

УДК 532/626, 69.04

**В. Н. БУХАРЦЕВ**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

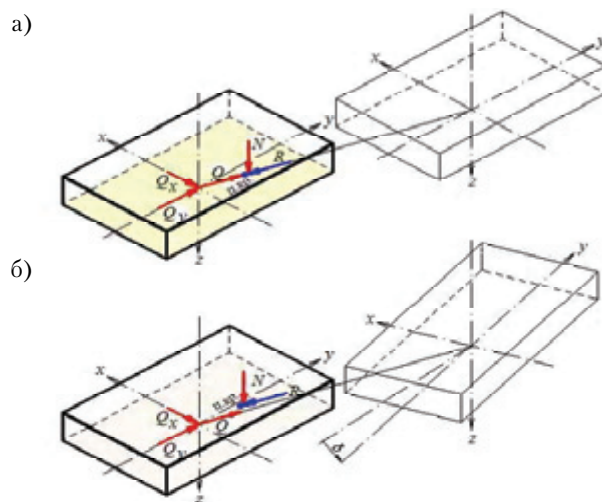
## ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ МАССИВНЫХ СООРУЖЕНИЙ ПРОТИВ СДВИГА В ПЛОСКОСТИ ПОДОШВЫ

Представлено обобщение результатов исследований устойчивости массивных сооружений на нескальном основании в условиях эксцентрично приложенной сдвигающей силы. Рассмотрены основные факторы, оказывающие существенное влияние на оценку устойчивости массивных сооружений. Показано, что наличие эксцентриситета сдвигающей силы относительно центра кручения существенно влияет на коэффициент запаса, поэтому этот фактор следует учитывать при оценке устойчивости сооружения. Наибольшее влияние на оценку устойчивости оказывает смещение сдвигающей силы относительно центра кручения вдоль длинной стороны подошвы сооружения. Разработанная методика, охватывающая все аспекты оценки устойчивости сооружения, позволяет существенно повысить надежность такой оценки при эксцентричном приложении сдвигающей нагрузки.

**сдвиг с поворотом, предельное равновесие, центр кручения, расчетные значения, границы доверительных зон и областей, распределение напряжений**

В общем случае массивному сооружению с плоской подошвой угрожают две формы нарушения устойчивости: опрокидывание и сдвиг. Основной формой нарушения устойчивости является сдвиг, поскольку в большинстве случаев нормативными документами перекосы сооружения регламентируются малыми значениями, не допускающими опрокидывания. Сдвиг может проявиться в виде перемещения в плоскости подошвы либо с захватом грунта основания и выпором его за пределами подошвы сооружения.

Если в предельном состоянии равнодействующая сдвигающих сил  $Q$ , приведенная к плоскости подошвы сооружения, проходит через центр кручения, то нарушение устойчивости происходит в виде прямолинейного смещения – сдвига в направлении сдвигающей силы (рис. 1а).



**Рисунок 1** – Схемы перемещения сооружения при потере устойчивости: а – линейно-поступательный сдвиг; б – сдвиг с поворотом.

Если же сдвигающая сила  $Q$  приложена с некоторым эксцентриситетом относительно центра кручения, то нарушение устойчивости происходит в виде сложного движения: сдвига с поворотом (рис. 1,б).

Смещение сдвигающей силы  $Q$  относительно центра кручения может происходить не только вследствие несимметричного приложения нагрузок, но также при несимметричной форме подошвы сооружения, при неоднородном строении основания в пределах подошвы или комбинации этих факторов, а также при опирании сооружения на неподвижную опору.

Центр кручения совпадает с центром тяжести эпюры предельных касательных напряжений, определяемых зависимостью Кулона. Координаты центра кручения в произвольной системе координат определяются выражениями:

$$x_{кр} = \frac{\int x \tau_k dF}{\int \tau_k dF}, \quad y_{кр} = \frac{\int y \tau_k dF}{\int \tau_k dF}, \quad (1)$$

где  $\tau_k = f_k \sigma + c_k$ ;  
 $f_k, c_k$  – критические значения параметров, соответствующие предельному сопротивлению;  
 $\sigma$  – нормальное напряжение в скелете грунта основания на площадке сдвигов; интегрирование выполняется по всей площади подошвы сооружения.

