Ключові слова: гірничий масив; порожнина; сполучений теплообмін; чисельний метод.

In the paper a mathematical model of conjugate heat transfer in the “homogeneous mountain – spherical cavity with heat source” is justified, formulated, and studied in order to predict the emergency temperature dynamics in the cavity. The system of heat-conduction boundary problems is solved by approximate and numerical methods.
Keywords: maintain; cavity; conjugate heat transfer; numerical method

УДК: 517.53

І. П. КШАНОВСЬКИЙ, канд. фіз.-мат.наук, ст. викл., НУ " Львівська політехніка", Львів

КРИТЕРІЙ СКІНЧЕННОСТІ Λ-ТИПУ АНАЛІТИЧНИХ В ПРОКОЛЕНІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ

Отримано критерій скінченності λ-типу аналітичної в проколеній площині функції f в термінах коефіцієнтів Фур’є логарифма її модуля у випадку обмеження на зростання двопараметричної характеристики $T(s,r,f)$.
Ключові слова: аналітична функція, двозв’язна область, характеристика Неванлінни

Вступ

В класичній теорії цілих та мероморфних функцій зростання максимума модуля функції порівнюється зі степеневими або близькими до них функціями типу $r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ – уточнений порядок. В 60-х роках минулого століття Л. Рубел та Б. Тейлор розвинули метод рядів Фур’є, який дозволив вивчати класи цілих та мероморфних функцій з обмеженнями на зростання, що задаються довільними додатними, неперервними, зростаючими, необмеженими функціями $\lambda(r)$. Такі функції $\lambda(r)$ називаються функціями зростання.

Значна частина задач теорії розподілу значень потребує вивчення властивостей мероморфних функцій у двозв’язних областях. Відомо, що кожна двозв’язна область конформно еквівалентна деякому кільцю, проколеному кругові чи проколеній площині. При перенесенні теорії Неванлінни мероморфні функції в кільці, проколеній площині чи проколеному крузі найновішими є підходи А. Кондратюка, А. Христіянина та І. Кшановського. Зокрема, А. Кондратюк ввів двопараметричну характеристику $T(s,r,f)$ для функцій мероморфних у вищезгаданих областях та поширив цю характеристику на субгармонійні функції [1]. В [2] отримано критерій скінченності λ-типу аналітичної в проколеній площині функції в термінах коефіцієнтів Фур’є логарифма модуля цієї функції у випадку, коли обмеження на зростання однопараметричної характеристики $T_0(r,f)$ задається функцією зростання $\lambda(r)$.

В даній роботі отримано критерій скінченності λ-типу аналітичної в проколеній площині функції у випадку обмеження на зростання її двопараметричної характеристики $T(s,r,f)$.

Означення та позначення

Нехай f – мероморфна функція в проколеній площині $A=\{z:0<|z|<+\infty\}$.

Нехай $t_0 > 0$ – довільне фіксоване число. Визначимо функцію $n(t, f)$ наступним чином:

$$n(t, f) - n(t_0, f) = \mu((t_0, t]),\ t > t_0,\ n(t_0, f) - n(t, f) = \mu((t, t_0]),\ t < t_0,$$

де значення $n(t_0, f)$ вибрано довільно, $\mu((\alpha, \beta]) = \sum_{\alpha < |b_j| \le \beta} 1$, $\{b_j\}$ – послі-довність полюсів функції f з врахуванням їх кратностей.

Нехай

$$N(s, r, f) = \frac{1}{\log r} \int_1^r \frac{n(t, f)}{t} dt + \frac{1}{\log s} \int_s^1 \frac{n(t, f)}{t} dt, \quad 0 < s < 1, 1 < r < +\infty.$$

Зауважимо, що зміна функції $n(t, f)$ на сталу не змінює значення функції $N(s, r, f)$. Тому не зменшуючи загальності можемо вважати, що $t_0 = 1$, $n(t_0, f) = 0$. Двопараметрична характеристика $T(s, r, f)$ визначається наступним чином

$$T(s, r, f) = \frac{1}{\log r} m(r, f) - \frac{1}{\log s} m(s, f) - \left(\frac{1}{\log r} - \frac{1}{\log s} \right) m(1, f) + \\ + N(s, r, f), \quad 0 < s < 1, 1 < r < +\infty,$$

де

$$m(t, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(te^{i\theta})| d\theta.$$

Доведено [1], що функція $\log(1/s) \log r T(s, r, f)$ – невід’ємна, зростаюча і опукла відносно логарифма змінної $r > 1$. Як функція змінної s, вона невід’ємна, зростаюча, коли s спадає в інтервалі $(0,1)$, опукла відносно $\log(1/s)$.

