УДК 534 DOI: 10.20998/2222-0631.2021.02.05

Н. С. ГОЛОСКУБОВА, Ю. В. МІХЛІН

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ В ДЕЯКИХ СУТТЄВО НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

Стійкість нормальних форм коливань аналізується за допомогою двох підходів. Перший з них – це так званий метод алгебраїзації за Айнсом, коли обирається нова незалежна змінна, пов'язана з розв'язком, що розглядається. Тоді рівняння в варіаціях перетворюється в рівняння з особливими точками. Проблема отримання розв'язків, що відповідають границям між областями стійкості / нестійкості, в цьому випадку зводиться до проблеми отримання розв'язків, що мають сингулярності в цих особливих точках. Такі розв'язки можна отримати у вигляді степеневих рядів, коефіцієнти яких задовольняють системі однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь. Умова існування нетривіальних розв'язків подібних систем дає границі між областями стійкості/ нестійкості в просторі параметрів вихідної системи. Перевага методу алгебраїзації є в тому, що нема потреби використовувати представлення у часі розв'язку, що досліджується на стійкість. Інший підхід до проблеми стійкості форм коливань пов'язаний з класичним визначенням стійкості за Ляпуновим. Запропонований аналітико-числовий тест може бути використаний в задачі стійкості форм коливань тоді, коли ця проблема не має аналітичного розв'язку. Він також дозволяє отримати границі між областями стійкості / нестійкості у просторі параметрів системи. В роботі перший підхід використано для аналізу стійкості нормальних форм коливань в системі пов'язаних осциляторів на суттєво нелінійній пружній опорі, а другий - для аналізу стійкості горизонтальної форми коливань в так званому стохастичному абсорбері.

Ключові слова: нормальні форми коливань, рівняння у варіаціях, алгебраїзація за Айнсом, стійкість за Ляпуновим.

Н. С. ГОЛОСКУБОВА, Ю. В. МИХЛИН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В НЕКОТОРЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Устойчивость нормальных форм колебаний анализируется при помощи двух подходов. Первый из них – это так называемый метод алгебраизации по Айну, когда выбирается новая независимая переменная, связанная с рассматриваемым решением. При этом уравнение в вариациях преобразуется к виду уравнения с особыми точками. Такие решения можно получить в виде степенных рядов, коэффициенты которых удовлетворяют системе линейных однородных уравнений. Условие существования нетривиальных решений подобных систем дают границы областей устойчивости / неустойчивости в пространстве параметров исходной системы. Задача получения решений, которые отвечают границам между областями устойчивости / неустойчивости, в этом случае сводится к задаче определения решений, которые имеют сингулярности в этих особых точках. Преимущество метода алгебраизации состоит в том, что здесь не требуется использовать представление во времени решения, которое исследуется на устойчивость. Другой подход к решению задачи устойчивости связан с классическим определением устойчивости по Ляпунову. Предложенный аналитико-числовой тест может быть использован в задаче устойчивости форм колебаний в том случае, когда эта задача не имеет аналитического решения. Он также позволяет определять границы областей устойчивости / неустойчивости в пространстве параметров системы. В работе первый подход используется для анализа устойчивости нормальных форм колебаний в системе связанных осцилляторов на существенно нелинейной упругой опоре, а второй - для анализа устойчивости горизонтальной формы колебаний в так называемом стохастическом абсорбере.

Ключевые слова: нормальные формы колебаний, уравнения в вариациях, алгебраизация по Айнсу, устойчивость по Ляпунову.

N. S. GOLOSKUBOVA, YU. V. MIKHLIN

INVESTIGATION OF THE NORMAL VIBRATION MODES STABILITY IN SOME ESSENTIALLY NONLINEAR SYSTEMS

In the paper stability of nonlinear normal modes is analyzed by two approaches. One of them is the method of Ince algebraization, when a new independent variable associated with the unperturbed solution is introduced in the problem. In this case equations in variations are transformed to equations with singular points. The problem of determination of solutions corresponding to boundaries of the stability/ instability regions is reduced here to the problem of determination of functions that have singularity at the mentioned points. Such solutions can be obtained in the form of power series, which coefficients are satisfying a system of homogeneous linear algebraic equations. The condition ensuring the existence non-trivial solutions for such systems determines the boundaries between the stability / instability regions in the system parameter space. An advantage of the Ince algebraization is that we do not use the time-presentation of the solution when studying its stability. Other approach to investigating steady state stability is associated with the classical Lyapunov definition of stability. The analytical-numerical test proposed in the paper can be applied to a stability problem when the problem has no analytical solution. It also allows to obtain boundaries between the stability / instability regions in the system parameter space. In the present paper the first approach is used to analyze stability of normal vibration modes in the system of connected oscillators on the essentially nonlinear elastic support, and the second one is used to analyze stability of a horizontal vibration mode in the so-called stochastic absorber.

Key words: nonlinear normal modes, equations in variations, Ince algebraization, Lyapunov stability.

Вступ. *Нелінійні нормальні форми коливань* (*ННФ*), які є вельми важливими режимами багатьох нелінійних динамічних систем, були вперше розглянуті в роботах *Г. Каудерера* [1] та *Р. Розенберга* [2]. Ці форми коливань є узагальненням *нормальних коливань лінійних систем*. У режимі нормальних коливань *скінченновимірна нелінійна система* веде себе подібно консервативній системі з одним ступенем свободи, а всі позиційні координати є однозначними функціями однієї з них. Концепція ННФ за Каудерером – Розенбергом базується на побудові траєкторій в конфігураціонному просторі системи. Основні положення теорії ННФ та застосування цієї теорії представлено в кількох книгах та оглядах, зокрема, в [3 – 5].

Для розв'язання задачі стійкості коливальних режимів використовуються різні підходи. Ми представимо лише кілька книг, присвячених цій проблемі [6 – 8]. Зазначимо, що стійкість може бути ефективно проаналізована з використанням так званої *Алгебраїзації за Айнсом* [9]. Цей підхід базується на введенні нової незалежної змінної, що пов'язана з розв'язком, який досліджується на стійкість. Перевага цього підходу є у тому, що тут немає необхідності використовувати представлення цього розв'язку у часі. *Метод алгебраїзації* був раніше успішно використаний в задачі щодо стійкості ННФ в деяких нелінійних консеревативних системах [10].