Линии действия элементарных сил сопротивления сдвигу  $\tau_k dF$  при повороте направлены не параллельно линии действия сдвигающей силы  $Q$ , как при линейно-поступательном сдвиге, а по касательным к окружностям, ортогонально радиус-векторам, проведенным из полюса поворота (рис. 2). Условия предельного равновесия сооружения в этом случае выражаются уравнениями:

$$\Sigma Z = 0: \int_F \sigma dF = N, \quad (2)$$

$$\Sigma X = 0: \int_F \tau_k \cos \psi dF = Q_x, \quad (3)$$

$$\Sigma Y = 0: \int_F \tau_k \sin \psi dF = Q_y, \quad (4)$$

$$\Sigma M_x = 0: \int_F y \sigma dF = M_x, \quad (5)$$

$$\Sigma M_y = 0: \int_F x \sigma dF = M_y, \quad (6)$$

$$\Sigma M_{z_p} = 0: \int_F \rho \tau_k dF = M_{кр} \neq 0, \quad (7)$$

где, помимо известных величин,  $\psi = \psi(x, y)$  – угол отклонения элементарных сил  $\tau_k dF$  от направления оси  $x$ ;  $\rho = \rho(x, y)$  – радиус-вектор для элементарной силы  $\tau_k dF$ , проведенный из полюса поворота  $p$  с координатами  $(x_p, y_p)$ .

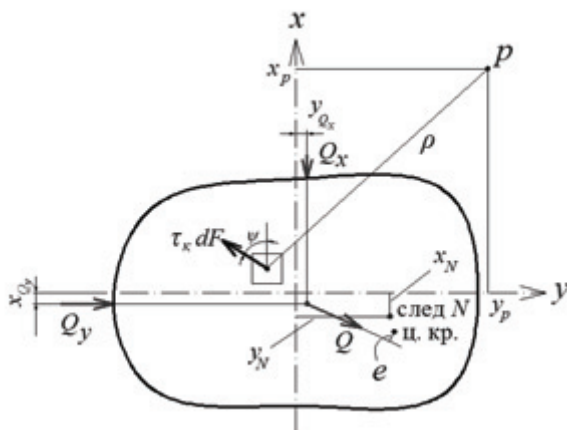


Рисунок 2 – Расчетная схема к оценке устойчивости против сдвига с поворотом.

Система уравнений предельного равновесия (2) – (7) распадается на две независимые системы. Из уравнений (2), (5) и (6), не содержащих  $\tau_k$ , определяются параметры функции распределения нормального напряжения по подошве сооружения. Из оставшихся трех уравнений (3), (4) и (7), содержащих  $\tau_k$ , определяются координаты полюса поворота и запас устойчивости сооружения против сдвига с поворотом.

Радиус-вектор  $\rho$  для элементарной силы  $\tau_{np} dF$  и тригонометрические функции, входящие в упомянутые уравнения, определяются выражениями:

$$\rho = \pm \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}, \quad \cos \psi = -\frac{y - y_p}{\rho}, \quad \sin \psi = -\frac{x - x_p}{\rho}. \quad (8)$$

Знак перед корнем в выражении (8) совпадает со знаком крутящего момента сдвигающей силы  $Q$  относительно упомянутого центра кручения: плюс соответствует повороту по часовой стрелке, если смотреть в направлении оси  $z$ , минус – в противоположном направлении.

Получить общее аналитическое решение задачи можно только для простейших форм подошвы сооружения: прямоугольника и треугольника [3]. Для подошвы произвольной формы можно получить решение, синтезирующее решения для упомянутых простейших форм. При этом контур подошвы сложного очертания описывается аппроксимирующей кусочно-линейной функцией. Точность вычислений в этом случае определяется точностью аппроксимации контура подошвы.

Оценка устойчивости массивного сооружения против сдвига с поворотом, в отличие сдвига без поворота, зависит от распределения нормального напряжения по подошве сооружения. Экспериментально установлено, что нормальное напряжение по подошве сооружения часто распределено нелинейно. Учет нелинейности распределения нормального напряжения можно обеспечить введением в зависимость для  $\sigma$  дополнительно слагаемого, учитывающего деформационные свойства грунта основания. Для сооружений с прямоугольной подошвой, имеющих наибольшее распространение, дополнительный член можно представить в виде эллиптического параболоида [1]. Тогда расширенная формула для определения нормальных напряжений у подошвы сооружения в главной центральной системе координат примет вид:

$$\sigma = \left( \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y \right) + \sigma \left[ \left( 1 - \frac{F}{J_x} y^2 \right) + \nu F \left( \frac{y^2}{J_x} - \frac{x^2}{J_y} \right) \right], \quad (9)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  
 $\sigma$  – параметр, имеющий размерность напряжения.

