

баев Е.В., Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И. Оптимизация двухточечного зубчатого механизма по критерию минимизации объема редуктора // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". – 2011. – Вип.28. – С.150-162. 5. *Истомин С.И.* Проектирование мелкомодульных передач приборов с применением ЭВМ. – М.: Машиностроение, 1985. – 176с. 6. Планетарные передачи. Справочник. Под ред. докторов техн. наук В.Н. Кудрявцева и Ю.Н. Кирдяшева. – Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-е), 1977. – 536с. 7. Курсовое проектирование деталей машин / В.Н. Кудрявцев, Ю.А. Державец, И.И. Арефьев и др.; Под общ. ред. В.Н. Кудрявцева: Учебное пособие для студентов машиностроительных специальностей вузов. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-е, 1984. – 400с. 8. *Шехов А.В.* Алгоритмы решения задач оптимизации конструкций многоступенчатых механизмов // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". – 2011. – Вип.28. – С.171-180.

Поступила (received) 20.03.2014

УДК 539.3: 621.897

С.В. ШИЛЬКО, к.т.н., доц., заведующий лабораторией ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель;
В.Е. СТАРЖИНСКИЙ, д.т.н., доц., главный научный сотрудник ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси;
Е.М. ПЕТРОКОВЕЦ, научный сотрудник ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси;
С.Л. ГАВРИЛЕНКО, научный сотрудник ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И ПРОЧНОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ВЯЗКОУПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Разработана методика анализа деформативности и прочности элементов конструкций сложной формы с учетом вязкоупругости материала. Для получения реологических констант выполнена идентификация вязкоупругой модели Прони по результатам механических испытаний стандартных образцов на релаксацию при сжатии. Рассмотрены примеры расчета зубчатого колеса и сильфона из полиамида.

Ключевые слова: полимерные композиты, деформативность, прочность, вязкоупругость, модель Прони, метод конечных элементов, зубчатое колесо, сильфон.

Введение. Реономные свойства полимерных материалов, которые проявляются в виде ползучести и релаксации, оказывают значительное влияние на деформативность и прочность элементов конструкций, изготавливаемых на их основе [1]. С одной стороны, деформации ползучести снижают формостабильность и ухудшают эксплуатационные характеристики изделий, являясь, например, источником кинематической погрешности полимерных зубчатых передач. Вместе с тем, вязкоупругие эффекты играют положительную роль, способствуя демпфированию колебаний, а также, в ряде случаев, благоприятному перераспределению напряжений и повышению несущей способности в результате "приспособления" конструкции к внешним нагрузкам.

В этой связи необходимым этапом прочностного расчета полимерных конструкций является описание реологических свойств применяемых материалов с последующим анализом напряженно-деформированного состояния конструкции в вязкоупругой постановке. Нужно заметить, что аналитические решения теории вязкоупругости [2-5] пригодны лишь для тел канонической формы. Это затрудняет их использование в расчете полимерных изделий, зачастую имеющих весьма сложную конфигурацию. С другой стороны, метод конечных элементов, широко применяемый для решения прикладных задач в упругой и упруго-пластической постановке, в настоящее время редко используется для моделирования вязкоупругого поведения реальных конструкций и деталей машин.

© С.В. Шилько, В.Е. Старжинский, Е.М. Петроковец, С.Л. Гавриленко, 2014

Цель настоящего исследования – разработка методики прочностного расчета полимерных элементов конструкций сложной геометрической формы с учетом вязкоупругости материала.

Метод исследования. К настоящему времени для описания процессов ползучести и релаксации полимерных материалов отечественными и зарубежными исследователями предложен ряд вязкоупругих моделей [2-5]. С учетом того, что в распространенных программных продуктах конечноэлементного анализа, например, ANSYS, используется модель линейной вязкоупругости Прони, для определения реологических констант материала по результатам стандартных механических испытаний запишем определяющие соотношения указанной модели [6]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\tau) \frac{e_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau + \delta_{ij} \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (1)$$

Здесь

$$G(\xi) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{-\xi/\lambda_i^G}; \quad K(\xi) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{-\xi/\lambda_i^K}; \quad G(0) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i = \mu; \quad K(0) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i = K,$$

где G, K – модули сдвига и объемной деформации соответственно; t – время.