Концепція ННФ може бути використана не тільки для періодичних коливань. Зокрема, неплінійні нормальні форми коливань з гладкими траєкторіями в конфігураціонному просторі та хаотичною поведінкою за часом можуть бути знайдені у *пружних системах*, що знаходяться у *закритичному стані* під дією зовнішніх періодичних впливів, тобто, після втрати стійкості вихідного положення рівноваги під дією стискаючої сили. В цьому випадку проблема стійкості форм коливань не має аналітичного розв'язання, і ми використовуємо деякий *чисельно-аналітичний тест*, що базується на відомому визначенню *стійкості руху за Ляпуновим* [6]. Цей тест було запропоновано та використано в роботі [11].

В даній роботі розглянуто обидва підходи до розв'язання задачі стійкості форм. Метод алгебраїзації використано для дослідження стійкості форм коливань в системі *зв'язаних осциляторів* на суттєво нелінійній пружній опорі в умовах так званого *звукового вакууму*. За допомогою чисельно-аналітичного тесту досліджується стійкість горизонтальної форми коливань в так званому *стохастичному абсорбері*.

Основні результати.

1. Два підходи до вивчення стійкості форм коливань в нелінійних системах.

1.1. Метод алгебраїзації рівнянь в варіаціях за Айнсом. Для дослідження стійкості періодичних розв'язків, зокрема, нормальних форм коливань, в багатьох випадках може бути застосована алгебраїзація рівнянь в варіаціях за Айнсом [9]. Цей підхід базується на тому, що в якості нової незалежної змінної вибирається деяка позиційна координата, пов'язана з розв'язком, яка досліджується на стійкість. Так, наприклад, замість t можна ввести змінну x, що визначає рух уздовж прямолінійної траєкторії ННФ, або швидкість $\dot{x}$, або кінетичну енергію на цьому розв'язку та ін. Таким чином, алгебраїзація може бути виконана різними способами. В результаті рівняння в варіаціях з періодичними коефіцієнтами перетворюється в рівняння з особливими точками. Цей метод дослідження стійкості має ту перевагу, що тут не потрібно використовувати розкладання періодичного розв'язку, що досліджується на стійкість, в *ряд Фур'є*. До недоліків методу відноситься те, що структура рівнянь з особливими точками є складнішою, ніж рівнянь у варіаціях з періодичними коефіцієнтами. Для побудови розв'язків, що визначають границі областей стійкості та нестійкості, в такому випадку можна використовувати степеневі ряди. Так, наприклад, якщо лінійне диференціальне рівняння має особливість при $z = z_0$, то розв'язок такого лінійного рівняння представляється у вигляді:

$$y(z) = (z - z_0)^r \left[a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \right], \tag{1}$$

де число r – це так званий показник особливої точки.

Використання подібної алгебраїзації можливо та найбільш ефективно насамперед для тих випадків, коли відомий перший інтеграл (наприклад, інтеграл енергії) для того розв'язку, що розглядається.

1.2. Чисельно-аналітичний метод як реалізація критерію стійкості за Ляпуновим. Хоча методи аналітичного дослідження стійкості руху досить добре розвинені, точне або наближене аналітичне рішення для систем з декількома ступенями свободи може бути отримано лише в небагатьох окремих випадках.

Описаний далі підхід до визначення границь областей *стійкості*/*нестійкості* форм коливань можна охарактеризувати як чисельну реалізацію класичного визначення стійкості за Ляпуновим.

Досліджуємо, зокрема, стійкість нелінійної нормальної форми коливань нелінійної системи з двома ступенями свободи. Якщо траєкторія такої ННФ в конфігураційному просторі системи визначається прямою лінією, то стійкість форми коливань визначається варіаціями в ортогональному до траєкторії напрямку. Як це прийнято в теорії стійкості, припускаємо, що значення цих варіацій в області стійкості розглянутої форми коливань значно менше амплітудних значень змінних, що описують форму коливань.

Розглянемо класичне визначення стійкості руху за Ляпуновим [6]. Розв'язок є стійким, якщо для будь-якого ε можна знайти таке $\delta \geq 0$, що для усіх $y_i(0) \in N_\delta(0)$ и $t \geq 0$ буде виконано умову $y_i(t) \in N_\varepsilon(0)$. Тут $N_\delta(0)$ та $N_\varepsilon(0)$ означають, відповідно, $\delta-$ та $\varepsilon-$ околи розв'язку $y_i = 0$. Такий окіл може бути обраним різними способами, наприклад, $N_\gamma = \left(|y_i| \leq \gamma \right)$.

Введемо зв'язок між параметром ε та початковим значенням змінної $y_2(0)$. Нехай

$$\varepsilon = \rho |y_i(0)| \leq \rho\delta, \ \ (\rho = const). \tag{2}$$

Умова (2) означає, що величина δ не може бути довільно малою, вона обмежена знизу, тому що

$$\delta \geq \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Перепишемо останню нерівність так:

$$\rho \geq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Крім того, з визначення стійкості, беручи до уваги нерівність (2), знаходимо, що в разі стійкості повинна виконуватися нерівність $\left|y_i(t)\right| \leq \rho\left|y_i(0)\right|$. Враховуючи цю останню нерівність, отримаємо звідси умову нестійкості рішення: $y_i = 0$. Отже, нестійкість рішення фіксується, якщо виконується нерівність:

$$\left|y_i(t)\right| \geq \rho\left|y_i(0)\right|; \quad (0 \leq t \leq T). \tag{3}$$

В умові (3), на відміну від класичного визначення, введено обмежений час руху T. Вибір цієї величини при розрахунку стійкості обговорюється далі.