Означення 1. *Функцію двох змінних $\lambda(\tau, t)$ визначену на множині $[1, +\infty) \times [1, +\infty)$, будемо називати функцією зростання, якщо $\lambda(\tau, t)$ – додатна, необмежена, неперервна, неспадна функція кожної змінної.*

Позначимо

$$T^*(s, r, f) = \log(1/s) \log r T(s, r, f), \quad 0 < s < 1, r > 1,$$

$$N^*(s, r, 1/f) = \log(1/s) \int_1^r \frac{n(t, 1/f)}{t} dt - \log r \int_s^1 \frac{n(t, 1/f)}{t} dt, \ 0 < s < 1, r > 1.$$

Через $c_k(r, f)$ позначатимемо коефіцієнти Фур’є функції $\log |f(re^{i\theta})|$,

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(re^{i\theta})| d\theta,\ k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < r < +\infty.$$

Означення 2. *Нехай $\lambda(\tau, t)$ – функція зростання, $f(z)$ – аналітична функція в A. Скажемо, що f є функцією скінченного λ-типу, якщо*

$$T^*(s, r, f) \le B\lambda\left(\frac{C}{s}, Dr \right)$$

для деяких сталих B, C, D та для всіх s, r таких, що $0 < s < 1$, $r > 1$.

Позначимо $\Lambda_H(A)$ – клас аналітичних в A функцій скінченного λ-типу.

Допоміжні твердження та результати

Нехай f − мероморфна у проколеній площині A функція. Через $Z(f)$, $W(f)$, позначимо послідовності нулів та полюсів функції f відповідно, де кожен нуль чи полюс рахується відповідно до його кратності.

Нам знадобляться результати з [2], сформульовані у випадку проколеної площини.

Через A^* позначимо A без інтервалів $\{z=\tau a, \tau \ge 1\}$, якщо $|a|>1$ та $\{z=\tau a, 0\le\tau\le 1\}$, якщо $|a|<1$, де a пробігає множину нулів та полюсів функції f. $T=\{z:|z|=1\}$.

Лема А.([2, с.12]**)** *Нехай функція* f *мероморфна в* $A=\{z:0<|z|<+\infty\}$, $f(z)\ne 0,\infty,\ z\in T$. *Тоді для будь-якого замкненого шляху* γ *в* A^*, $\gamma(0)=1$, *існує* $k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\in\mathbb{Z}$ *таке, що для функції* $g(z)=z^{-k}f(z)$ *виконується*

$$\int\limits_{\gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}dz=0.$$

Теорема А.([2, с.60]**)** *Нехай* f *– відмінна від тотожного нуля, мероморфна в* $\{z:0<|z|<+\infty\}$ *функція,* $Z(f)=\{a_\mu\}$, $W(f)=\{b_\nu\}$. *Нехай* $\{\alpha_k\}$ *визначаються з рівностей* $k\alpha_k=\beta_{k-1}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, *де* $\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k z^k+\sum\limits_{|a_\mu|=1}\frac{1}{z-a_\mu}-\sum\limits_{|b_\nu|=1}\frac{1}{z-b_\nu}$ *– розвинення логарифмічної похідної функції* f *в деякому околі одиничного кола. Тоді*