С учетом соотношений для упругих констант, приведенных, в частности, в работе [2]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

а также упрощающего предположения о постоянстве коэффициента Пуассона материала $\nu = \text{const}$, имеем следующие зависимости [7]:

$$ER_E(t-\tau) = 2(1+\nu)G'_\tau(t-\tau); \quad K'_\tau(t-\tau) = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G'_\tau(t-\tau).$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon(t) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(t) \right] - \frac{E}{1+\nu} \int_0^t R_E(t-\tau) \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon(\tau) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(\tau) \right] d\tau.$$

После математических преобразований получим аналитическую зависимость силы от времени в опыте на релаксацию при сжатии цилиндрического образца:

$$P(t) = E\varepsilon_0 S_0 \left(1 - \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\sum_{i=1}^{n_G} G_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right),$$

где S_0 – площадь поперечного сечения образца. К примеру, для определения вязкоупругих параметров полимерного материала Полиамид-6 на машине Instron 5567 были проведены механические испытания стандартных цилиндрических образцов на релаксацию при сжатии. Полученные зависимости приведенного усилия от времени для различных уровней деформации ε при модуле Юнга материала $E=1650\text{МПа}$ представлены на рисунке 1. Можно заметить, что для данного материала достаточно быстро происходит стабилизация усилия сжатия, что позволяет сократить время испытаний (в данном случае до 3 часов), т.е. получить необходимые данные из опыта на кратковременную релаксацию.

Для квадратичного отклонения (невязки) Δ записывалось выражение:

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 \left(P_{прив}^i - 1 + \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\sum_{i=1}^{n_G} G_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right)$$

В дальнейшем для вычисления параметров модели Прони использовалась силовая характеристика при деформации $\epsilon = -0,043$ в виде 4-х пар значений времени и приведенной силы (таблица).

Минимизируя невязку, находим константы G_∞, G_1, λ_1 в зависимости от модуля Юнга в предположении известного коэффициента Пуассона (далее принято $\nu=0,4$).

Результаты идентификации. При идентификации модели Прони ($n_G=1$) для материала Полиамид-6 при $E=1650$ МПа, $\nu=0,4$ были получены следующие ядра объемной и сдвиговой релаксации соответственно:

$$K(\xi) = 1783,8 + 962,3 \times e^{-\xi/4,3}; \quad G(\xi) = 382,8 + 206,5 \times e^{-\xi/4,3}$$

Здесь $K_\infty=1783,8$ МПа, $K_1=962,3$ МПа, $\tau_1^K = 4,3$ мин, $G_\infty=382,8$ МПа, $G_1=206,5$ МПа, $\tau_1^G = 4,3$ мин.

В соответствии с описанием программы ANSYS [6] вводятся дополнительные параметры: $G_0 = G_\infty + G_1$, $K_0 = K_\infty + K_1$, $\alpha_1^G = G_1/G_0$, $\alpha_1^K = K_1/K_0$, принимающие следующие значения для имеющихся экспериментальных данных: $G_0 = 589,3$ МПа, $K_0 = 2750$ МПа, $\alpha_1^G = 0,345$, $\alpha_1^K = 0,345$. К ним следует добавить упругие параметры: $E=1650$ МПа, $\nu=0,4$.

Результаты решения прикладных задач. В качестве примеров были выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния зубчатого колеса и сиффона из вышеописанного вязкоупругого полимерного материала (рисунок 2).