Обговоримо спочатку вибір величини ρ. Постійна ρ – це верхня границя відношення ε/δ, тому значення ρ^{-1} визначає малість початкових збурень по відношенню до максимально допустимих збурень для будь-яких $t \geq 0$. Зростання величини ρ означає, що допустимі початкові значення варіацій зменшуються. Є істотне свавілля у виборі ρ в області нестійкості, тому що в області нестійкості при зростанні t варіації вийдуть за межі $\varepsilon -$околи вихідного розв'язку при будь-якому виборі цієї величини. Надалі скористаємося наступним міркуванням. Кажуть, що деяка величина α є *на порядок* більшою за β, якщо $\alpha/\beta \approx 10$. Тому при аналізі стійкості можна прийняти $\rho = 10$.

Аналіз стійкості/нестійкості проводиться на площині параметрів системи. Для побудови областей стійкості/нестійкості значення параметрів на цій площині задаються у вигляді деякої сітки. Для кожної точки сітки проводиться чисельний розрахунок, для чого використовується пряме чисельне інтегрування динамічної системи, наприклад, *методом Рунге – Кутта*. Як критерій нестійкості вибирається нерівність (3). Розрахунок границь областей стійкості/нестійкості проводиться при фіксованому значенні T. За результатами розрахунку будуються границі областей стійкості/нестійкості в вузлах даної сітки. Після знаходження такої границі величина T збільшується, і весь розрахунок границі повторюється знову. Якщо границі для різних значень T є близькими, наприклад, виявляються меншими за заздалегідь задану малу величину, розрахунок припиняється. В іншому випадку величина T збільшується, і розрахунок повторюється знову. Таким чином, визначається час обчислень T. Зрозуміло, що час розрахунку T збільшується, коли крок сітки зменшується, а число вузлів відповідно зростає.

Величини ρ та T пов'язані між собою, причому зменшення величини ρ веде до зменшення часу розрахунку T. Підкреслимо, однак, що значення ρ не може бути вибрано дуже малим, оскільки це призводить до великої похибки саме поблизу границь областей стійкості/нестійкості.

2. Стійкість нормальних форм коливань в системі суттєво нелінійних зв'язаних осциляторів. Розглянемо зараз стійкість ННФ в системі зв'язаних осциляторів на суттєво нелінійній пружній опорі в умовах так званого звукового вакууму [12, 13]. Динаміка системи описується наступними рівняннями:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{d^2 v_1}{d\tau^2} + v_1^3 + \dfrac{\mu}{6}\left[v_1^2 + \left(v_2 - v_1\right)^2 + v_2^2\right]\left(2v_1 - v_2\right) = 0; \\ \mu \dfrac{d^2 v_2}{d\tau^2} + v_2^3 + \dfrac{\mu}{6}\left[v_1^2 + \left(v_2 - v_1\right)^2 + v_2^2\right]\left(2v_2 - v_1\right) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Зробимо таку заміну змінних:

$$z_1 = \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Підставляючи (5) в рівняння (4), отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{d^2 z_1}{d\tau^2} + 0.5\left(z_1^2 + 3z_2^2\right)z_1 + \dfrac{\mu}{3}\left[z_1^2 + 3z_2^2\right]z_1 = 0; \\ \mu \dfrac{d^2 z_2}{d\tau^2} + 0.5\left(z_2^2 + 3z_1^2\right)z_2 + \mu\left[z_1^2 + 3z_2^2\right]z_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Ця система допускає дві форми нормальних коливань:

1) $z_2 = 0, \; z_1 = z_1(t)$; відповідне рівняння в варіаціях є таким:

$$\mu \frac{d^2u}{d\tau^2} + (1.5+\mu) z_1^2 u = 0\,; \tag{7}$$

2) $z_1 = 0,\ z_2 = z_2(t)$; відповідне рівняння в варіаціях є таким:

$$\mu \frac{d^2u}{d\tau^2} + \left(1.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_2^2 u = 0\,. \tag{8}$$

Інтеграл енергії для першої форми коливань записується таким чином:

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{dz_1}{d\tau}\right)^2 + \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right)\frac{z_1^4}{4} = h\,. \tag{9}$$

З рівняння (9) отримуємо наступне співвідношення, яке знадобиться надалі для аналізу стійкості:

$$\left(\frac{dz_1}{d\tau}\right)^2 = \frac{2h - \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right)\frac{z_1^4}{2}}{\mu}\,, \tag{10}$$

а з рівняння, що описує рух вздовж форми коливань,

$$\mu \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3 = 0 \text{ (в цьому випадку } z_2 = 0\text{)},$$

отримуємо таке:

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} = \frac{-\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3}{\mu}\,. \tag{11}$$

Підставляючи вирази (10) та (11) в (7), маємо рівняння в варіаціях у вигляді наступного рівняння з особливими точками:

$$\frac{d^2u}{dz_1^2}\left(2h - \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right)\frac{z_1^4}{2}\right) - \frac{du}{dz_1}\left\{\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3\right\} + \left(1.5\mu + \mu^2\right) z_1^2 = 0\,, \tag{12}$$

особливі точки якого можуть бути отримані з наступного рівняння:

$$2h - \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\Phi_0^4}{2} \equiv (z_1 - \Phi_0)\, G(\Phi_0) = 0\,, \tag{13}$$

де Φ_0 – корінь цього рівняння.

Відомо, що саме $T-$ та $2T-$ періодичні розв'язки визначають границі областей стійкості/нестійкості в просторі параметрів рівняння в варіаціях, де T – період коефіцієнтів цього рівняння [7 – 9]. У рівнянні з особливими точками цим *граничним розв'язкам* відповідають степеневі ряди наступного вигляду [3, 4, 6]:

$$u = z^r\left(a_0 + a_1 z + \ldots\right), \tag{14}$$

де r – один з двох показників особливої точки рівняння в варіаціях (12), а $z = z_1 - \Phi_0$.