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2}(\alpha_k r^k+\bar{\alpha}_{-k}r^{-k})+\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_\mu|\le r}\left(\left(\frac{r}{a_\mu}\right)^k-\left(\frac{\bar{a}_\mu}{r}\right)^k\right)-\sum_{1<|b_\nu|\le r}\left(\left(\frac{r}{b_\nu}\right)^k-\left(\frac{\bar{b}_\nu}{r}\right)^k\right),\quad (1)$$

$$c_k(1/r,f)=\frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k}+\bar{\alpha}_{-k}r^k)+\frac{1}{2k}\sum_{1/r\le|a_\mu|\le 1}\left(\left(r\bar{a}_\mu\right)^k-\left(\frac{1}{ra_\mu}\right)^k\right)-\frac{1}{2k}\sum_{1/r\le|b_\nu|\le 1}\left(\left(r\bar{b}_\nu\right)^k-\left(\frac{1}{rb_\nu}\right)^k\right),$$

де $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $1<r<+\infty$.

Нехай

$$I(t,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(te^{i\theta})|\,d\theta, 0<t<+\infty.$$

Справедлива наступна рівність, яка є певним аналогом формули Йенсена ([1], [4])

$$\frac{1}{\log r}I(r,f)-\frac{1}{\log s}I(s,f)-\left(\frac{1}{\log r}-\frac{1}{\log s}\right)I(1,f)=$$

$$=\frac{1}{\log r}\int\limits_1^r\frac{n(t,1/f)-n(t,f)}{t}dt+\frac{1}{\log s}\int\limits_s^1\frac{n(t,1/f)-n(t,f)}{t}dt.\quad 0<s<1, r>1.\quad (2)$$

Зважаючи на те, що

$$I(t,f)=m(t,f)-m(t,1/f),\quad t>0,$$

одержимо

$$T(s,r,f)=T(s,r,1/f),\ \ 0<s<1,\ 1<r<+\infty.$$

Основні результати

Теорема 1. *Якщо* f *– мероморфна функція в* $A=\{z:0<|z|<+\infty\}$, *то*

$$\liminf_{\substack{s\to 0\\ r\to+\infty}} T(s,r,f) < +\infty . \qquad (3)$$

тоді і тільки тоді, коли f – раціональна.

Доведення: Якщо $f(z)$ – раціональна функція, то твердження теореми випливає з рівності

$$T(s,r,f) = \frac{T(r,f)}{\log r} + \frac{T(s,f)}{\log(1/s)} - \left(\frac{1}{\log(1/s)} + \frac{1}{\log r}\right) T(1,f),$$

де $T(\tau, f)$ – класична характеристика Неванлінни та властивостей характеристики $T(\tau, f)$ раціональної функції.

Якщо виконується (3), то існує послідовність $(s_j, r_j) \to (0,+\infty)$ така, що

$$\int_1^r \frac{n(t,f)}{t} dt \le C \log r, \;\; r = r_j \to +\infty,$$

$$\int_s^1 \frac{-n(t,f)}{t} dt \le C \log(1/s), \;\; s = s_j \to 0 \quad (C = const).$$

Звідси випливає, що $f(z)$ має скінченну кількість полюсів. Дійсно, позначимо $p = [C]$. Пронумеруємо полюси функції f в $\{z : 0 < |z| < 1\}$ в порядку спадання величин їх модулів. Якщо існує $p+1$-й полюс b_{p+1}, то

$$\int_s^1 \frac{-n(t,f)}{t} dt \ge \int_s^{|b_{p+1}|} \frac{-n(t,f)}{t} dt \ge (p+1)\log\frac{|b_{p+1}|}{s} =$$

$$= (p+1)\log|b_{p+1}| + (p+1-C)\log\frac{1}{s} + C\log\frac{1}{s} > C\log\frac{1}{s}, \quad s = s_j \to 0, (j > j_0),$$

що приводить до протиріччя. Аналогічно доводиться, що $f(z)$ має скінченну кількість полюсів в $\{z : 1 < |z| < +\infty.\}$. Оскільки $T(s,r,1/f) = T(s,r,f)$, то f в A має скінченну кількість нулів.