Пример 1: Прямо-зубое зубчатое колесо. Для анализа вязкоупругих эффектов при работе цилиндрической металлополимерной зубчатой

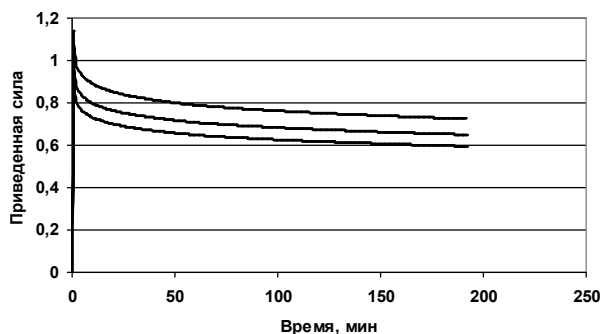


Рисунок 1 – Зависимость приведенного усилия ($P(t)/(E\epsilon S_0)$) от времени: нижняя кривая соответствует $\epsilon = -0,051$, средняя — $\epsilon = -0,043$, верхняя — $\epsilon = -0,034$ (расхождение не превышает 20%)

Таблица – Значения приведенной силы для 4-х моментов времени

t_i , мин	2,6	16,1	50,1	111,6
$P/(E\epsilon_0 S_0)$, $E=1650$ МПа	0,86	0,77	0,72	0,68

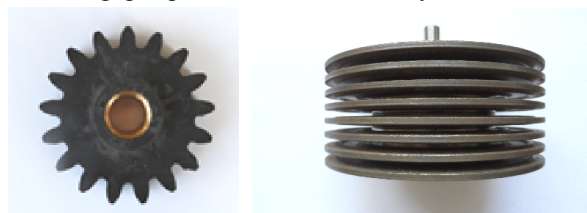


Рисунок 2 – Геометрически сложные элементы конструкций в виде зубчатого колеса (а) и сиффона (б)

передачи с модулем зацепления $m=3,5$ мм, рассматривали сопряжение одиночного зуба полимерного колеса и жесткого кругового цилиндра эквивалентного радиуса $R=2,3$ мм, моделирующего металлическую шестерню.

Усилие $F=10$ Н/см прикладывалось к цилиндру по нормали к эвольвентному профилю зуба (координаты профиля приведены в работах [1, 8]). Данные для расчета включали также ранее определенные характеристики материала колеса

(полиамид-6): модуль Юнга $E=1650$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0,4$, коэффициент трения $f=0,3$; реологические константы $\alpha_1^G = 0,35$, $\tau_1^G = 4,3$ мин.

Результаты расчета перемещений во времени показаны на рисунке 3. Можно заметить, что реономные свойства материала проявляются в начальный период времени, когда происходит основной прирост вязкоупругих перемещений.

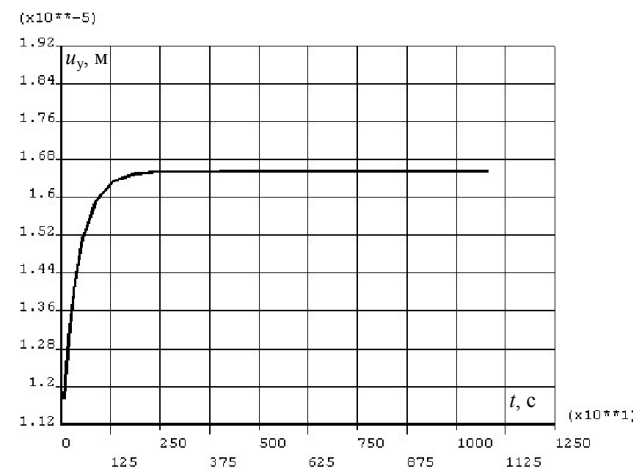


Рисунок 3 – Зависимость перемещений по оси y от времени

Пример 2: Сиффон. Рассчитывались компоненты вязкоупругого напряженно-деформированного состояния эластичной конструкции в виде сиффона, нагруженного вертикальной силой, равномерно распределенной по окружности внутреннего контура (на рисунках 4, 5 показаны распределения эквивалентных напряжений и вертикальных перемещений (осадки) правой части осевого сечения).

Так как в расчете задавались вязкоупругие характеристики материала Полиамид-6, зависимость осевых перемещений сиффона во времени (рисунок 6) аналогична таковой для зубчатого колеса (рисунок 3), но по абсолютной величине расчетные перемещения сиффона во много раз больше, что обусловлено значительными изгибными деформациями его гофров.