Для визначення індексів особливої точки Φ_0 введемо ряд (13) в рівняння (12). Об'єднуючи складові з найменшим ступенем z, отримаємо наступне рівняння для визначення цих показників:

$$r\left(r - \frac{1}{2}\right)\left(\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3\right) - r\left\{\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3\right\} = 0\,. \tag{15}$$

Звідси маємо, що

$$r_1 = 0 \text{ та } r_2 = \frac{1}{2}\,. \tag{16}$$

Підставляючи тепер ряд (14), що відповідає нульовому індексу, у рівняння в варіаціях у формі (12) та прирівнюючи коефіцієнти з однаковими ступенями по z, ми отримуємо наступну нескінченну рекурентну систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду:

$$\begin{aligned}
&z^0 : a_0\left[1.5\mu + \mu^2\right]\Phi_0^2 + a_1\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right)\Phi_0^3 + a_2\left\{4h - \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right)\right\}\Phi_0^4 = 0;\\
&z^1 :\ a_0\left\{3\mu + 2\mu^2\right\}\Phi_0 + a_1\left(1.5 + 2.5\mu + \mu^2\right)\Phi_0^2 - a_2\left(3 + 2\mu\right)\Phi_0^3 = 0;\\
&z^2 : a_1\left\{\left(1.5 + 4\mu + 2\mu^2\right)\Phi_0 + \left[1.5\mu + \mu^2\right]\right\} + a_2\left[-2 - 2.5\mu + \mu^2\right]\Phi_0^2 = 0;\\
&z^3 :\ a_1\left(-0.5 + \frac{7}{6}\mu + \mu^2\right) + a_2\Phi_0\left[-1 + \frac{7}{3}\mu + 2\mu^2\right] + a_3\Phi_0^2\left(4.5 + 4.5\mu + \mu^2\right) = 0 \text{ і т.д.}
\end{aligned} \tag{17}$$

Система (17) має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю. Цей визначник був обчислений до п’ятого порядку включно, і, таким чином, було отримано рівняння, що визначає границі областей стійкості / нестійкості ННФ в просторі параметрів системи. Зазначимо, що ці границі для визначників п’ятого порядку є близькими, тому визначники більшого порядку не було обчислено.

Розв’язок, який відповідає другому кореню r_2, представляється у вигляді аналогічного ряду:

$$U_2 = z_1^{r_2}\left(a_0 + a_1 z_1 + \ldots\right). \tag{18}$$

Підставляючи цей ряд у рівняння в варіаціях (12) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z, отримаємо нескінченну рекурентну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладання (18):

$$z^{-\frac{1}{2}} : a_1 \frac{3}{4}\left(2h-\left(0.25+\frac{\mu}{2}\right)\Phi_0^4\right)=0;$$

$$z^{\frac{1}{2}} : a_0\left\{1.25\mu-0.375+\mu^2\right\}\Phi_0^2 - a_1\left(1+\frac{2}{3}\mu\right)\Phi_0^3 + a_2\frac{15}{4}\left(2h-\left(0.25+\frac{\mu}{2}\right)\Phi_0^4\right)=0;$$

$$z^{\frac{3}{2}} : a_0\left(2.5\mu+2\mu^2-0.5\right)\Phi_0 - a_1\left(3.375+0.75\mu-\mu^2\right)\Phi_0^2 - a_2\left(5+\frac{10\mu}{3}\right)\Phi_0^3=0;$$

$$z^{\frac{5}{2}} : a_0\left(1.375\mu+2\mu^2-0.1875-\Phi_0\left(0.5+\frac{\mu}{3}\right)\right)+a_1\left(\Phi_0\left(0.5+\frac{10}{3}\mu+2\mu^2\right)-\Phi_0^2\left(2.25+3\mu\right)\right)+$$

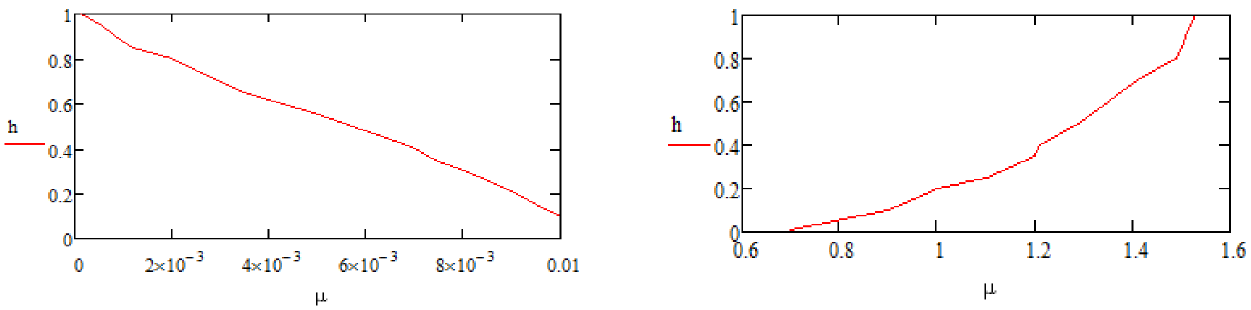
$$+a_2\left(4.5\Phi_0^2\left(0.25+\frac{\mu}{6}\right)+\left(1.5\mu+\mu^2\right)\Phi_0^2-5\Phi_0^3\left(0.5+\frac{\mu}{3}\right)\right)+a_3\left(7h-3.5\Phi_0^4\left(0.25+\frac{\mu}{6}\right)\right)=0. \tag{19}$$

Отже, отримана ще одна система лінійних однорідних рівнянь, яка має нетривіальний розв’язок, якщо її визначник дорівнює нулю. Цей визначник було обчислено до п’ятого порядку включно, і, таким чином, отримано рівняння, що зв’язують параметри системи і визначають границі областей стійкості/нестійкості. Зазначимо, що в цьому випадку також ці границі для визначників п’ятого порядку є близькими, тому визначники більшого порядку не було обчислено.

Повторюючи аналогічні перетворення, які тут не наведено, отримуємо рівняння у варіаціях для другої форми коливань у формі наступного рівняння з особливими точками:

$$\frac{d^2u}{dz_2^2}\left(2h-\left(0.5+\mu\right)\frac{z_2^4}{2}\right)-\frac{du}{dz_2}\left\{\left(0.5+\mu\right)z_2^3\right\}+u\left(1.5+\frac{\mu}{3}\right)z_2^2=0. \tag{20}$$

Як і раніше, розв’язки, що відповідають границям областей стійкості/нестійкості в просторі параметрів рівняння в варіаціях, визначаємо рядом (18), де показники особливої точки рівняння (20) знову визначаються співвідношеннями (16). Підставляючи цей ряд в рівняння в варіаціях, отримуємо, як і раніше, нескінченну рекурентну систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду, яка тут не наведена. Ця система має нетривіальний розв’язок, якщо її визначник дорівнює нулю. Це треба робити як для одного, так і для другого показника особливої точки. Таким чином, отримано рівняння, що зв’язує параметри системи і визначає границі областей стійкості/нестійкості.