Нехай $h(z)$ – раціональна функція, нулі та полюси якої співпадають з нулями та полюсами функції f з врахуванням кратностей. Розглянемо функцію $g(z) = f(z)/h(z)$, яка не має ні нулів ні полюсів в A. Оскільки $T(s,r,h) = O(1), r \to +\infty, s \to 0,$ то з властивості ([1])

$$T(s,r,f_1\cdot f_2) \le T(s,r,f_1) + T(s,r,f_2) + O\left(\frac{1}{\log(1/s)} + \frac{1}{\log r}\right),$$

отримаємо

$$\liminf_{\substack{s\to 0\\ r\to+\infty}} T(s,r,g) < +\infty.$$

За лемою А існує таке $n \in \mathbb{Z}$, що в A визначена однозначна вітка $\log G(z)$, де $G(z) = z^{-n} g(z)$. Розглянемо розвинення в ряд Лорана

$$\log G(z) = \sum_{k\in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k .$$

Нехай $z = \rho e^{i\theta}, \rho > 1.$ Тоді

$$\log|G(z)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Re}(\alpha_k z^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\alpha_k z^k + \overline{\alpha}_k \overline{z}^{k}) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\alpha_k \rho^k + \overline{\alpha}_{-k}\rho^{-k}) e^{ik\theta}.$$

Звідси

$$\frac{1}{2}(\alpha_k\rho^k+\overline{\alpha}_{-k}\rho^{-k})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|G(\rho e^{i\theta})|e^{-ik\theta}d\theta,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Оскільки

$$|\log|G(z)||\le|\log|g(z)||+|n||\log|z||,$$

$$\frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|g(\rho e^{i\theta})||d\theta}{\log\rho}\le 2T(s,\rho,g)+\left(\frac{1}{\log(1/s)}+\frac{1}{\log\rho}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|g(e^{i\theta})||d\theta,$$

то

$$\alpha_k\rho^k+\overline{\alpha}_{-k}\rho^{-k}=O(\log\rho),\ \rho=r_j\to+\infty.$$

Звідси випливає, що $\alpha_k=0, k>0$. Аналогічно, розглядаючи $z=\rho e^{i\theta}, \rho<1$, легко показати, що $\alpha_k=0, k<0$. Отже, $G(z)$ – тотожно стала, $g(z)=cz^n$, де $c\in\mathbb{C}$. Таким чином ми довели, що $f(z)$ – раціональна.

Теорема 2. *Нехай $f(z)$ − аналітична функція в A. Наступні твержен-ня еквівалентні:*

1) $f\in\Lambda_H(A)$;

2) $|c_k(r,f)|\log(1/s)+|c_k(s,f)|\log r\le B\lambda\left(\frac{C}{s},Dr\right)$ для деяких сталих B,C,D та для всіх s,r таких, що $0<s<1,\ 1<r<+\infty, k\in\mathbb{Z}$.

3) $|c_k(r,f)|\log(1/s)+|c_k(s,f)|\log r\le \dfrac{B\lambda\left(\frac{C}{s},Dr\right)}{|k|+1}$ для деяких сталих B,C,D та для всіх s,r таких, що $0<s<1,\ 1<r<+\infty, k\in\mathbb{Z}$.

Доведення: З огляду на те, що $T(s,r,f)=T(s,r,1/f)$ та $|\ln x|=\ln^+x+\ln^+(1/x),\ x>0,$ маємо

$$|c_k(r,f)|\log(1/s)+|c_k(s,f)|\log r\le$$
$$\le\frac{\log(1/s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(re^{i\theta})||d\theta+\frac{\log r}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(se^{i\theta})||d\theta=$$
$$=2\log(1/s)\log r\,T(s,r,f)+(\log r+\log(1/s))\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(e^{i\theta})||d\theta.$$

Звідси, з огляду на твердження теореми 1 та на те, що у випадку, коли $f(z)$ – раціональна функція, то

$$T^*(s,r,f)=\log(1/s)T(r,f)+(T(s,f)-T(1,f))\log r-\log(1/s)T(1,f)=$$
$$=q\log r\log(1/s)+O(\log r+\log(1/s)),\ s\to 0, r\to\infty,\qquad (q>0),$$

маємо

$$|c_k(r,f)|\log(1/s)+|c_k(s,f)|\log r\le B_1\lambda\left(\frac{C_1}{s},D_1r\right),$$

для деяких сталих B_1,C_1,D_1, $0<s<1,\ r>1, k\in\mathbb{Z}$.

