

Construction of neural of the Comptroller of the place with the help of neural networks back propagation of error. Describes the process of building a neural controller with separation of the main phases. Distinct technique of training of neural controller with the purpose of minimization of the error output of the results of the task.

**Keywords:** Neural controller, neural network, the process of learning network, back propagation of error, programming model, and the minimization of the error.

**УДК 28.17.19**

***И. В. НАУМЕЙКО***, канд. техн. наук, каф., ХНУРЭ, Харьков;  
***АЛЬРЕФАИ ВАЛИД АХМЕД***, аспирант, ХНУРЭ, Харьков;  
***АЛЬ-АЗАВИ РАЗИ ДЖАБУР***, аспирант, ХНУРЭ, Харьков

## **АНАЛИЗ ПСЕВДО-ХАОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КЕЙНСИАНСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ**

Исследованы основные эффекты и закономерности, характеризующие модель делового цикла Кейнса, описываемую решением системы линейных дифференциальных уравнений. Найдены решения системы, описывающей взаимодействие двух и трех государств; исследована устойчивость системы.

**Ключевые слова:** кейнсианской модели, проблемы устойчивости, фазовое пространство, аттрактор, хаос

**Введение.** Использование математических моделей в экономике имеет более чем столетнюю историю. К настоящему времени в экономической теории прочно закрепились различные модели взаимодействия рынков рабочей силы, товаров и денег, модели однопродуктовой и многопродуктовой фирм, модель поведения потребителя, модель конкуренции фирм на рынке товаров и другие, которые, по существу, являются равновесными моделями.

Однако подавляющее большинство экономических процессов протекает, во времени, вследствие чего соответствующие математические модели являются в принципе динамическими.

Равновесный подход является эффективным лишь до поры, пока, в силу некоторых причин, характер стационарного состояния не изменится кардинальным образом. Подобные изменения, называемые бифуркациями, принадлежат уже к области приложений методов нелинейного динамического анализа, развитие которого приводит к все большему распространению такой точки зрения: «Мир — это постоянное развитие, вечная неустойчивость, а периоды стабилизации — лишь краткие остановки на этом пути» [1].

К настоящему времени методология анализа динамических систем оформилась в новое научное направление, называемое синергетикой [3]. Эта междисциплинарная наука нацелена на выявление общих принципов эволюции и самоорганизации сложных систем в различных областях знания на основе построения и исследования нелинейных динамических математических моделей. Важными понятиями синергетики являются «катастрофа», «бифуркация», «предельный цикл», «странный аттрактор» и т. д.

До сих пор все новые «синергетические» понятия объекты появились и исследовались в системах нелинейных, но сравнительно малой размерности ( $n \leq 4$ ).

Исследование многомерных систем приводит к сложностям как теоретическим, так и вычислительным. Ниже рассматривается модель экономической системы 6-го порядка. Она линейна, однако проявляет сложное поведение, похожее на детерминированный хаос, известный в нелинейных системах. Похожие результаты для экономической системы с 2006 года активно обсуждались в Интернете [2]. В данной работе предложены модельные параметры экономик 3-х государств, при которых взаимодействие между экономиками приводит к фазовым портретам, похожим на детерминированный хаос типа резонансного тора. Отметим, что подобное поведение характерно не только для экономических, но и для любых конкурентных систем. Например, для эргатических систем типа «Человек-машина-среда», содержащих подсистему защиты от вредных воздействий и восстановления после аварий.

#### **Математическое описание и модель объекта.**

Рассмотрим динамику экономической системы, которая предложена Кейнсом [1]. Упрощенная модель делового цикла, согласно Кейнсу, описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha\{I(Y, R) - S(Y, R)\} = \alpha F(Y, R), \\ \frac{dR}{dt} = \beta\{L(Y, R) - L_s\}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь все параметры и переменные положительны и означают:

- $Y$  – национальный доход;
- $R$  – процентную ставку;
- $I(Y, R)$  – функцию спроса на инвестиции ( $I_Y > 0, I_R < 0$ );
- $S(Y, R)$  – функцию сбережений ( $S_Y > 0, S_R > 0$ );
- $L(Y, R)$  – суммарный спрос на деньги ( $L_Y > 0, L_R < 0$ );
- $L_s$  – предложение денег (фиксированная величина);
- $\alpha, \beta$  – положительные параметры, параметры адаптации, реакции.