Параметр  $\sigma$  отражает отклонение значения нормального напряжения в центре тяжести подошвы от среднего значения. Знак этого параметра определяет знак кривизны эпюры напряжений: плюс соответствует выпуклой эпюре, минус – вогнутой; при  $\sigma = 0$  имеет место линейное распределение напряжений.

На рис. 3 представлены эпюры нормального напряжения, вычисленные по зависимости (9), на которые нанесены точки, соответствующие результатам экспериментальных исследований по определению напряжений вблизи контакта крупномасштабной модели с основанием, заимствованные из [2].

На устойчивость сооружения против сдвига с поворотом существенное влияние оказывает эксцентриситет и ориентация сдвигающей силы относительно его подошвы.

Зависимость коэффициента запаса от этих факторов представлена на рис. 4. На рис. 4а по горизонтальной оси отложены значения относительного эксцентриситета, вычисляемого по формуле:

$$\tilde{e} = \frac{2e}{a \cos \psi + b \sin \psi},$$

где  $\psi$  – угол наклона к оси  $x$  линии действия сдвигающей силы,  
 $a$  – длина стороны прямоугольника, параллельной оси  $x$ ,  
 $b$  – длина стороны прямоугольника, параллельной оси  $y$ .

Оценка запаса устойчивости по схеме предельных состояний основывается на сопоставлении расчетной модели сооружения, подвергаемого проверке на устойчивость, с моделью сооружения, находящегося в состоянии предельного равновесия – с так называемой предельной схемой. Это выражается в сопоставлении расчетных и критических значений параметров прочности грунта.

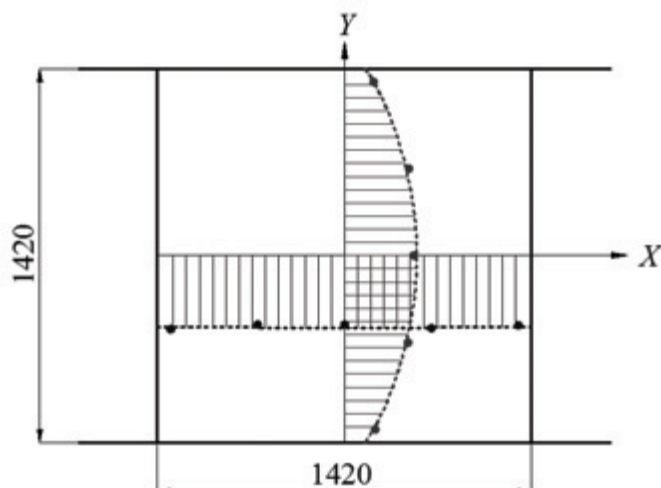


Рисунок 3 – Эпюры нормальных напряжений, возникающих у подошвы сооружения.

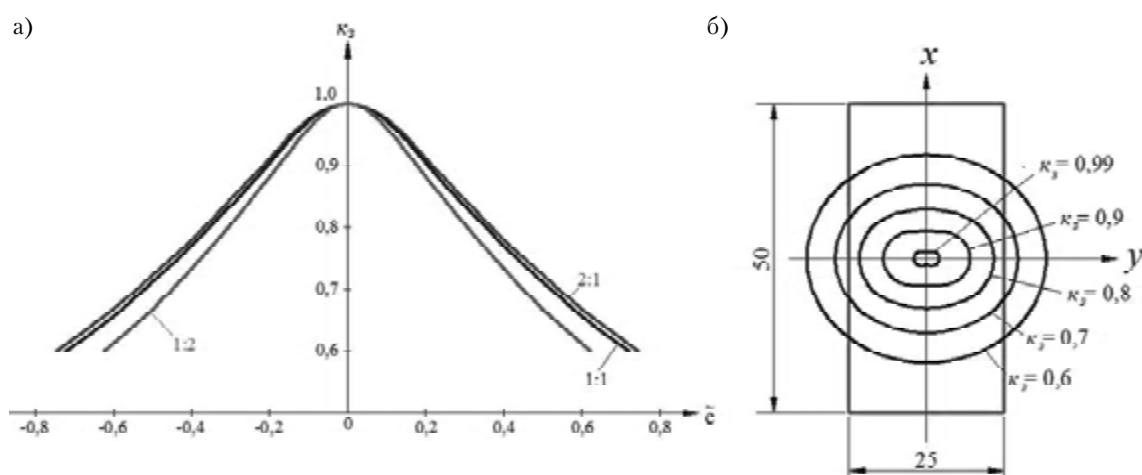


Рисунок 4 – Графики зависимостей коэффициента запаса от основных факторов: а) от эксцентриситета сдвигающей силы для разных соотношений длин сторон прямоугольной подошвы ( $F = \text{const}$ ); б) от ориентации сдвигающей силы относительно подошвы ( $e = \text{const}$ ).