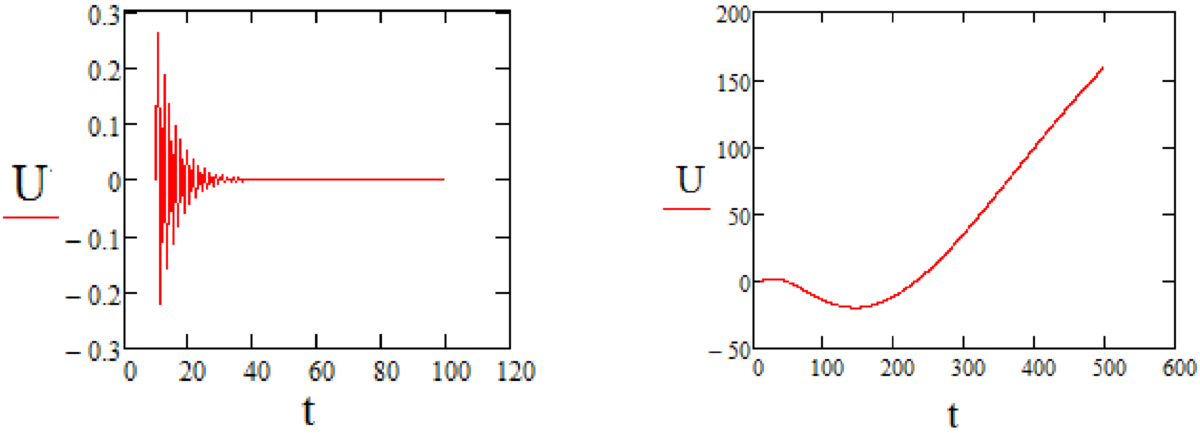
а *б*

Рис. 1 – Границі між областями стійкості/нестійкості рівнянь у варіаціях у просторі параметрів (h, μ): *а* – границя, отримана для першої форми коливань, $z_2=0$, $z_1=z_1(t)$; *б* – границя, отримана для другої форми коливань, $z_1=0$, $z_2=z_2(t)$.

На рис. 1 показано границі областей стійкості/нестійкості у просторі деяких обраних параметрів системи для першої форми коливань, тобто, $z_2=0$, $z_1=z_1(t)$ (рис. 1, *а*) та для другої форми коливань, тобто, $z_1=0$, $z_2=z_2(t)$ (рис. 1, *б*). На рис. 1, *а* повна енергія системи h змінюється в інтервалі [0.1; 1]; параметр μ

змінюється в інтервалі [0.00013; 0.01] при зміні Φ_0 в інтервалі [0.941; 1.682]. На рис. 1, *б* повна енергія системи h змінюється в інтервалі [0.008; 1]; параметр μ змінюється в інтервалі [0.7; 1.53] при зміні Φ_0 на інтервалі [0.404; 1.185]. Зона стійкості розташована зліва від отриманої границі на рис. 1, *а*, та справа – для рис. 1, *б*. Відзначаємо, що границі, отримані для двох різних показників особливої точки, повністю співпадають, як для першої, так і для другої форм коливань.

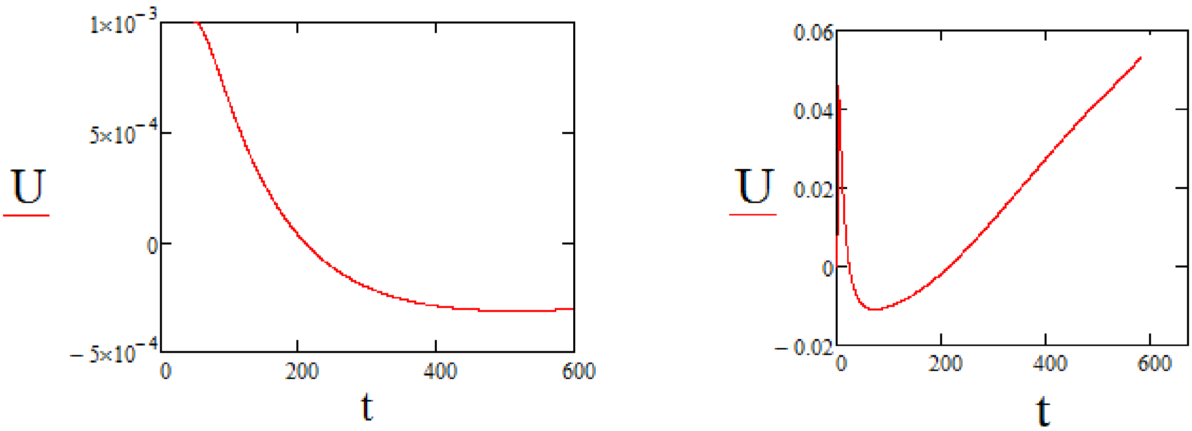
В якості ілюстрації методом Рунге – Кутта 4-го порядку представлено розв'язок рівняння в варіаціях (8); при цьому параметри μ, h для розрахунку вибираються з областей стійкості / нестійкості, представлених на рис. 1. Так, на рис. 2, *а* показано обмежений розв'язок рівняння в варіаціях. Цей розв'язок вибирається з області стійкості, представленої на рис. 1, *а*. А саме, енергія системи $h = 0.2$, $\mu = 0.008$; час t змінюється в інтервалі [0; 120]. Зростаючий розв'язок рівняння в варіаціях представлено на рис. 2, *б*. А саме, розв'язок, представлений на рис. 2, *б*, вибрано з області нестійкості, показаної на рис. 1, *а*; тут $h = 0.4$, $\mu = 0.009$, час t змінюється в інтервалі [0; 600].



