

## КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ТА КОМП'ЮТЕРНИЙ ДИЗАЙН

УДК 519.859+514.1

Л. Г. ЕВСЕЕВА

### ПОСТРОЕНИЕ АКСИОМ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТРЕХМЕРНОМ ИНТЕРВАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Проведены исследования выполнимости аксиом евклидовой геометрии в трехмерном интервальном пространстве на основе введенных понятий, операций в интервальных пространствах, свойствах интервальных отображений. Результаты исследования могут быть использованы как средства математического моделирования геометрических объектов и их взаимодействий с учетом погрешностей исходных данных.

**Ключевые слова:** интервальная геометрия, аксиомы евклидовой геометрии, интервальная псевдопрямая, интервальная псевдопрямая, интервальное движение.

**Введение.** Теория геометрического проектирования [1] охватывает широкий круг фундаментальных и прикладных задач, связанных с математическим моделированием процесса размещения реальных объектов и созданием эффективных методов оптимизации этого процесса. При решении задач данного класса, как правило, используются идеализированные математические модели материальных объектов и их взаимодействий, когда погрешности задания исходных данных не учитываются. А так как речь идет об оптимизационных задачах, возникает проблема устойчивости, точности и достоверности получаемых результатов.

В силу сложности математических моделей задач геометрического проектирования, в дальнейшем, возникла необходимость привлечения к ее решению активно развивающегося с начала 60-х годов перспективного направления вычислительной математики интервального анализа [2 – 9], основная идея которого чрезвычайно проста: вещественное число представляется не одним, а двумя числами – оценкой снизу и оценкой сверху, образуемыми интервальное число. Таким образом, интервальный анализ дает возможность автоматически учитывать погрешности при задании исходных данных и погрешности, вызываемые округлениями.

Первой монографией по интервальному анализу считается вышедшая в 1966 году книга Мура [2]. На данный момент построены и используются интервальные арифметики, а именно: арифметика Мура [2], арифметика Каухера [3], «разширенная интервальная арифметика» Маркова [4], интервальная арифметика Кахана, допускающая действия с бесконечными интервалами и получившая дальнейшее развитие в работе [5], сегментная арифметика Сендова [6], арифметика Ортольфа [7], модифицированная интервальная арифметика [8], интервальная арифметика на случай комплексных чисел [9]. С современными исследованиями в области интервального анализа можно ознакомиться, например, в работах [10, 11].

Что касается задач геометрического проектирования, то для учета погрешностей исходных данных (погрешностей метрических характеристик и параметров размещения) методы интервального анализа, к сожалению, не могут быть применены непосредственно в силу сложности соответствующих математических моделей.

Для осуществления единого подхода к разрешению проблемы учета погрешностей при решении указанного класса задач в 1992 году на основе двух параллельно развивающихся научных направлений – геометрического проектирования и интервального анализа Стояном Ю.Г. предложено новое приложение интервального анализа в геометрическом проектировании: интервальная геометрия [12 – 14], которое получило широкое применение при моделировании и решении широкого класса прикладных задач.

Для построения математических моделей материальных объектов и их взаимодействий в классе задач геометрического проектирования используются методы евклидовой геометрии.

**Цель работы.** Целью работы является проверка выполнимости аксиом евклидовой геометрии в трехмерном интервальном пространстве как дальнейшее развитие теории интервальной геометрии в геометрическом проектировании и использование положений и методов евклидовой геометрии для разработки конструктивных средств математического моделирования и эффективных методов решения оптимизационных задач размещения в интервальных пространствах.

**Обсуждение результатов.** Рассмотрим интервальное пространство

$$I_s^3R = I_sR \times I_sR \times I_sR,$$

где  $I_sR$  – расширенное пространство централизованных интервалов,

$$U = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) \in I_s^3R,$$

$$\langle X \rangle = \langle x, v_x \rangle \in I_sR, \quad \langle Y \rangle = \langle y, v_y \rangle \in I_sR,$$

$$\langle Z \rangle = \langle z, v_z \rangle \in I_sR.$$

В пространстве  $I_s^3R$  определена метрика [12] и арифметические операции.