Нижний индекс означает производную по соответствующему параметру.

Эта система отражает тот простой факт, что превышение спроса на инвестиции над сбережениями приводит к возрастанию дохода, и наоборот; и что если спрос на деньги выше, чем их предложение, то ставка процента прибыли растет.

Условия, налагаемые на входящие в систему функции и их производные ( $I_Y > 0, I_R < 0, S_Y > 0, S_R > 0, L_Y > 0, L_R < 0$ ), означают, что инвестиции находятся в прямой зависимости от объема выпуска продукции и в обратной от процентной ставки. Это значит также, что рост национального дохода или процентной ставки будет побуждать население к большим сбережениям, а при условии роста производства продукции или уменьшения процентной ставки спрос на деньги возрастает.

В такой модели предполагается существование положительного равновесия  $(Y_0, R_0)$ , которое определяется пересечением кривых  $L(Y, R) = L_s$  и  $F(Y, R) = 0$ . Рассмотрение системы достаточно ограничить локальной областью пространства вблизи равновесия. Наличие циклов в этой модели первым предположил Торре [3].

Введение в изолированные системы (1) фактора международной торговли  $Ex_i = Ex_i(Y_j, Y_k)$ , ( $i \neq j, k$ ),  $Im_i = Im_i(Y_i)$  с помощью функций экспорта и импорта приводит к уравнениям (2):

$$\begin{cases} \frac{dY_i}{dt} = \alpha_i (I_i(Y_i, R_i) - S_i(Y_i, R_i)) + Ex_i(Y_j, Y_k) - Im_i(Y_i), \\ \frac{dR_i}{dt} = \beta_i \left( L_i(Y_i, R_i) - \frac{M_i^*}{p_i} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j, k \neq i, \end{cases} \quad (2)$$

где  $M_i^*$  - фиксированное предложение денег в  $i$ -ой экономике, отражающее баланс платежных равновесий,  $i, j, k = 1, \dots, n$  - индексы стран,  $n$  - количество стран,  $p_i$  есть уровень цен  $i$ -й страны.

В качестве первого приближения рассматриваем линейную модель: функции  $I, S, L$  для каждой экономики и их связи  $Ex, Im$  - линейны по всем своим аргументам. После переобозначений система (2) приобретает вид  $X' = AX + F$ , где вектор  $X = (Y_i, r_i)$ ,  $A$  - матрица ( $2n \times 2n$ ) и  $F$  -  $2n$  вектор постоянных.

Расширенная система (2), в нашем случае состоит из трех связанных ограниченных осцилляторов. Как показано Ньюхаусом, Рюэлем и Такенсом, возмущение движения по трехмерным торах может привести к странному аттрактору [3].

Очевидно, что существование странного аттрактора подразумевает хаотичность траекторий. Нетрудно установить, что система (2) удовлетворяет условиям теоремы Ньюхауса - Рюэля - Такенса [3]. Таким образом, в международной модели было установлена принципиальная возможность существования странных аттракторов.

**Анализ и преобразования модели.** Все ранее описанное относится к нелинейным системам уравнения, для которых характерны предельные циклы и странный аттрактор. Но так как система (2) линейна с постоянными коэффициентами, то решение для неё ищется в виде  $e^{\lambda t} U_t$  [6],[8]. Если отношение периодов иррационально, то движение - хаотическое, при этом легко видеть, что две точки в начальный момент времени, лежащие рядом, с течением времени могут оказаться сколь угодно далеко [4]. Выполняется следующее утверждение.

Если все три автономные экономики принадлежат к осцилляторному типу [6], введение международной торговли может привести к существованию торообразного аттрактора в объединенной экономике. Получим неперiodические движения в ограниченной области. Это странный аттрактор, так как не является точкой или циклом. Лоренц показал, что существование хаотических траекторий в соответствующих моделях можно установить численным моделированием.