а *б*

Рис. 2 – Приклади розв'язків рівняння у варіаціях: *а* – обмежений розв'язок, вибраний з області стійкості на рис. 1, *а*, розрахунки виконано для $h = 0.2$, $\mu = 0.008$; *б* – необмежений розв'язок, вибраний з області нестійкості на рис. 1, *а*, розрахунки виконано для $h = 0.4$, $\mu = 0.009$. Інші параметри відповідають використовуваним раніше для рис. 1, *а*.

Обмежений та необмежений розв'язки рівняння для варіацій, отримані методом Рунге – Кутта, показані на рис. 3, відповідно, для областей стійкості/нестійкості, представлених на рис. 1, *б*. А саме, обмежений розв'язок з області стійкості представлено на рис. 3, *а* для $h = 0.2$, $\mu = 1.4$, час t змінюється на інтервалі [0; 600]. Необмежений розв'язок з області нестійкості показано на рис. 3, *б* для $h = 0.5$, $\mu = 0.8$, час t змінюється на інтервалі [0, 600]. Інші параметри, які використовуються в чисельних розрахунках, ті ж, що використовувалися для отримання границі на рис. 1, *б*.



а *б*

Рис. 3 – Приклади розв'язків рівняння у варіаціях: *а* – обмежений розв'язок, вибраний з області стійкості на рис. 1, б, розрахунки виконано для $h = 0.2$, $\mu = 1.4$; *б* – необмежений розв'язок, вибраний з області нестійкості на рис. 1, *б*, розрахунки виконано для $h = 0.5$, $\mu = 0.8$. Інші параметри відповідають тим, що використані для рис. 1, *б*.

Як можна побачити з представлених рисунків, так і з результатів аналогічних інших розрахунків розв’язків рівнянь у варіаціях, метод алгебраїзації дозволяє отримати границі областей стійкості та нестійкості з вельми задовільною точністю.

3. Дослідження стійкості форми коливань в моделі стохастичного абсорбера. У цьому розділі розглядається стійкість режиму горизонтальної вібрації в моделі так званого стохастичного абсорбера. Відповідна модель, яка є перспективною для задачі гасіння коливань, вперше розглянута в роботі [14]. Стохастичний абсорбер має форму деякого нежорсткого контуру, що відповідає потенційній енергії системи, яка визначає взаємодію однієї або декількох внутрішніх частинок зі стінкою контейнера. Контейнер кріпиться до масивної стінки лінійно-пружною пружиною (рис. 4).

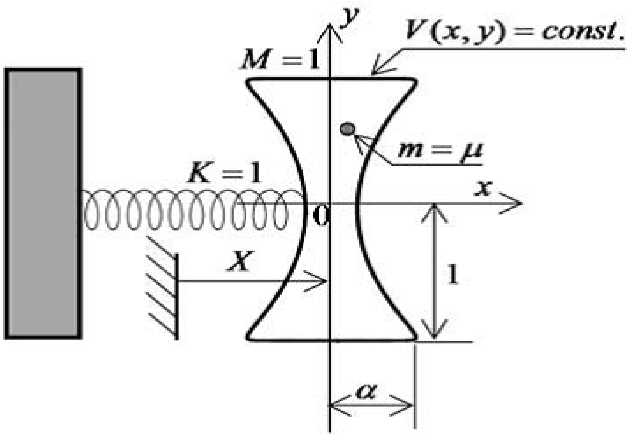


Рис. 4 – Модель стохастичного абсорбера.

Суттєво нелінійні рівняння руху одиночної частинки для системи в малому околі горизонтальної форми коливань $y=0$ мають такий вигляд [14]:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}+x^{2n-1}=\frac{\mu}{1+\mu}+\left[\ddot{x}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{\gamma}X\right]; \\ &\ddot{y}+\lambda x^{2n}y=0; \\ &\ddot{X}+\mu\left(\ddot{X}+\ddot{x}\right)+X=0, \end{aligned} \tag{21}$$

де β – основний геометричний параметр, що визначає кривизну контура k поблизу прямої $y=0$; α та μ визначено на рис. 4; $\lambda=-2\beta(\alpha-\beta)$. Кривизну контура представлено у наступному вигляді:

$$k=\frac{2\beta}{\left(1+4\beta^2y^2\right)^{3/2}}.$$

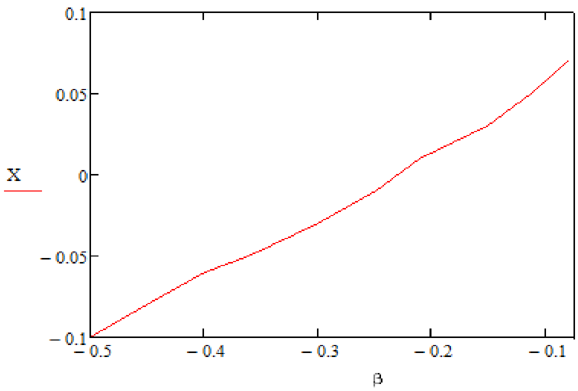


Рис. 5 – Границя стійкості/нестійкості областей для режиму $y=0$ стохастичного абсорберу.

Друге рівняння системи (21) – це варіаційне рівняння для режиму коливань $y=0$. Далі використовується чисельно-аналітичний метод дослідження стійкості, що був представлений у розділі 1.2. А саме, використовується співвідношення (2) для порівняння поточних значень розв’язку $y(t)$ з деякими невеликими початковими значеннями варіації $y(0)$. В задачі, що розглядається, розрахунки з використанням цього співвідношення дозволяють отримати границю областей стійкості/нестійкості в просторі $(X(0),\beta)$ для випадку однієї частинки. Розрахунок виконувався за допомогою методу Рунге – Кутта 4 порядку. Кількість кроків дорівнює 1000, час розрахунку $t=200$. Границю областей стійкості/нестійкості показано на рис. 5 для $\alpha=0,5$, $\mu=0,01$, $n=10$. Область стійкості розташована праворуч на рис. 5.

Траєкторії руху частинок всередині контейнера протягом проміжку часу $t\le 3000$ показані на рис. 6 для параметрів, що відповідають областям стійкості / нестійкості, представленим на рис. 5. В даному випадку розрахунок виконано при наступних фіксованих параметрах:

$$\alpha=\frac{1}{2};\ \gamma=1;\ n=10.$$

Обираються різні форми контура, представленого на рис. 4. Для всіх випадків початкове положення частинки є таким: $(x;\,y)=(0;\,0.01)$ з нульовими швидкостями. Нестійкі рухи представлено на рис. 6, *а*, *б*, *в*. Стійкі рухи представлено на рис. 6, *г*, *д*, *е*.