Расчетные значения параметров прочности грунта  $f$  устанавливаются по результатам испытания образцов. Если используется традиционная концепция коэффициента запаса по предложению В. Феллиуса

$$\kappa_3 = \frac{f}{f_k} = \frac{c}{c_k}, \quad f_k \geq 0, \quad c_k \geq 0, \quad (10)$$

то его значение определяется одним из трех уравнений равновесия: (3), (4), (7).

В [4] нами предложено запас устойчивости определять как меру удаления точки с координатами  $f, c$  от линии критических значений параметров прочности грунта (рис. 5). При этом критические значения параметров прочности  $f_k, c_k$  определяются точкой пересечения перпендикуляра к линии критических значений, проходящего через точку с координатами  $f, c$  (на рис. 5 точка 3). При такой концепции запас устойчивости оценивается двумя коэффициентами:

$$\kappa_{zf} = \frac{f}{f_k}, \quad \kappa_{zc} = \frac{c}{c_k}, \quad f_k \geq 0, \quad c_k \geq 0. \quad (11)$$

Чтобы выразить запас устойчивости единым коэффициентом, нами предложено заменить параметр  $s$  безразмерным параметром  $s = cF/N$ , критическое значение этого параметра  $s_k = c_k B/N$ . Коэффициент запаса устойчивости определяется как отношение длин отрезков прямых, проведенных из начала координат к точкам 1 и 3:

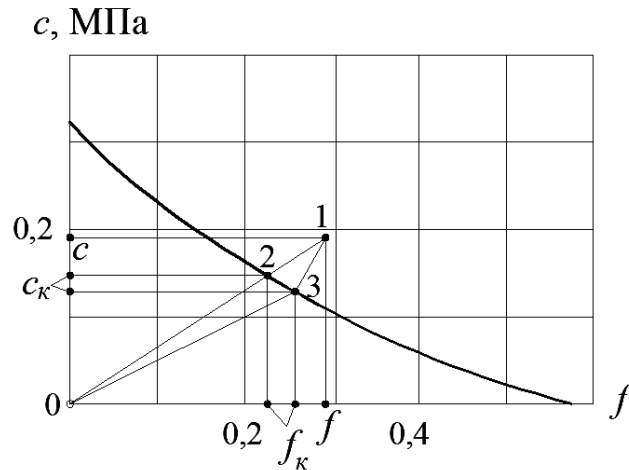


Рисунок 5 – Схема к определению коэффициента запаса устойчивости.

$$k_3 = \frac{\sqrt{f^2 + s^2}}{\sqrt{f_k^2 + s_k^2}}. \quad (12)$$

Эта зависимость отражает не только характеристики прочности грунта основания, но и размеры сооружения, а также нагрузку на него, что, по нашему мнению, более полно отражает запас устойчивости. По сравнению с предложенной методикой традиционная методика определения коэффициента запаса дает погрешность в сторону риска.

Следует подчеркнуть, что расчетные значения  $f, c$  характеризуют с определенной вероятностью механическую прочность реального грунта, а линия критических значений отражает геометрические характеристики сооружения и действующие на него нагрузки.

Расчетные значения характеристик механической прочности грунтов  $f, c$  вычисляются с применением вероятностных методов по результатам испытания образцов. В современных российских нормативных документах используется методика, нуждающаяся в совершенствовании. Поэтому нами предложена оригинальная методика [5], суть которой заключается в следующем.

При построении границ доверительной зоны в диапазоне расчетных значений нормальных напряжений  $\sigma \in [\sigma_{\min}; \sigma_{\max}]$  для всей регрессии в целом используется U-распределение вероятностей [6].

$$P_{\text{вер}} \{U \geq u\} = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{u^2}{v}\right)^{-\frac{v}{2}} \left[ \arcsin \lambda + \int_0^{\operatorname{ctg}(\frac{\psi}{2})} \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^2) \left(1 + \frac{u^2 \sigma^2}{u^2 + v}\right)^{\frac{v}{2}}} \right], \quad (13)$$

где  $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \right]}$ ,  $a = \frac{\sigma_{\min} - \bar{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}$ ,  $b = \frac{\sigma_{\max} - \bar{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}$ .