В работах [15, 16] введены такие понятия интервальной геометрии как интервальная квазилинейная поверхность, интервальная псевдоплоскость, а также интервальная ломаная, интервальная псевдопрямая, интервальная прямая

*Аксиомы связи*

Пусть имеется произвольная тройка точек

$$U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle) \in I_s^3R, \quad i \in J_3 = \{1, 2, 3\}, \quad (1)$$

$$\langle X_i \rangle = \langle x_i, v_{x_i} \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}, \quad \langle Y_i \rangle = \langle y_i, v_{y_i} \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R},$$

$$\langle Z_i \rangle = \langle z_i, v_{z_i} \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}, \quad i \in J_3, \quad (2)$$

таких, что  $U_1 \neq U_2$  согласно определению равных точек пространства  $\mathbf{I}_s \mathbf{R}$  [12] и, кроме того, интервальные координаты (2) этих точек удовлетворяют неравенствам

$$|x_1 - x_2| > h_1 \cdot \max \left\{ |v_{x_1}|, |v_{x_2}| \right\},$$

$$|y_1 - y_2| > h_2 \cdot \max \left\{ |v_{y_1}|, |v_{y_2}| \right\}, \quad (3)$$

$$|z_1 - z_2| > h_3 \cdot \max \left\{ |v_{z_1}|, |v_{z_2}| \right\},$$

где  $1 < h_1, h_2, h_3 \leq 6$ .

Тогда через точки  $U_1, U_2, U_3$  проходят интервальные псевдоплоскости  $\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2$  и  $\tilde{\Pi}_3$ , которые определяются своими интервальными уравнениями [15, 16] соответственно

$$\langle A \rangle * \langle X \rangle + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle = \mathbf{0},$$

$$\varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \langle B \rangle * \langle Y \rangle + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$\varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \langle C \rangle * \langle Z \rangle + \langle D \rangle = \mathbf{0},$$

где

$$\varphi(\lambda \cdot \langle X \rangle) = \begin{cases} \lambda \cdot \langle X \rangle, & \text{если } \lambda \geq 0 \\ \lambda \cdot \overline{\langle X \rangle}, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases} \quad (5)$$

$\lambda \in R^1, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}, \mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle, \langle A \rangle = \langle a, v_a \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R},$   
 $\langle B \rangle = \langle b, v_b \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}, \quad \langle C \rangle = \langle c, v_c \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$   
 $\langle D_i \rangle = \langle d_i, v_{d_i} \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, 3, \quad a, b, c, d \in R,$   
 $\overline{\langle X \rangle} = \langle x, v_x \rangle = \langle x, -v_x \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$  – сопряжение [12] элемента  $\langle X \rangle = \langle x, v_x \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ , символом (\*) обозначена операция интервального умножения в расширенном пространстве централизованных интервалов  $\mathbf{I}_s \mathbf{R}$  [12].

Пусть компоненты  $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}$  координат точек  $U_1, U_2, U_3 \in \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ , удовлетворяющих неравенствам (3), таковы, что выполняются равенства

$$v_{x_1} = v_{x_2}, v_{y_1} = v_{y_2}, v_{z_1} = v_{z_2}. \quad (6)$$

Тогда через эти точки проходит интервальная гиперплоскость [15]  $\Pi \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ , которая определяется интервальным уравнением

$$\varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Здесь  $a, b, c \in R, U = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) \in \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}, \langle D \rangle = \langle d, v_d \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}, \varphi(\lambda \cdot \langle U \rangle)$  определяется выражением (5).