Нехай тепер виконується 2). Оскільки $c_{-k}(r,f)=\overline{c_k}(r,f),$ то досить розглянути випадок, коли $k\in\mathbb{N}$. Для $k\in\mathbb{N}$, з огляду на рівність (1), маємо

$$\frac{c_k(2r,f)}{2^k}-c_k(r,f)=\frac{1}{2}\overline{\alpha}_{-k}\left(\frac{1}{2^k(2r)^k}-\frac{1}{r^k}\right)+\frac{1}{2k}\sum_{r<|a_\mu|\le 2r}\left(\frac{r}{a_\mu}\right)^k+\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_\mu|\le r}\left(\frac{\overline{a}_\mu}{r}\right)^k-\frac{2^{-k}}{2k}\sum_{1<|a_\mu|\le 2r}\left(\frac{\overline{a}_\mu}{2r}\right)^k.$$

Звідси

$$|c_k(r,f)|\le\frac{1}{2}|\alpha_{-k}|+\frac{1}{2k}\left(\sum_{r<|a_\mu|\le 2r}1+\sum_{1<|a_\mu|\le r}1\right)+2^{-k}|c_k(2r,f)|+ \tag{4}$$

$$+\frac{2^{-k}}{2k}\sum_{1<|a_\mu|\le 2r}1=\frac{1}{2}|\alpha_{-k}|+2^{-k}|c_k(2r,f)|+\frac{n(2r,1/f)}{2k}+\frac{2^{-k}}{2k}n(2r,1/f).$$

Аналогічно, взявши в формулі (1) $1/r=s$, отримаємо

$$|c_k(s,f)|\le\frac{1}{2}|\alpha_k|+2^{-k}|c_k(s/2,f)|-\frac{n(s/2,1/f)}{2k}-\frac{2^{-k}}{2k}n(s/2,1/f). \tag{5}$$

Розглянемо

$$N^*(er,s/e,1/f)=\log(e/s)\int_1^{er}\frac{n(t,1/f)}{t}dt-\log(er)\int_{s/e}^{1}\frac{n(t,1/f)}{t}dt\ge$$

$$\ge(1+\log(1/s))\int_r^{er}\frac{n(t,1/f)}{t}dt-(1+\log r)\int_{s/e}^{s}\frac{n(t,1/f)}{t}dt\ge$$

$$\ge n(r,1/f)\log(1/s)-n(s,1/f)\log r.$$

Тоді, з (4) та (5), після нескладних елементарних перетворень, матимемо для $k\in\mathbb{N}$

$$|c_k(r,f)|\log(1/s)+|c_k(s,f)|\log r\le\frac{1}{2}(|\alpha_k|+|\alpha_{-k}|)\big(\log(1/s)+\log r\big)+$$

$$+2^{-k}\left(\frac{\log(1/s)}{\log(2/s)}\cdot|c_k(2r,f)|\log(2/s)+\frac{\log r}{\log 2r}\cdot|c_k(s/2,f)|\log 2r\right)+$$

$$+\frac{1}{2k}\big(1+2^{-k}\big)\left(\frac{\log(1/s)}{\log(2/s)}\cdot n(2r,1/f)\log(2/s)-\frac{\log r}{\log 2r}\cdot n(s/2,1/f)\log 2r\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2}(|\alpha_k|+|\alpha_{-k}|)\big(\log(1/s)+\log r\big)+2^{-k}B\lambda\left(\frac{2C}{s},2Dr\right)+\frac{1+2^{-k}}{2k}N^*(2er,s/(2e),1/f). \tag{6}$$

З рівності (2) маємо

$$N^*(2er,s/(2e),1/f)\le\log(2e/s)|I(2er,f)|+$$

$$+\log(2er)|I(s/(2e),f)|+\big(\log(2e/s)+\log(2er)\big)|I(1,f)|\le \tag{7}$$

$$\le|c_0(2er,f)|\log(2e/s)+|c_0(s/2e,f)|\log(2er)+\big(\log(2e/s)+\log(2er)\big)|c_0(1,f)|.$$

