cos(\psi_q \cdot nt)}{n} + \frac{2ht}{n^2 \cdot \pi} \sin(\psi_q \cdot nt) \right]; \quad (41)$$

$$Q_{q,n}(t) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (42)$$

Учитывая (39 – 41) и известные представления рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n} = -\ln\left(2 \cdot \sin \frac{t}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nt)}{n} = -\ln\left|2 \cdot \cos \frac{t}{2}\right|, \quad t \in (0, 2\pi), \quad (43)$$

получаем:

$$K_{1,q}(y, t) = -\ln\left|2 \cdot \sin\left(\psi_q \cdot \frac{t-y}{2}\right)\right| + \frac{2h(t-y)}{\pi} \int_0^{\psi_q(t-y)} \ln\left|2 \cdot \sin \frac{s}{2}\right| ds + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{q,n}(t-y) - \ln\left|2 \cdot \cos\left(\psi_q \cdot \frac{t+y}{2}\right)\right| - \\ + \frac{2h(t+y-2\phi_q)}{\pi} \int_0^{\psi_q(t+y-2\phi_q)} \ln\left|2 \cdot \cos \frac{s}{2}\right| ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_{q,n}(t+y-2\phi_q). \quad (44)$$

Из условий сопряжения (30) и интегральных представлений (26), (38) получаем систему интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью в ядре:

$$U_0(y, 0) + \frac{1}{\pi} \int_L K_{1,0}(y, t) F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K_{1,q}(y, t) \cdot F(t) dt, \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M). \quad (45)$$

Введём функции:

$$K_{2,q}(y, t) = \frac{dK_{1,q}(y, t)}{dy} = \frac{\psi_q}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\psi_q \cdot \frac{t-y}{2}\right) - \frac{2h}{\pi} \left\{ \int_0^{\psi_q(y-t)} \ln\left|2 \cdot \sin \frac{s}{2}\right| ds + \psi_q \cdot (t-y) \cdot \ln\left|2 \cdot \sin \frac{y-t}{2}\right| \right\} + \\ + \frac{\psi_q}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\psi_q \cdot \frac{t+y}{2}\right) + \frac{2h}{\pi} \left\{ \int_0^{\psi_q(t+y-2\phi_q)} \ln\left|2 \cdot \cos \frac{s}{2}\right| ds + \psi_q \cdot (t+y-2\phi_q) \cdot \ln\left|2 \cdot \cos\left(\psi_q \cdot \frac{y+t-2\phi_q}{2}\right)\right| \right\} + \\ + \frac{d}{dy} \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_{q,n}(t-y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_{q,n}(t+y-2\phi_q) \right). \quad (46)$$

Система интегральных уравнений (45) эквивалентна системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{\partial U_0}{\partial y}(y, 0) + \frac{1}{\pi} \int_L K_{2,0}(y, t) F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K_{2,q}(y, t) F(t) dt, \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M), \quad (47)$$

с дополнительными условиями:

$$U_0(\xi_q, 0) + \frac{1}{\pi} \int_L K_{1,0}(\xi_q, t) F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K_{1,q}(\xi_q, t) \cdot F(t) dt, \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M), \quad (48)$$

ξ_q – произвольные, но фиксированные точки интервала (α_q, β_q) .

Выводы. Система уравнений (47 – 48) принадлежит классу систем сингулярных интегральных уравнений, которые встречались при решении задач дифракции H – поляризованных волн на идеально проводящей гребёнке, и отличается от них видом непрерывных частей ядер. Поэтому алгоритм дальнейшего численного решения этих задач методом дискретных особенностей совпадает. Данные интегральные уравнения по своей структуре отличаются от систем интегральных уравнений задач дифракции на не идеально проводящих ленточных структурах [13, 19], для которых разработаны специальные модификации метода дискретных особенностей [20, 21].

Список литературы

1. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1 : Дифракционные решетки. – Киев : Наук. думка, 1986. – 232 с.
2. Gandel Y. V., Dushkin V. D., Zaghinaylov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures // Telecommunications and Radio Engineering. – 2000. – V.54. – N7. – P. 139 – 144.
3. Steshenko S. A., Tsvyk A. I., Khutoryan E. M. Radiation patterns of "plasma" electron beam on structures of metal grooves // Physics and Engi-