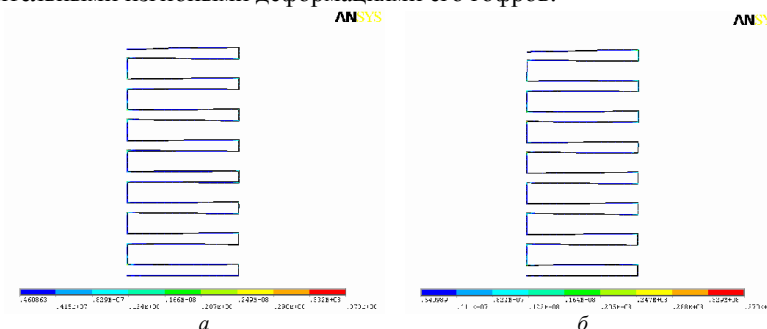


Рисунок 4 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: начальная (а) и конечная итерация (б)

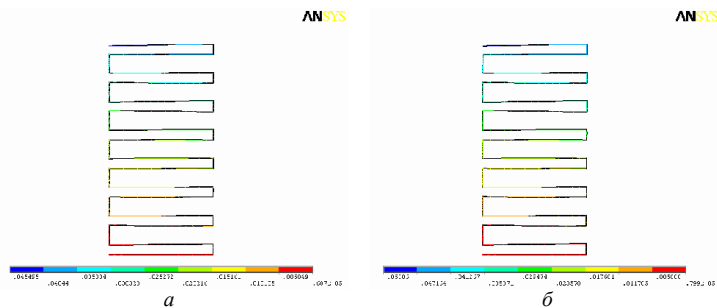


Рисунок 5 – Перемещения по оси y :
начальный момент времени нагружения (а) и конечная итерация (б)

Заключение. Разработана методика прогнозирования деформаций ползучести геометрически сложных элементов конструкций и деталей машин. Реологические параметры определены исходя из методически простых экспериментов на кратковременную релаксацию. Для апробации методики выполнены расчеты вязкоупругих перемещений прямозубого цилиндрического зубчатого колеса и сиффона.

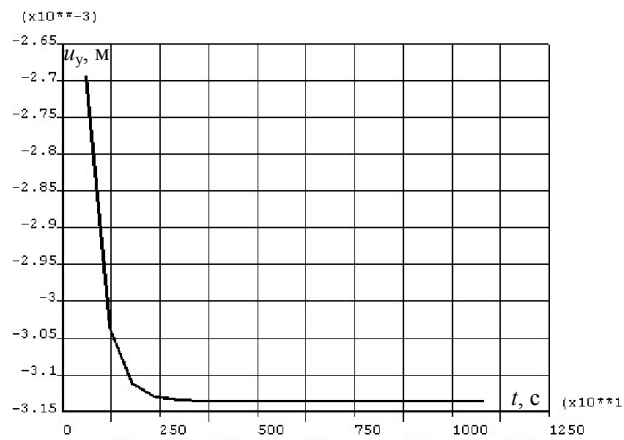


Рисунок 6 – Зависимость перемещений по оси y от времени

Установлено, что зависимости перемещений от времени имеют выраженный нелинейный характер, когда основное накопление вязкоупругих деформаций конструкционных полимерных материалов реализуется в начальный период времени.

Список литературы: 1. Старжинский В.Е., Шалобаев Е.В., Шилько С.В. и др. Элементы привода приборов. Расчет, конструирование, технологии. – Минск: Беларуская навука. – 2012. – 784с. 2. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация – М.: Высшая школа, 1976. – 277с. 3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340с. 4. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов – М.: Наука, 1985. – 303с. 5. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. – Гомель: Белгуг, 2001. – 344с. 6. ANSYS Revision 10-12. 7. Гавриленко С.Л., Шилько С.В. Идентификация линейной вязкоупругой модели Прони по результатам испытаний на релаксацию при сжатии // Теор. и прикл. механика: междуна. н/т сб. – Минск, 2014. – Вып.29. – С.219-223. 8. Шилько С.В., Старжинский В.Е., Петроковец Е.М., Черноус Д.А. Двухуровневый метод расчета трибосопряжений из дисперсно-армированных композитов. Часть 2 // Трение и износ. – 2014. – Т.35, №1. – С.52-61.

Поступила (received) 16.03.2014