Расчет стационарных точек и собственных значений выполнена в математическом пакете Mathematica. Основные шаги реализованного алгоритма следующие:

- задать начальное условие, а так же параметры системы;
- получить решения системы двумя методами - численно-аналитическим (т.е. собственные числа матрицы 6-го порядка получены численно, а затем выписана известная формула для решения линейной системы с постоянными коэффициентами) и численным - методом Рунге-Кутты 4-го порядка;

– сравнением решений показать, что дискретизация правомерна, и не является причиной хаотического поведения системы.

Хаотическое поведение, в полном соответствии с теорией, появляется при таком сочетании параметров, когда вещественные части по крайней мере двух собственных чисел равны 0, а мнимые, отвечающие за период колебаний – не сравнимы, т.е. их отношение иррационально, либо близко к нему. Элементы матрицы выбраны так, чтобы эти соотношения выполнялись, но параметры модели находились в пределах экономического смысла [10]-[13].

### 3. Анализ экономических отношений 2-х стран

#### 3.1 При отсутствии связей (изолированные экономики)

(□ Собственные значения  $A$ ):

$$\begin{pmatrix} -0.165754 + 0.269375 i \\ -0.165754 - 0.269375 i \\ -0.0879053 + 0.234107 i \\ -0.0879053 - 0.234107 i \end{pmatrix}$$

Стационарная точка:

$$\begin{pmatrix} 3.31059 \\ 0.420872 \\ 3.43257 \\ -0.0486358 \end{pmatrix}$$

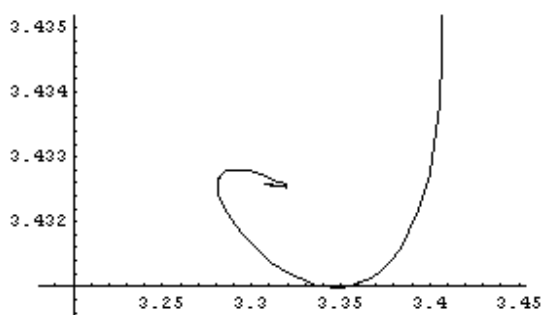


Рис. 1 - Динамика национальных доходов  $Y_1$  и  $Y_2$  двух стран в сечении фазового пространства

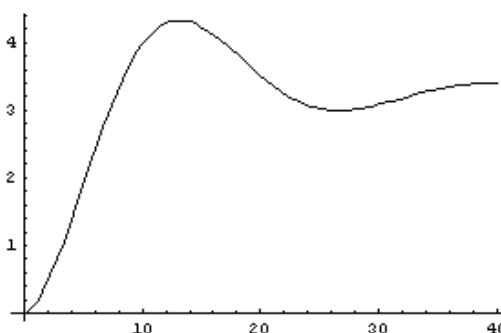


Рис. 2 - Национальный доход второй страны  $Y_2$  во времени при нулевых начальных условиях

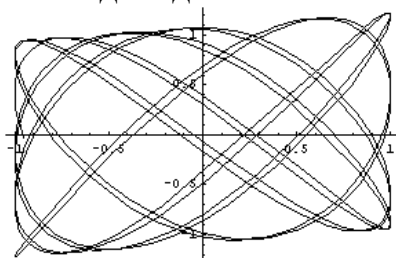
#### 3.2 Случай взаимодействия двух стран.

Одна из стран экспортирует товар в другую. Вторая не производит экспорта.

Собственные значения описанной выше системы ОДУ

$$\lambda: \{-1. i, 1. i, -1.41421 i, 1.41421 i\}$$

Взаимодействие двух национальных доходов:



Национальный доход двух стран во времени:

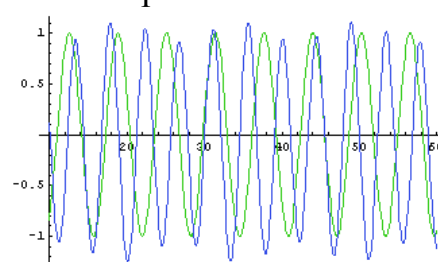


Рис. 3 - Двумерные проекции четырех-мерного фазового портрета

Численное моделирование показало, что здесь мы имеем дело с циклом (двумя устойчивыми циклами в проекциях); при этом односторонняя экономическая связь между данными странами-партнерами существенна, но не приводит к нестабильности. Мы имеем дело с устойчивым фокусом. Внешняя экономическая деятельность двух стран не приводит к дестабилизации экономик, но и развития тоже нет. На рис. 3 показаны двумерные проекции четырех-мерного фазового портрета.