На основании разбиения пространства  $\mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$  [15]:

$$\mathbf{I}_s^3 \mathbf{R} = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k, \quad \Omega_k = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2 \times \mathbf{J}_3,$$

где  $N = 4^3, \mathbf{J}_i = \left\{ \mathbf{I}_{s_1}, \mathbf{I}_{s_2}, \mathbf{I}_{s_3}^+, \mathbf{I}_{s_3}^- \right\}, i \in J_n,$

$$\mathbf{I}_{s_1} = \text{int } \mathbf{I}_{s_1} = \left\{ \langle x, v_x \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R} \mid x - |v_x| > 0 \right\},$$

$$\mathbf{I}_{s_2} = \text{int } \mathbf{I}_{s_2} = \left\{ \langle x, v_x \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R} \mid x + |v_x| < 0 \right\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3} = cl \mathbf{I}_{s_3} = \left\{ \langle x, v_x \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R} \mid (x - |v_x| \leq 0) \wedge (x + |v_x| \geq 0) \right\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3}^+ = \left\{ \langle x, v_x \rangle \in \mathbf{I}_{s_3} \mid v_x \geq 0 \right\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3}^- = \left\{ \langle x, v_x \rangle \in \mathbf{I}_{s_3} \mid v_x < 0 \right\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3} = \mathbf{I}_{s_3}^+ \cup \mathbf{I}_{s_3}^-, \mathbf{I}_s \mathbf{R} = \mathbf{I}_{s_1} \cup \mathbf{I}_{s_2} \cup \mathbf{I}_{s_3},$$

можно сделать вывод, что на каждом из интервальных множеств  $\Omega_k \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}, \forall k \in J_N,$  функция

$F(U) = \langle A \rangle * \langle X \rangle + \langle B \rangle * \langle Y \rangle + \langle C \rangle * \langle Z \rangle,$  участвующая в уравнении интервальной квазиповерхности [17], линейна, поэтому интервальную гиперповерхность, заданную уравнением (7), назовем линейной гиперповерхностью, а каждое из множеств  $\Omega_k$  областью линейности.

Исходя из определения операции интервального умножения [12]  $\langle A \rangle * \langle X \rangle$  элемента  $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$  на интервальное число  $\langle A \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R},$  заключаем, что вид уравнения (7) зависит от выбора множества  $\Omega_k$  и от того, какие значения принимают интервальные коэффициенты  $\langle A_i \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}, \forall i \in J_3.$

Аксиомы порядка в трехмерном интервальной пространстве сформулированы в работе [18]. Однако, нужно исследовать множество точек выполнимости евклидовых аксиом в интервальном пространстве. Так, аксиома 1 выполняется не для любой пары точек пространства  $\mathbf{I}_s^3 \mathbf{R},$  а только для некоторого их подмножества  $\Gamma \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$  и такого, что его точки удовлетворяют требованию (3).

Возьмем три точки  $\langle U_i \rangle \in \Gamma \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}, i \in J_3 = \{1, 2, 3\}.$  Тогда, через эти точки проходит не более чем три интервальные псевдоплоскости, которые определяются равенствами вида (4).

Этот факт можно показать и несколько иначе, воспользовавшись следующим конструктивным доказательством.

Для этого рассмотрим образ интервальной прямой  $\mathbf{L}$  в пространстве  $R^6$  в результате отображения  $\mathbf{H}$  [13], которая задает некоторое линейное многообразие в пространстве  $R^6.$

Из соотношения (7) следует, что образ интервальной гиперплоскости в пространстве  $R^6$  определяется системой уравнений

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0 \\ a \cdot v_x + b \cdot v_y + c \cdot v_z + v_d = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Напомним, что интервальное отображение

$$\mathbf{H}(U_i) = (x_i, v_{x_i}, y_i, v_{y_i}, z_i, v_{z_i}) \in R^6, i \in J_3.$$

Очевидно, что первое уравнение в системе (8) определяет некоторую плоскость в подпространстве

$R_{yz}^3 \subset R^6$ , а второе уравнение в этой же системе определяет некоторую плоскость в подпространстве  $R_{v_x, v_y, v_z}^3 \subset R^6$ .

Кроме того, ясно, что  $R^6 = R_{yz}^3 \times R_{v_x, v_y, v_z}^3$ . Эти обстоятельства, а также условие построения интервальной гиперплоскости через три данные точки [15] позволяют определить однозначно коэффициенты  $a, b$  и  $c$ , воспользовавшись известными в аналитической геометрии уравнением плоскости, проходящей через три точки  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ .

Теперь предположим, что через точки  $(x_1, v_{x_1}, y_1, v_{y_1}, z_1, v_{z_1})$  и  $(x_2, v_{x_2}, y_2, v_{y_2}, z_2, v_{z_2})$  проходит два линейных многообразия, уравнения которых можно представить как две системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 = 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot v_x + b_1 \cdot v_y + c_1 \cdot v_z + v_{d_1} = 0 \\ a_2 \cdot v_x + b_2 \cdot v_y + c_2 \cdot v_z + v_{d_2} = 0. \end{cases}$$

Так как каждая из этих систем по предположению имеет более одного решения, то уравнения, входящие в эти системы, зависимы, т.е. отличаются только множителем. А это значит, что линейные многообразия совпадают, т.е. через точки  $\langle U_1 \rangle$  и  $\langle U_2 \rangle$  проходит единственное линейное многообразие, определяемое системой уравнений (9).

Следовательно, через точки  $\langle U_i \rangle \in \Gamma \subset I_s^3 R, i \in J_3 = \{1, 2, 3\}$  проходит единственная интервальная гиперплоскость в трехмерном интервальном пространстве.

**Аксиома 3.** На каждой прямой лежат, по крайней мере, две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Нетрудно непосредственной проверкой показать, что три точки  $(\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle), (\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle), (\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle)$  не лежат ни на какой интервальной псевдопрямой.

Аналогичным образом можно построить точку, лежащую на интервальной прямой  $L$ , если коэффициенты  $a$  и  $b$  имеют другие знаки.

Нетрудно убедиться, что три точки  $(\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle), (\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle), (\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle)$  не лежат ни на какой интервальной прямой  $L$ .

Пусть  $\langle U_1 \rangle, \langle U_2 \rangle \in I_s^3 R$ , есть две точки на интервальной псевдопрямой  $L$ , заданной уравнением [16].

**Определение 1.** Часть интервальной псевдопрямой  $L$ , все точки которой лежат между точками  $\langle U_1 \rangle$  и  $\langle U_2 \rangle$ , называется интервальным псевдоотрезком, а точки  $\langle U_1 \rangle$  и  $\langle U_2 \rangle$  называются концами интервального псевдоотрезка  $\langle U_1 \rangle \langle U_2 \rangle$ .

**Определение 2.** Если точки  $\langle U_1 \rangle$  и  $\langle U_2 \rangle$  являются точками интервальной прямой  $L$ , то часть интервальной прямой  $L$ , лежащая между точками  $\langle U_1 \rangle$  и  $\langle U_2 \rangle$ , называется интервальным отрезком, а точки

$\langle U_1 \rangle$  и  $\langle U_2 \rangle$  – концами интервального отрезка  $\langle U_1 \rangle \langle U_2 \rangle$ .

Поскольку интервальная гиперплоскость является частным случаем интервальной псевдоплоскости, то интервальная гиперплоскость также разбивает пространство  $I_s^3 R$  на две части  $P_1$  и  $P_2$ , которые определяются соответствующими неравенствами.

**Определение 3.** Множества  $P_1$  и  $P_2$  называются интервальными псевдополуплоскостями пространства  $I_s^3 R$ , и в случае интервальной прямой множества  $P_1$  и  $P_2$  называются интервальными полуплоскостями пространства  $I_s^3 R$ .

*Аксиомы связи*

Таким образом, справедливы следующие выражения:

**1.** Какими бы ни были две точки  $U_1 \in I_s^3 R$  и  $U_2 \in I_s^3 R$ , существует прямая  $L \subset I_s^3 R$ , проходящая через точку  $U_1$  и через точку  $U_2$ .