Зауважимо, що якщо функція $f(z)$ має хоча б один нуль в A то виконується нерівність

$$\log(1/s)+\log r\le N^*(s/C^*,D^*r,1/f)-b(\log(C^*/s)+\log(D^*r)),\quad (b\ge 0)$$

для деяких додатних сталих C^*,D^* та всіх s,r таких, що $0<s<1, r>1$. Дійсно, нехай, наприклад, $f(z)$ має нулі в області $\{z:|z|>1\}$ і $z=a,|a|>1$ – найменший за модулем нуль функцій $f(z)$ в цій області. Тоді

$$N^*(s/(e^{2b+1}|a|),e^{2b+1}|a|r,1/f)-b(\log((e^{2b+1}|a|)/s)+\log(e^{2b+1}|a|r))\ge$$

$$\geq \log((e^{2b+1}|a|)/s)\int\limits_{|a|}^{e^{2b+1}|a|r}\frac{n(t,1/f)}{t}dt - b(\log((e^{2b+1}|a|)/s)+\log(e^{2b+1}|a|r)) \geq$$

$$\geq \log((e^{2b+1}|a|)/s)\log(e^{2b+1}r) - b(\log((e^{2b+1}|a|)/s)+$$

$$+\log(e^{2b+1}|a|r)) \geq \log(1/s)+\log r.$$

Звідси, з 2) та (7) отримуємо, що існують додатні сталі B_2, C_2, D_2 такі, що

$$\log(1/s)+\log r \leq B_2\lambda\left(\frac{C_2}{s}, D_2 r\right), \quad 0<s<1, r>1.$$

Оскільки $\alpha_k = O(1/|k|), |k|\to+\infty$ ([2]), то з (6) та (7) ми отримуємо твердження 3) теореми.

У випадку, коли $f(z)$ не має нулів в A

$$|c_k(r,f)|\log(1/s)+|c_k(s,f)|\log r \geq \frac{1}{2}\Big|\,|\alpha_k|r^k - |\overline{\alpha}_{-k}|r^{-k}\Big|\log(1/s)+\frac{1}{2}\Big|\,|\overline{\alpha}_{-k}|(1/s)^k - |\alpha_k|(1/s)^{-k}\Big|\log r. \quad (8)$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(x) = ax^k - bx^{-k} - k(a+b)\log x,\ a>b,\ k\geq 1,\ x\geq 1.$$

$$\varphi'(x) = kax^{k-1} + \frac{kb}{x^{k+1}} - \frac{(a+b)k}{x} = \frac{k(x^k-1)(ax^k-b)}{x^{k+1}} > 0.$$

Отже, $\varphi(x) > \varphi(1) = a-b > 0.$ Тому

$$ax^k - bx^{-k} \geq k(a+b)\log x,\ a>b,\ k\geq 1,\ x\geq 1.$$

Тоді, з (8) матимемо

$$|c_k(r,f)|\log(1/s)+|c_k(s,f)|\log r \geq \frac{k}{2}(|\alpha_k|+|\alpha_{-k}|)\log r\log(1/s).$$

Якщо для деякого $k\in\mathrm{N}$: $|\alpha_k|+|\alpha_{-k}|=0$, то $c_k(r,f)=0, c_k(s,f)=0$ і нерівність 3) очевидна. В іншому випадку маємо

$$\frac{k}{2}(|\alpha_k|+|\alpha_{-k}|)(\log(1/s)+\log r) \leq \frac{k}{2}(|\alpha_k|+|\alpha_{-k}|)\log(e/s)\log(er) \leq$$

$$\leq |c_k(er,f)|\log(e/s)+|c_k(s/e,f)|\log er \leq B\lambda(Ce/s, Der).$$

Тоді, з огляду на 2), (6), отримаємо

$$|c_k(r,f)|\log(1/s)+|c_k(s,f)|\log r \leq \frac{B_3\lambda\left(\frac{C_3}{s}, D_3 r\right)}{|k|+1},\ 0<s<1, r>1, k\in\mathrm{Z}.$$