**Сравнение хаотической динамики систем из двух и трех стран.** Параметры взаимодействий можно подобрать [10]-[13] так, чтобы из шести собственных чисел два сопряженных имели действительную часть не отличимую от нуля (в третьем десятичном знаке), а остальные были малыми отрицательными. Сложное поведение экономик каждой страны видно из приведенных на рис.4 графиков проекций 6-мерных фазовых портретов и временные зависимости.

Несмотря на «хаотичность» проекций фазового портрета, это – неустойчивый фокус с сигнатурой  $(-, -, +, +, -, -)$ . Этот случай можно рассматривать как «слабо возбужденный тор», который на конечном, хотя и большом, отрезке времени дает поведение системы, не отличимое от хаоса.

Общий вывод: Даже небольшая неустойчивость (показатель Ляпунова отличен от нуля лишь в 3-м знаке) экономики одной страны во всех случаях приводит к хаотической неустойчивости и падению экономик всех трех стран. Характерное для этого случая поведение представлено на рис.5.

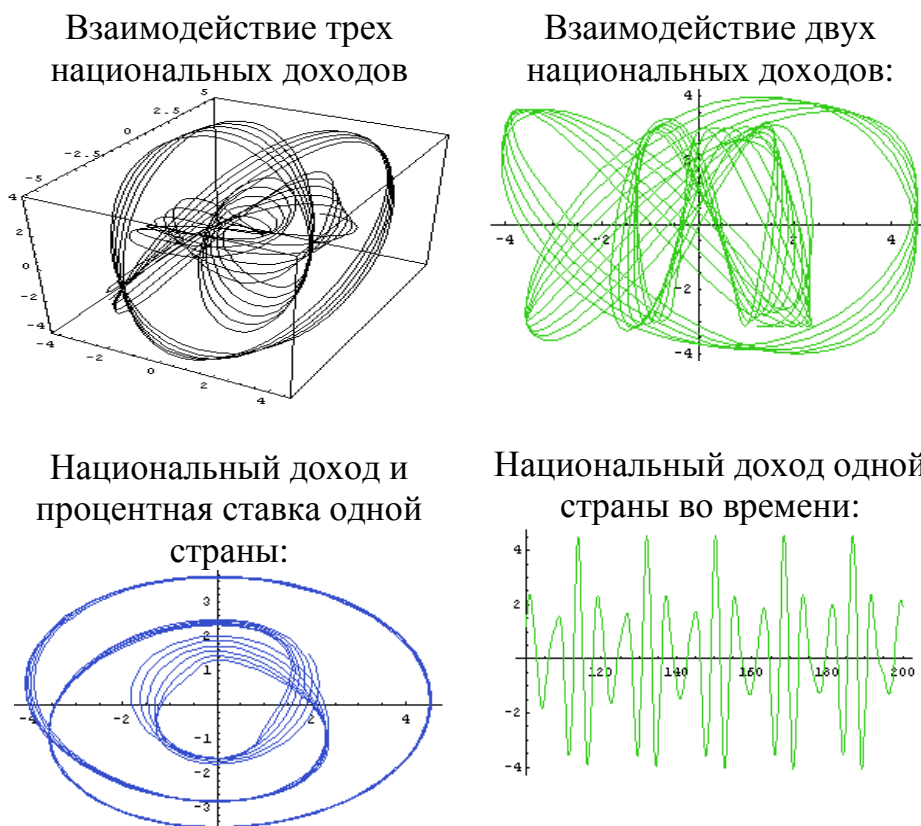


Рис. 4 - Графики проекций 6-мерных фазовых портретов и временные зависимости

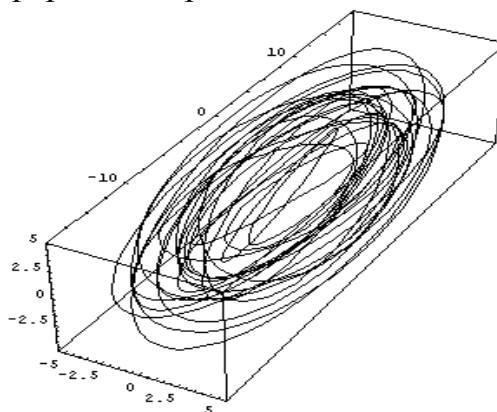


Рис. 5 – Хаотическое взаимодействие трех национальных доходов

**Выводы.** В работе получены решения системы двумя методами – численно-аналитическим ( т.е. собственные числа матрицы 6-го порядка получены численно, а затем выписана известная формула для решения линейной системы с постоянными коэффициентами) и численным – методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Сравнение решений показало, что дискретизация правомерна, и не является причиной хаотического поведения системы. Такое поведение, в полном соответствии

с теорией, появляется для такого сочетания параметров, когда вещественные части, по крайней мере, двух собственных чисел равны 0, а мнимые, отвечающие за период колебаний – не сравнимы, т.е. их отношение не рационально. Элементы матрицы выбраны так, чтобы эти соотношения выполнялись, но параметры модели находились в пределах экономического смысла, например, большинство из них должно лежать в интервале (0, 1).

Полученные рисунки проекций и сечений фазовых портретов средствами пакета Mathematica позволяют представить себе торообразное по 2-м переменным 6-ти мерное пространство. Из фазовых портретов ясно, что притягивающее множество ограничено, и траектории на нем бесконечны, не являясь ни точками, ни циклами, т.е. выполнен основной критерий „странности” аттрактора.

Похожие явления наблюдались и в 4-х мерной модели экономик 2-х государств.