Пусть имеется произвольная пара точек  $U_1 = (\langle X_1 \rangle, \langle Y_1 \rangle, \langle Z_1 \rangle) \in I_s^3 R$  и  $U_2 = (\langle X_2 \rangle, \langle Y_2 \rangle, \langle Z_2 \rangle) \in I_s^3 R$ ,  $\langle X_i \rangle = \langle x_i, v_{x_i} \rangle \in I_s R$ ,  $\langle Y_i \rangle = \langle y_i, v_{y_i} \rangle \in I_s R$ ,  $\langle Z_i \rangle = \langle z_i, v_{z_i} \rangle \in I_s R$ ,  $i = 1, 2$ , и таких, что  $\langle U_1 \rangle \neq \langle U_2 \rangle$  согласно определению равных точек пространства  $I_s R$ .

**2.** На каждой прямой  $L \subset I_s^3 R$  лежат, по крайней мере, две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

**3.** Какими бы ни были три точки  $U_i \in I_s^3 R, i \in J_3$ , существует не более одной интервальной гиперплоскости, проходящей через эти точки.

*Аксиомы порядка*

**Аксиома 1.** Если  $U_1 < U_2, U_i \in L \subset I_s^3 R, i = 1, 2$ , в одном направлении, то  $U_2 < U_1$  в противоположном направлении.

Таким образом, на интервальной прямой задано направление, которое соответствует непрерывному изменению интервального параметра.

Если интервальная прямая [16], задана уравнениями

$$\begin{cases} \langle X \rangle = \langle X_0 \rangle + \langle A \rangle * \langle T \rangle \\ \langle Y \rangle = \langle Y_0 \rangle + \langle B \rangle * \langle T \rangle \\ \langle Z \rangle = \langle Z_0 \rangle + \langle C \rangle * \langle T \rangle, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle \in I_s R$  – координаты интервального направленного множества [17],  $\langle T \rangle \in I_s R$  – интервальный параметр прямой, на  $L$  есть два взаимно противоположных направления и в каждом из них любая пара точек  $U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle) \in L, i = 1, 2$ , находится в заданном отношении, которое выражается словом «предшествовать» и обозначается " $<_L$ ". При этом направление на  $L$  соответствует непрерывному изменению интервального параметра в соотношениях (10).

**Аксиома 2.** В одном из двух направлений, если  $U_1 < U_2$ , а  $U_2 < U_3$ , то  $U_1 < U_3$ .

**Аксиома 3.** В одном из двух направлений для каждой точки  $U_2$  найдутся точки  $U_1$  и  $U_3$  такие, что  $U_1 <_L U_2 <_L U_3$ .

**Аксиома 4.** Интервальная гиперплоскость в пространстве  $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ , которая задается интервальным уравнением  $\mathbf{F}(U) = \mathbf{0}$ ,

где  $\mathbf{F}(U) = \varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle$ ,  $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ , разбивает все трехмерное интервальное пространство на два интервальных множества (полупространства), точки которых удовлетворяют соответственно интервальным неравенствам [12]  $\mathbf{F}(U) < \mathbf{0}$  и  $\mathbf{F}(U) > \mathbf{0}$ , согласно отношению порядка в пространстве  $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ .

$$\langle A \rangle * \langle X \rangle + \langle b, 0 \rangle * \langle Y \rangle + \langle C \rangle * \langle Z \rangle + \langle D \rangle > \mathbf{0},$$

$$\langle A \rangle * \langle X \rangle + \langle b, 0 \rangle * \langle Y \rangle + \langle C \rangle * \langle Z \rangle + \langle D \rangle < \mathbf{0}$$

Если  $U_1$  и  $U_2$  – две точки одного интервального полупространства, то интервальный отрезок  $[U_1, U_2]$  не пересекается с интервальной гиперплоскостью  $\mathbf{P}$ , если же точки  $U_1$  и  $U_2$  принадлежат разным полупространствам, то отрезок  $[U_1, U_2]$  пересекается с интервальной гиперплоскостью  $\mathbf{P}$ .

**Аксиома параллельности.** Через заданную точку вне данной интервальной псевдоплоскости можно провести в пространстве не более одной псевдоплоскости, не пересекающей данную.

Данный факт легко пояснить методом «от противного».