- neering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves, 2004. MSMW 04. The Fifth International Kharkov Symposium. – 2004. – V. 2. – N. 7. – P. 521 – 524.
4. Bulygin V. S., Benson T. M., Gandel Y. V., Nosich A. I. Full-wave analysis and optimization of a TARA-like shield-assisted paraboloidal reflector antenna using a nystrom-type method // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2013. – V. 61. – no. 10. – pp. 4981 – 4989.
 5. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Nystrom-type method in three-dimensional electromagnetic diffraction by a finite PEC rotationally symmetric surface // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2012. – V. 60 (10). – pp. 4710 – 4718.
 6. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: монография. – Х. : Акад. ВВ МВД Украины, 2012. – 544 с.
 7. Духопельников С. В. Неоднородности у порожнині антени та дифракційні властивості антен спеціального вигляду. Чисельний аналіз, частина I // *Вестник Харк. нац. ун-та. Сер. : Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления*. – 2016. – Вып. 32. – С. 25 – 34.
 8. Akhiezer N. I. Lectures on integral transforms. *Translations of Mathematical Monographs*, 70 // American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. – 108 p.
 9. Gandel' Yu. V. Parametric representations of integral and pseudodifferential operators in diffraction problems // *Conf. Proc., 10th Int. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. (Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14 – 17)*. – Dnepropetrovsk, 2004. – pp. 57 – 62.
 10. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures // *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD 2012 (28 May – 1 June 2012)*. – St. Petersburg, 2012. – pp. 76 – 81.
 11. Душкин В. Д. Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов // *Доп. НАН України*. – 1999. – № 9. – С. 11 – 15.
 12. Dushkin V. D. Application of the Singular Integral Transform Method to the Solution of the Two-Dimensional Problem of Diffraction of Electromagnetic Waves from a Superconducting Layer with Rectangular Waveguide Channels // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 2001. – V. 56. – N. 2. – P. 78 – 86.
 13. Gandel Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – Vol. 212. – N. 2. – P. 156 – 166.
 14. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – V. 212. – N. 2. – P. 142 – 155.
 15. Kostenko O. V. Mathematical model of wave scattering by an impedance grating // *Cybernetics and systems analysis*. – 2015. – Vol. 51. – No. 3. – pp. 344 – 360.
 16. P'insky A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves. – London, UK : The IEE and Peter Peregrinus Ltd., *Electromagnetic Waves (Series 36)*, 1993. – 275 p.
 17. Кравченко В. Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. – М. : Физматлит, 2006. – 280 с.
 18. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. – Киев : Наук. думка, 1972. – 220 с.
 19. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Граничные интегральные уравнения третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца в R_+^2 с плоскопараллельными разрезами // *Доп. НАН України*. – 2014. – № 8. – С. 14 – 19.
 20. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts // *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. – 2017. – Vol. 13. – No. 3. – P. 254 – 267.
 21. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The Approximate Method for Solving the Boundary Integral Equations of the Problem of Wave Scattering by Superconducting Lattice // *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*. – 2014. – Vol. 2. – No. 6. – pp. 369 – 375.

References (transliterated)

1. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S. A., Sirenko Y. K. *Rezonansnoe rasseyaniye voln. T. 1 : Difraktsionnye reshetki* [Resonance scattering of waves. Vol. 1. Diffraction Gratings]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1986. 232 p.
2. Gandel Y. V., Dushkin V. D., Zaghinaylov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2000, vol. 54, no. 7, pp. 139–144.
3. Steshenko S. A., Tsvyk A. I., Khutoryan E. M. Radiation patterns of "plasma" electron beam on structures of metal grooves. *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves, 2004. MSMW 04. The Fifth International Kharkov Symposium*. 2004, vol. 2, no. 7, pp. 521–524.
4. Bulygin V. S., Benson T. M., Gandel Y. V., Nosich A. I. Full-wave analysis and optimization of a TARA-like shield-assisted paraboloidal reflector antenna using a nystrom-type method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2013, vol. 61, no. 10, pp. 4981–4989.
5. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Nystrom-type method in three-dimensional electromagnetic diffraction by a finite PEC rotationally symmetric surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2012, vol. 60 (10), pp. 4710–4718.
6. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. *Matematicheskie modeli dvumernykh zadach difraktsii : singulyarnye integral'nye uravneniyai chislennyye metody diskretnykh osobennostey : monografiya* [Mathematical models of two-dimensional diffraction problems: Singular integral equations and numerical discrete singularities method. Monograph]. Kharkov, Academy of Internal Defence of the MIA of Ukraine Publ., 2012. 544 p.
7. Dukhopel'nikov S. V. Neodnorodnosti u porozhnyni anteny ta dyfraktsiyni vlastyvosti anten spetsial'nogo vyglyadu. Chysel'nyy analiz, chastyna 1 [Inhomogeneities in the antenna cavity and the diffractive properties of antennas of a special form Numerical analysis, Part 1]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo un-ta. Seriya : Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya* [Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series : Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems]. 2016, vol. 32, pp. 25–34.
8. Akhiezer N. I. *Lectures on integral transforms. Translations of Mathematical Monographs*, 70. American Mathematical Society, Providence, RI Publ., 1988. 108 p.
9. Gandel Yu. V. Parametric representations of integral and pseudodifferential operators in diffraction problems. *Conf. Proc., 10th Int. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. (Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14 – 17)*. Dnepropetrovsk, 2004, pp. 57–62.
10. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures. *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD 2012 (28 May – 1 June 2012)*. St. Petersburg, 2012, pp. 76–81.
11. Dushkin V. D. Reshenie dvumernoy zadachi difraktsii s kraevymi usloviyami tret'ego roda na bokovoy poverkhnosti volnovodnykh kanalov [Solution of the two-dimensional diffraction problem with boundary conditions of the third kind on the side surface of waveguide channels]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the NAS of Ukraine]. 1999, no. 9, pp. 11–15.
12. Dushkin V. D. Application of the Singular Integral Transform Method to the Solution of the Two-Dimensional Problem of Diffraction of Electro-