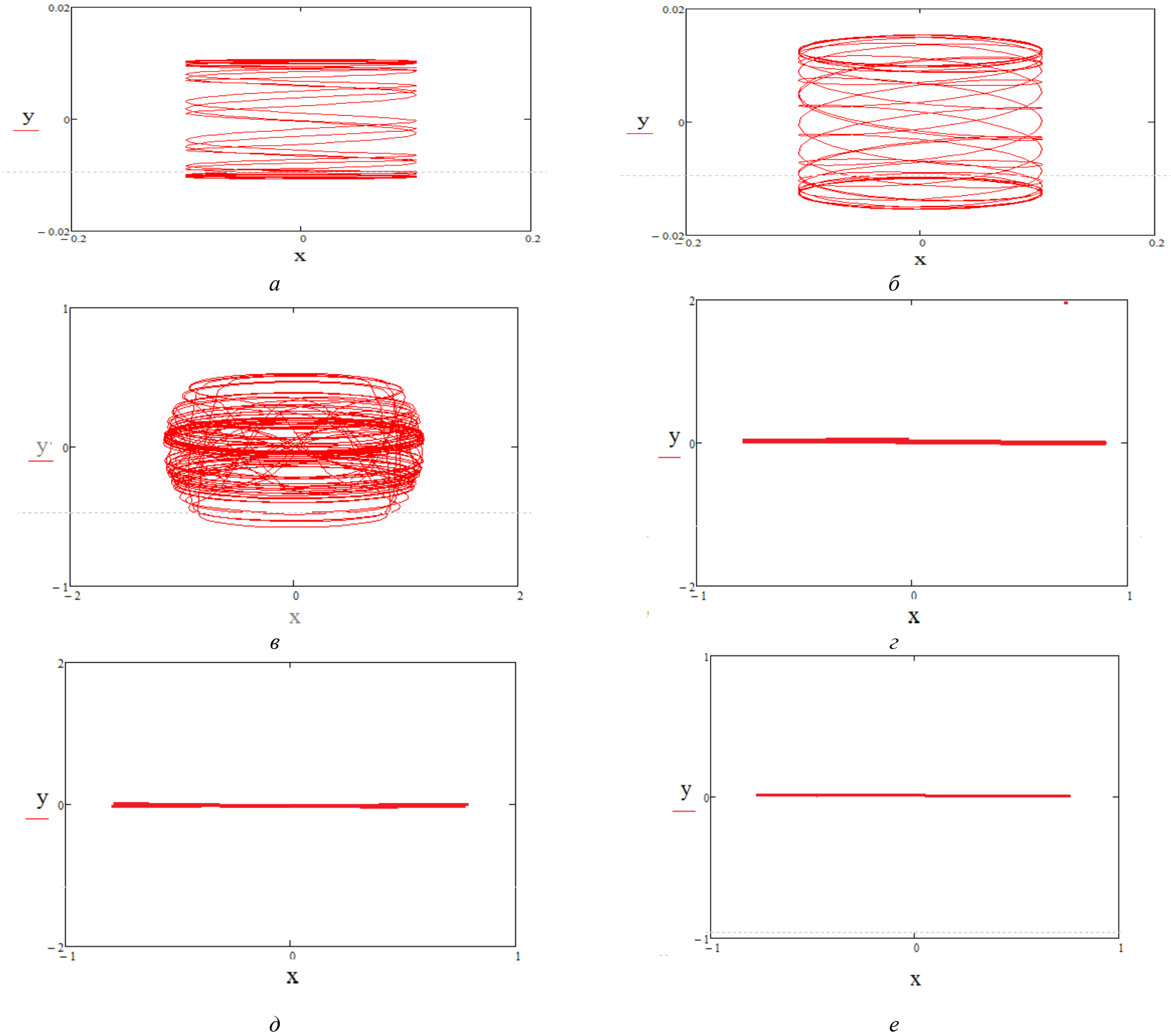


Рис. 6 – Траєкторії руху частинок в середині контейнера (абсорбера) за проміжок часу $t \le 3000$, отримані при $\alpha = 1/2;\ \gamma = 1;\ n = 10$ та різних формах контуру, а саме: *а* – $\beta = -0.2,\ X = 0.06$; *б* – $\beta = -0.1,\ X = 0.09$; *в* – $\beta = -0.15,\ X = 0.08$; *г* – $\beta = -0.2,\ X = -0.04$; *д* – $\beta = -0.1,\ X = 0.04$; *е* – $\beta = -0.5,\ X = 0.05$.

Висновки. Двома підходами було розглянуто стійкість нелінійних нормальних форм коливань (ННФ) в системі зв'язаних осциляторів на суттєво нелінійній пружній опорі в умовах так званого звукового вакууму та горизонтальної форми коливань для так званого стохастичного абсорберу. Для першої системи проведено дослідження стійкості нелінійних нормальних форм коливань методом алгебраїзації за Айнсом. Границі областей стійкості/нестійкості отримано шляхом аналізу рівняння у варіаціях, що приведено до рівняння з сингулярними точками. Розв'язки, що визначають границі областей стійкості та нестійкості, отримано у вигляді степеневих рядів. Коефіцієнти цих рядів задовольняють системам лінійних однорідних рівнянь, що мають нетривіальний розв'язок, якщо їх визначники дорівнюють нулю. Ця умова дозволяє отримати рівняння, що зв'язують параметри системи і визначають границі областей стійкості/нестійкості. Для другої системи, де аналітичне дослідження рівняння в варіаціях неможливо, використано чисельно-аналітичний критерій стійкості, що пов'язаний з відомим критерієм стійкості за Ляпуновим. Чисельне моделювання за допомогою метода Рунге – Кутта демонструє непогану точність отриманих результатів. Обидва підходи демонструють свою ефективність, що приводить до висновку щодо можливості їх використання в інших задачах дослідження стійкості форм коливань в нелінійних системах. Зокрема, перспективною для застосування вказаних підходів є задача стійкості просторових форм коливань в розподілених пружних системах після дискретизації вказаних систем методом Бубнова – Гальоркіна. В докритичній стадії тут може бути застосований метод алгебраїзації за Айнсом, а в закритичній стації, коли вихідне положення рівноваги стає нестійким, доцільно використовувати вказаний вище чисельно-аналітичний критерій стійкості. Це пов'язано з тим, що в закритичній стадії під дією зовнішнього періодичного навантаження можливо виникнення області хаотичних коливань такої системи. Зазначимо, що нестійкість деякої просторової форми коливань в подібних системах означає так звану «перекачку енергії» в інші форми просторових коливань.