В трехмерном интервальном пространстве при решении оптимизационной задачи размещения интервальных геометрических объектов используется поворот объектов на интервальные углы  $(\langle \Theta_1 \rangle, \langle \Theta_2 \rangle, \langle \Theta_3 \rangle)$  с интервальными осями координат.

С этой целью определим вращение в  $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$  как действие, которое заключается в том, что каждой точке  $U = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$  ставится в соответствие точка  $U' = (\langle X' \rangle, \langle Y' \rangle, \langle Z' \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$  как результат интервального отображения вида

$$\langle X \rangle = \langle L_1 \rangle * \langle X' \rangle + \langle L_2 \rangle * \langle Y' \rangle + \langle L_3 \rangle * \langle Z' \rangle,$$

$$\langle Y \rangle = \langle M_1 \rangle * \langle X' \rangle + \langle M_2 \rangle * \langle Y' \rangle + \langle M_3 \rangle * \langle Z' \rangle,$$

$$\langle Z \rangle = \langle N_1 \rangle * \langle X' \rangle + \langle N_2 \rangle * \langle Y' \rangle + \langle N_3 \rangle * \langle Z' \rangle,$$

$$\langle L_1 \rangle = \cos \langle \Theta_1^k \rangle * \cos \langle \Theta_3^k \rangle - \sin \langle \Theta_1^k \rangle * \cos \langle \Theta_2^k \rangle * \sin \langle \Theta_3^k \rangle,$$

$$\langle M_1 \rangle = \sin \langle \Theta_1^k \rangle * \cos \langle \Theta_3^k \rangle + \cos \langle \Theta_1^k \rangle * \cos \langle \Theta_2^k \rangle * \sin \langle \Theta_3^k \rangle,$$

$$\langle N_1 \rangle = \cos \langle \Theta_2^k \rangle * \sin \langle \Theta_3^k \rangle,$$

$$\langle L_2 \rangle = -\cos \langle \Theta_1^k \rangle * \cos \langle \Theta_3^k \rangle - \sin \langle \Theta_1^k \rangle * \cos \langle \Theta_2^k \rangle * \cos \langle \Theta_3^k \rangle,$$

$$\langle M_2 \rangle = -\sin \langle \Theta_1^k \rangle * \cos \langle \Theta_3^k \rangle + \cos \langle \Theta_1^k \rangle * \cos \langle \Theta_2^k \rangle * \cos \langle \Theta_3^k \rangle,$$

$$\langle N_2 \rangle = \sin \langle \Theta_2^k \rangle * \cos \langle \Theta_3^k \rangle, \quad \langle L_3 \rangle = \sin \langle \Theta_1^k \rangle * \sin \langle \Theta_2^k \rangle,$$

$$\langle M_3 \rangle = -\cos \langle \Theta_1^k \rangle * \sin \langle \Theta_2^k \rangle, \quad \langle N_3 \rangle = \cos \langle \Theta_2^k \rangle,$$

где  $*$  – знак интервального умножения,  $\langle X \rangle = \langle x, v_x \rangle = \langle x, -v_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$  – элемент, сопряженный элементу  $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ .

Аксиомы движения евклидова пространства выполняются и в интервальной трехмерном пространстве.

**Выводы.** В ходе проведенных исследований на основе введенных понятий, операций в интервальных пространствах, свойствах интервальных отображений построена система аксиом трехмерного интервального пространства, проверена выполнимость аксиом евклидовой геометрии в трехмерном интервальном пространстве. Результаты исследования могут быть использованы как средства математического моделирования геометрических объектов с учетом погрешностей исходных данных, их взаимодействия в интервальных пространствах.