- magnetic Waves from a Superconducting Layer with Rectangular Waveguide Channels. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2001, vol. 56, no. 2, pp. 78–86.
13. Gandel Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 212, no. 2, pp. 156–166.
 14. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 212, no. 2, pp. 142–155.
 15. Kostenko O. V. Mathematical model of wave scattering by an impedance grating. *Cybernetics and systems analysis*. 2015, vol. 51, no. 3, pp. 344–360.
 16. Il'insky A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. *Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves*. London, UK : The IEE and Peter Peregrinus Ltd. Publ., Electromagnetic Waves (Series 36), 1993. 275 p.
 17. Kravchenko V. F. *Eylektrodinamika sverkhprovodyashhikh struktur. Teoriya, algoritmy i metody vychisleniy* [The electrodynamics of superconducting structures. The theory, algorithms and computational methods]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 280 p.
 18. Marchenko V. A. *Spektral'naya teoriya operatorov Shturma – Liuvillya* [Spectral theory of Sturm-Liouville operators]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1972. 220 p.
 19. Gandel Y. V., Dushkin V. D. Granichnye integral'nye uravneniya tret'ey kraevoy zadachi dlya uravneniya Gel'mgol'tsa v R_+^2 s ploskoparallelnymi razrezami [The boundary integral equations of the third boundary-value problem for the Helmholtz equation in the R_+^2 with plane-parallel slits]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the NAS of Ukraine]. 2014, no. 8, pp. 14–19.
 20. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2017, vol. 13, no. 3, pp. 254–267.
 21. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The Approximate Method for Solving the Boundary Integral Equations of the Problem of Wave Scattering by Superconducting Lattice. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 2014, vol. 2, no. 6, pp. 369–375.

Поступила (received) 23.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Душкін Володимир Давидович (Душкин Владимир Давидович, Dushkin Vladimir Davidovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національна академія Національної гвардії України, м. Харків; тел.: (097) 386-64-54; e-mail: dushkinvdv@gmail.com.

УДК 519.6

С. Е. ГАРДЕР, Е. П. ГОМОЗОВ

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КУРСОВОЙ СТОИМОСТИ БИТКОИНА МЕТОДОМ SSA

Приведен обзор существующих на сегодняшний день математических моделей функционирования финансового рынка. Однако, практически все публикуемые исследования носят в основном теоретический характер, прогнозы, как правило, требуют большого количества наблюдений, плохо работают в окрестностях бифуркаций и не имеют компьютерной модели, которая могла бы строить прогнозы в режиме реального времени. В работе на основе метода SSA (Singular Spectrum Analysis) проведен анализ структуры и прогнозирование временного ряда курсовой стоимости биткоина. Получен более точный прогноз по сравнению с применением для прогнозирования моделей ARIMA и ARFIMA-FIGARCH даже и в «критических» для этих моделей случаях.

Ключевые слова: временной ряд, биткойн, анализ структуры, прогноз, сингулярный спектральный анализ, метод SSA – «Гусеница».

С. Е. ГАРДЕР, Е. П. ГОМОЗОВ

АНАЛІЗ І ПРОГНОЗУВАННЯ КУРСОВОЇ ВАРТОСТІ БІТКОІНА ЗА МЕТОДОМ SSA

Надано огляд існуючих математичних моделей функціонування фінансового ринку. Однак, практично усі досліді, що були опубліковані, мають теоретичний характер, прогнози, як правило, потребують більшої кількості спостережень, погано працюють поблизу біфуркацій і не мають комп'ютерної моделі, яка мала б можливість будувати прогнози в режимі реального часу. На засадах методу SSA проведено аналіз структури та прогнозування ряду курсової вартості. Отримано найбільш точний прогноз порівняно з застосуванням для прогнозування моделей ARIMA і ARFIMA-FIGARCH навіть в «критичних» для цих моделей випадках.

Ключові слова: часовий ряд, біткоїн, аналіз структури, прогноз, сингулярний спектральний аналіз, метод SSA – «Гусениця».

S. E. GARDER, E. P. GOMOZOV

ANALYSIS AND PREDICTION OF BITCOIN RATE BY SSA METHOD

In the paper the existing mathematical models of the financial market are reviewed. Nevertheless, the majority of the research published has the essential drawbacks such as the theoretical character of the papers, the amount of the observations required, the inadequate performance in the neighborhood of bifurcation points, and the absence of a computer model capable of real-time prediction. In the present paper we apply the SSA method for analyzing the structure and predicting the behavior of the bitcoin rate time series. The results obtained are of higher accuracy compared to the ones obtained by using the ARIMA and ARFIMA-FIGARCH models for predicting, even in the critical for these models cases.

Key words: time series, bitcoin, structure analysis, prediction, singular spectral analysis, the "Caterpillar"-SSA method.

© С. Е. Гардер, Е. П. Гомозов, 2018