Список літератури

1. *Kauderer H.* Nichtlineare Mechanik. – Berlin : Springer-Verlag, 1958. – 696 p.
2. *Rosenberg R. M.* Nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // Adv. Appl. Mech. – 1966. – Vol. 9. – P. 156 – 243. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70008-5.
3. *Vakakis A. F.*, *Manevitch L. I.*, *Mikhlin Yu. V.*, *Pilipchuk V. N.*, *Zevin A. A.* Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. – New York : Wiley, 1996. – 552 p.
4. *Mikhlin Yu. V.*, *Avramov K. V.* Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments // Appl. Mech. Rev. – 2010. – Vol. 63 (6). – 060802. DOI: 10.1115/1.4003825.
5. *Avramov K. V.*, *Mikhlin Yu. V.* Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // Appl. Mech. Rev. – 2013. – Vol. 65 (2). – 020801. DOI: 10.1115/1.4023533.
6. *Lyapunov A. M.* Stability of Motion. – New York : Academic Press, 1966. – 261 p.
7. *Cesari L.* Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. – New York : Springer-Verlag, 1971. – 274 p. DOI: 10.1007/978-3-642-85671-6.
8. *LaSalle J. P.* The Stability of Dynamical Systems. – Philadelphia : SIAM, 1976. – 73 p. DOI: 10.1137/1.9781611970432.
9. *Ince E. L.* Ordinary Differential Equations. – London : Longmans Green, London, 1926. – 558 p.
10. *Mikhlin Yu. V.*, *Zhupiev A. L.* An application of the Ince algebraization to the stability of non-linear normal vibration modes // Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 1997. – Vol. 32 (2). – P. 393 – 409. DOI: 10.1016/S0020-7462(96)00047-9.
11. *Mikhlin Yu. V.*, *Shmatko T. V.*, *Manucharyan G. V.* Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions // Comp. Structures. – 2004. – Vol. 82. – P. 2733 – 2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082.
12. *Koroleva* (*Kikot*) *I. P.*, *Manevitch L. I.* Weakly coupled oscillators in the presence of elactic support in the conditions of acoustic vacuum // Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]. – 2014. – Vol. 10 (3). – P. 245 – 263. DOI: 10.20537/ND1403001.
13. *Koroleva (Kikot) I.*, *Manevitch L.*, *Vakakis A. F.* Non-stationary resonance dynamics of a nonlinear sonic vacuum with grounding supports // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Vol. 357. – P. 349 – 364. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.07.026.
14. *Pilipchuk V.* Stochastic energy absorbers based on analogies with soft-wall billiards // Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 98. – P. 2671 – 2685. DOI: 10.1007/s11071-019-05109-z.

References (transliterated)

1. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*. – Berlin : Springer-Verlag, 1958. 696 p.
2. Rosenberg R. M. Nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Adv. Appl. Mech*. 1966, vol. 9, pp. 156–243. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70008-5.
3. Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. New York, Wiley, 1996. 552 p.
4. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev*. 2010, vol. 63 (6), 060802. DOI: 10.1115/1.4003825.
5. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev*. 2013, vol. 65 (2), 020801. DOI: 10.1115/1.4023533.
6. Lyapunov A. M. *Stability of Motion*. New York, Academic Press, 1966. 261 p.
7. Cesari L. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 1971. 274 p. DOI: 10.1007/978-3-642-85671-6.
8. LaSalle J. P. *The Stability of Dynamical Systems*. Philadelphia, SIAM, 1976. 73 p. DOI: 10.1137/1.9781611970432.
9. Ince E. L. *Ordinary Differential Equations*. London, Longmans Green, London, 1926. 558 p.
10. Mikhlin Yu. V., Zhupiev A. L. An application of the Ince algebraization to the stability of non-linear normal vibration modes. *Int. J. of Non-Linear Mechanics*. 1997, vol. 32 (2), pp. 393–409. DOI: 10.1016/S0020-7462(96)00047-9.
11. Mikhlin Yu. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Comp. Structures*. 2004, vol. 82, pp. 2733–2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082.
12. Koroleva (Kikot) I. P., Manevitch L. I. Weakly coupled oscillators in the presence of elactic support in the conditions of acoustic vacuum. *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*. 2014, vol. 10 (3), pp. 245–263. DOI: 10.20537/ND1403001.
13. Koroleva (Kikot) I., Manevitch L., Vakakis A. F. Non-stationary resonance dynamics of a nonlinear sonic vacuum with grounding supports. *Journal of Sound and Vibration*. 2015, vol. 357, pp. 349–364. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.07.026.
14. Pilipchuk V. Stochastic energy absorbers based on analogies with soft-wall billiards. *Nonlinear Dynamics*. 2019, vol. 98, pp. 2671–2685. DOI: 10.1007/s11071-019-05109-z.

Надійшла (received) 29.09.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Голоскубова Наталія Сергіївна – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (098) 310-20-71; e-mail: nataligoloskubova1992@ukr.net.

Голоскубова Наталья Сергеевна – аспирант, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (098) 310-20-71; e-mail: nataligoloskubova1992@ukr.net.

Goloskubova Natalia Sergeevna – PhD Student, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (098) 310-20-71; e-mail: nataligoloskubova1992@ukr.net.

Міхлін Юрій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuri.Mikhlin@gmail. com.

Михлин Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuri. Mikhlin@gmail. com.

Mikhlin Yuri Vladimirovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuri.Mikhlin@gmail.com.