**Список литературы:** 1. Стоян, Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования [Текст] / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. — Киев: Наукова думка, 1986. — 268 с. 2. Moore, R. E. Interval analysis [Text] / R. E. Moore. — N. Y.: Prentice-Hall, 1966. — 400 p. 3. Kaucher, E. Interval Analysis in the Extended Interval Space IR [Text] / E. Kaucher // Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis). Computing Supplementum. — 1980. — Vol. 2. — P. 33–49. doi:10.1007/978-3-7091-8577-3\_3. 4. Markov, S. M. Extended interval arithmetic involving infinite intervals [Text] / S. M. Markov // Mathematica Balkanica. — 1992. — № 6. — P. 269–304. 5. Laveuve, S. E. Definition einer Kahan-Arithmetik und ihre Implementierung [Text] / S. E. Laveuve // Interval Mathematics. — Berlin — Heidelberg, 1975. — P. 236–245. 6. Sendov, B. Segment derivatives and Taylor's formula [Text] / B. Sendov // C. R. Acad. Bulgare Sci. — 1977. — V. 30. — P. 1093–1096. 7. Ortoľ, H. J. Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik [Text] / H. J. Ortoľ // Berichte der GMD Bonn. — 1969. — №11. 8. Каминская, Э. Л. Модифицированная арифметика и теория погрешностей [Текст] / Э. Л. Каминская, Т. Э. Каминский // Вычислительная математика и математическая физика. — М., 1982. — С. 96–105. 9. Алевфельд, Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] / Г. Алевфельд, Ю. Херцбергер — М.: Мир, 1987. — 356 с. 10. Калмыков, С. А. Методы интервального анализа [Текст] / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. — Новосибирск: Наука, 1986. — 224 с. 11. Shary, S. P. Solving the tolerance problem for interval linear equations [Text] / S. P. Shary // Interval Computations. — 1994. — №2. — P. 6–26. 12. Стоян, Ю. Г. Метрическое пространство централизованных интервалов [Текст] / Ю. Г. Стоян // Докл. НАН Украины. Сер. А. — 1996. — № 7. — С. 23–25. 13. Стоян, Ю. Г. Введения в интервальную геометрию [Текст] / Ю. Г. Стоян // навчальний посібник для студентів спеціальності 7.080202 – Прикладна математика / Ю. Г. Стоян – Харків: ХНУРЕ, 2006. — 98 с. 14. Стоян, Ю. Г. Интервальные отображения [Текст] / Ю. Г. Стоян // Доп. НАН України. — 1996. — №10. — С.57–63. 15. Евсеева, Л. Г. Интервальная  $m$ -плоскость [Текст] / Л. Г. Евсеева, Т. Е. Романова, С. Б. Шеховцов // Системы обработки информации. — Х.: ХВУ. — 2004. — Вып. 12(40). — С. 180–190. 16. Гребенник, И. В. Интервальная прямая в пространстве  $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$  [Текст] / И. В. Гребенник, Л. Г. Евсеева, Т. Е. Романова // Радиоэлектроника и информатика. — 2004. — № 2. — С. 57–63. 17. Романова, Т. Е. Интервальные направленные множества в многомерных интервальных пространствах [Текст] / Т. Е. Романова, С. Б. Шеховцов, Л. Г. Евсеева // Искусственный интеллект. — 2005. — № 4. — С. 169–176. 18. Евсеева, Л. Г. Аксиомы порядка в трехмерном интервальном пространстве [Текст] / Л. Г. Евсеева // матер. міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука, (Київ, 2006 р.). — 2006. — С. 402. 19. Евсеева, Л. Г. Развитие теории интервальной геометрии [Текст] / Л. Г. Евсеева, Ю. Ю. Глушко // Матеріали XV Міжнародної науково-технічної конференції ["Моделирование, идентификация, синтез систем управления"]. (Україна, АР Крым, 2012 г.) – Донецк: Институт прикл. матем. и механ. НАН Украины. — 2012.