Таким образом искомое сочетание параметров было определено, и гипотеза о возможности хаоса в результате глобализации подтвердилась даже для простейшей модели.

- Список литературы:**
1. Кейнс Дж. Г. Избранные произведения [Телст]/ Дж.Г. Кейнс //Экономика, 1993.–430с. 2.
  3. <http://socintegrum.ru/forum/viewtopic.php?t=34&start=0&postdays=0&postorder=asc&highlight=> 3. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории[Телст]/ В.Б Занг //Мир, 1999. – 335с. 4. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику[Телст]/ Г. Г. Малинецкий //Эдиториал УРСС, 2002. – 256с. 5. Тарасевич Л. С., Макроэкономика [Телст]/В. М. Гальперин, П. И. Гребенников, А. И. Леусский //СПб.: Издательство СПбГУЭФ, 1999. – 654 с. 6. Эрроусмит Д.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями[Телст]/ Д. К. Эрроусмит , К. М. Плейнс– М.: Мир, 1986. –243с. 7. Смит А. Т. Антология экономической классики[Телст]/ А. Т. Смит М.: Эконом-ключ, 1993. – 542с. 8. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений[Телст]/ В. И. Арнольд// М.: Наука, 1987. – 304с. 9. [http://www.keldysh.ru/papers/2005/22/prep2005\\_22.html](http://www.keldysh.ru/papers/2005/22/prep2005_22.html) 10. <http://www.gks.ru/wps/portal> 11. <http://www.armstat.am/ru/> 12. [http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page?\\_pageid=0,1136217,0\\_45571467&dad=portal&schema=PORTAL](http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page?_pageid=0,1136217,0_45571467&dad=portal&schema=PORTAL) 13. <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/am.html>

Надійшла до редколегії 20.04.2013

УДК 28.17.19

**Анализ псевдо-хаотического поведения кейнсианских моделей экономики / Наумейко И. В., Альрефаи Валид Ахмед , Аль-Азави Рази Джабур // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2013. - № 26 (999). – С.59-64 . – Бібліогр.: 13 назв.**

Досліджено основні ефекти і закономірності, що характеризують модель ділового циклу Кейнса, описувану рішенням системи лінійних диференціальних рівнянь. Знайдено рішення системи, що описує взаємодію двох і трьох держав; досліджено стійкість системи.

**Ключові слова:** кейнсіанської моделі, проблеми стійкості, фазовий простір, аттрактор, хаос

The basic effects and patterns that characterize the Keynesian model of business cycle have been modeled using the system of linear differential equations. The solutions of the system, which describes the interaction of two or three states are found, and stability of this system was investigated.

**Keywords:** keynesian model, stability problem, phase space, attractor, chaos.