Нехай виконується 3). Застосовуючи рівність Парсеваля, маємо

$$T^*(s,r,f) \leq \frac{\log(1/s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(re^{i\theta})||d\theta + \frac{\log r}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(se^{i\theta})||d\theta \leq$$

$$\leq \log(1/s)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(re^{i\theta})||^2 d\theta\right)^{1/2} + \log r\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(se^{i\theta})||^2 d\theta\right)^{1/2} =$$

$$= \log(1/s)\left(\sum_{k\in\mathrm{Z}}|c_k(r,f)|^2\right)^{1/2} + \log r\left(\sum_{k\in\mathrm{Z}}|c_k(s,f)|^2\right)^{1/2} \leq B_4\lambda\left(\frac{C_4}{s}, D_4 r\right),$$

$0<s<1, r>1.$ Теорема доведена.

Список литературы: **1.** *Kondratyuk A.* Subharmonic functions on annuli. A two-parameter approach */ A. Kondratyuk, O. Stashyshyn* // Математичний вісник НТШ.– 2010. –№ 7. − С. 352-365. **2**. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains / A. Kondratyuk, I. Laine // Joensuu-L'viv. – 2006. – 116 P. **3.** *Кшановський І.* Властивості мероморфних функцій у двозв'язних областях : дис. на здобуття наук. ступ. канд. фіз-мат. наук : спец. 01.01.01 "Математичний аналіз"// – Львів, 2008. – 138 С. **4.** *Кшановський І,* Мероморфні у крузі з проколеним центром функції з обмеженою двопараметричною характеристикою / *І. Кшановський* // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – 2010. – № 687. – С. 122-125.

Надійшла до редколегії 20.01.2013

УДК517.53

Критерій скінченності Λ-типу аналітичних в проколеній площині функцій / І.П. Кшановський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2013. - № 4 (978). – С. 164-171. – Бібліогр.4: назв.

Получен критерий конечности λ-типа аналитической в проколотой плоскости функции f в терминах коэффициентов Фурье логарифма ее модуля в случае ограничения на рост двухпараметрической характеристики $T(s,r,f)$.

Ключевые слова: аналитическая функция, двусвязная область, характеристика Неванлинны

We get a criterion for finiteness of λ-type of analytic functions in punctured plane f in terms of Fourier coefficients of logarithm of its modulus in the case of restrictions on the growth of two-parametric characteristic $T(s,r,f)$.

Keywords: analytic function, doubly connected domain, Nevanlinna characteristic.

УДК 530.18 (УДК 530.10(075.4))

С. Н. ЯЛОВЕНКО, канд. техн. наук, ХНУРЭ, Харьков

ЧЁРНЫЙ ПРЕДЕЛ. ЧАСТЬ 10.1
ПРОДОЛЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Вводится, новое ограничение – ни одно тело нельзя разогнать до массы больше чем масса чёрной дыры, в дополнение по ограничению скоростью света. На базе этого ограничения получаются новые формулы для теории относительности и расширение классических уравнений для массы, длины, времени. Показывается относительность заряда. Расширяются формулы для заряда и гравитации. В данной работе рассматривается продолжение теории относительности на базе развития эфирной теории, где дискретным элементом сверхтекучего эфира является крептон (крепкая волна), элементарные частицы представлены плоскими водоворотами, гравитация представлена как изменяющаяся плотность крептона (крепкая волна), создающаяся плоскими водоворотами. Заряд представлен как растянутый водоворотом хвост синусоиды не свёрнутый спиралью и созданный дипольным смещением крептона.

Ключевые слова: теория относительности, водоворот, крептон, гравитация, плотность, масса, время, длина, заряд, скорость света, чёрная дыра.

В предыдущих главах были получены расширенные формулы для теории относительности

$$M(V) = M_0 \times \frac{1}{\sqrt{1-V^2/C^2}} \times \left[1-\left(\frac{GM_0}{C^2 R_0}\right)\frac{1}{1-V^2/C^2}\right] \times \left[\frac{1}{1-L(V)/L_{СИГ}}\right] \quad (1)$$