- Bibliography (transliterated):** 1. Stoyan, Yu. G. Yakovlev, S. V. (1986). Matematicheskie modeli i optimizacionnye metody geometricheskogo proektirovaniya. Kiev: Naukova dumka, 268. 2. Moore, R. E. (1966). Interval analysis. N. Y.: Prentice-Hall, 400. 3. Kaucher, E. (1980). Interval Analysis in the Extended Interval Space IR. Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis). *Computing Supplementum*, 2, 33–49. doi:10.1007/978-3-7091-8577-3\_3. 4. Markov, S. M. (1992). Extended interval arithmetic involving infinite intervals. *Mathematica Balkanica*, 6, 269–304. 5. Laveuve, S. E. (1975). Definition einer Kahan-Arithmetik und ihre Implementierung. *Interval Mathematics. Berlin – Heidelberg*, 236–245. 6. Sendov, B. (1977). Segment derivatives and Taylor's formula. *C. R. Acad. Bulgare Sci*, 30, 1093–1096. 7. Ortoif, H. J. (1969). Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik. *Berichte der GMD Bonn*, 11. 8. Kaminskaya, E. L., Kaminskij, T. E. (1982). Modificirovannaya arifmetika i teoriya pogreshnostej. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika. Moscow*, 96–105. 9. Alefeld, G., Xerberger, Yu. (1987). Vvedenie v intervalnye vychisleniya. Moscow: Mir, 356. 10. Kalmykov, S. A., Shokin, Yu. I., Yuldashev. Z. X. (1986). Metody intervalnogo analiza. Novosibirsk: Nauka, 224. 11. Shary, S. P. (1994). Solving the tolerance problem for interval linear equations. *Interval Computations*, 2, 6–26. 12. Stoyan, Yu. G. (1996). Metricheskoe prostranstvo centririvannykh intervalov. *Dokl. NAN Ukrainy. Ser. A*, 7, 23–25. 13. Stoyan, Yu. G. (2006). Vvedennya v intervalnu geometriyu. Navchalnij posibnik dlya studentiv specialnosti 7.080202. *Prikladna matematika. Kharkov: KhNURE*, 98. 14. Stoyan, Yu. G. (1996). Intervalnye otobrazheniya. *Dop. NAN Ukraini*, 10, 57–63. 15. Evseeva, L. G., Romanova, T. E., Shexovcov, S. B. (2004). Interval'naya –ploskost. *Sistemi obrobki informacii. Kharkov: XVU*, 12(40), 180–190. 16. Grebennik, I. V., Evseeva, L. G., Romanova, T. E. (2004). Interval'naya pryamaya v prostranstve. *Radioelektronika i informatika*, 2, 57–63. 17. Romanova, T. E., Shexovcov, S. B., Evseeva, L. G. (2005). Intervalnye napravlennye mnozhestva v mnogomernyx intervalnykh prostranstvax. *Iskusstvennyj intellekt*, 4, 169–176. 18. Evseeva L. G. (2006). Aksiomy poryadka v trexmernom intervalnom prostranstve. *Mater. mizhnar. nauk. konf. im. Moscow, Kravchuka, (Kiev)*, 402. 19. Evseeva, L. G., Glushko, Yu. Yu. (2012). Razvitie teorii intervalnoj geometrii. *Materiali XV Mezhdunarodnoj nauchno-technicheskoy konferencii ["Modelirovanie, identifikaciya, sintez sistem upravleniya"]*. (Ukraina, AR Krym, 2012 g.) Doneck: In-tut prikl. matem. i mexan. NAN Ukrainy.

Поступила (received) 28.05.2015

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Евсеева Людмила Григорьевна** – кандидат фізико-математических наук, доцент, Полтавское высшее межрегиональное профессиональное училище; тел.: 095-54-36-256; e-mail: [lg.yevseeva@gmail.com](mailto:lg.yevseeva@gmail.com).

**Евсеева Людмила Григорьевна** – кандидат фізико-математических наук, доцент, Полтавське вище міжрегіональне професійне училище; тел.: 095-54-36-256; e-mail: [lg.yevseeva@gmail.com](mailto:lg.yevseeva@gmail.com).

**Yevseeva Lyudmyla** – candidate of physical and mathematical sciences, Poltavskoe mezhyregionalnoe Higher Professional School; tel. : 095-54-36-256; e-mail: [lg.yevseeva@gmail.com](mailto:lg.yevseeva@gmail.com).