Если интервал  $[\sigma_{\min}; \sigma_{\max}] = 0$ , т. е.  $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = \bar{\sigma}$ , то  $\lambda = 0$ ,  $\psi = 0$  и U распределена как модуль случайной величины, подчиняющейся распределению Стьюдента с  $v$  степенями свободы. Если же интервал  $[\sigma_{\min}; \sigma_{\max}] \rightarrow \infty$ , что не свойственно грунтам, то  $\lambda = 1$ ,  $\psi = \pi$  и величина  $U^2/2$  подчиняется F-распределению с параметрами  $v_1 = 2$  и  $v_2 = v$ .

Границы доверительной зоны определяются выражениями:

$$\tilde{\tau}(\sigma) = f_u \sigma + c_u \pm \beta_u \sqrt{(\sigma - \bar{\sigma})^2 + \Delta}, \quad (14)$$

где  $f_u = \operatorname{tg} \varphi_u = \frac{1}{\Delta} (\bar{\sigma} \bar{\tau} - \bar{\sigma} \bar{\tau})$  и  $c_u = \frac{1}{\Delta} (\bar{\sigma}^2 \bar{\tau} - \bar{\sigma} \bar{\sigma} \bar{\tau})$  – нормативные значения параметров прочности грунта,

$\beta_u = \frac{su_{\alpha,\lambda,\nu}}{\sqrt{v\Delta}}$ ,  $u_{\alpha,\lambda,\nu}$  – квантиль U-распределения, определяемый в зависимости от доверительной вероятности  $1-\alpha$ , числа степеней свободы  $\nu$  и диапазона расчетных значений  $\sigma \in [\sigma_{\min}; \sigma_{\max}]$ ,

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tau_i - f_n \sigma_i - c_n)^2}, \Delta = \overline{\sigma^2} - \bar{\sigma}^2, \bar{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i, \overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i, \overline{\sigma\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i \tau_i,$$

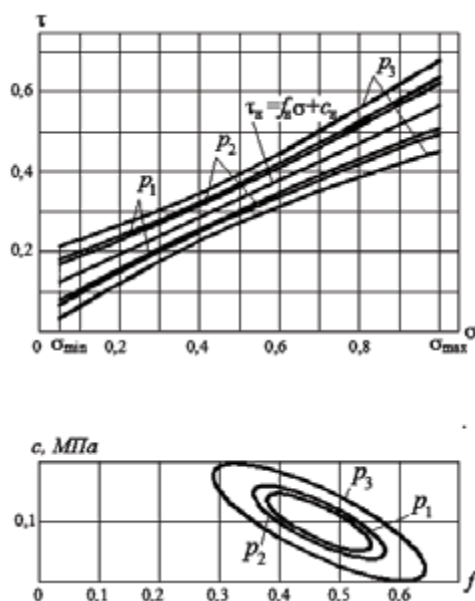
$\sigma_i$  и  $\tau_i$  – парные частные значения нормальных и предельных касательных напряжений, действующих на площадках сдвигов, полученные в отдельных испытаниях. Для линейной регрессии при  $c \neq 0$ ,  $\nu = n - 2$ , при  $c = 0$ ,  $\nu = n - 1$ .

Канонический вид выражения (14), описывающего две ветви гиперболы

$$\frac{[\tilde{\tau}(\sigma) - (f_n \sigma + c_n)]^2}{\beta_u^2 \Delta} - \frac{(\sigma - \bar{\sigma})^2}{\Delta} = 1. \tag{14*}$$

Графики границ доверительных зон, построенные по выражению (14) для трех уровней вероятностей:  $p_1 = 0,90$ ,  $p_2 = 0,95$ ,  $p_3 = 0,99$ , представлены на рисунке 6а. Использованные для построения графиков значения нормальных и предельных касательных напряжений, полученные по результатам испытаний образцов на приборах прямого среза, представлены в [2]. Очевидно, за расчетную регрессию следует взять прямую, касательную к нижней границе доверительной зоны при определенном уровне вероятности, которая соответствует минимальному запасу устойчивости. Для выявления параметров этой расчетной регрессии рационально перейти от системы координат  $\sigma\tau$  к системе координат  $f\sigma$ , в которой границы доверительной зоны отображаются эллипсами

$$\frac{[c_n + f_n \bar{\sigma} - (\tilde{c} + \tilde{f} \bar{\sigma})]^2}{\beta_u^2 \Delta} + \frac{(f_n - \tilde{f})^2}{\beta_u^2} = 1. \tag{15}$$



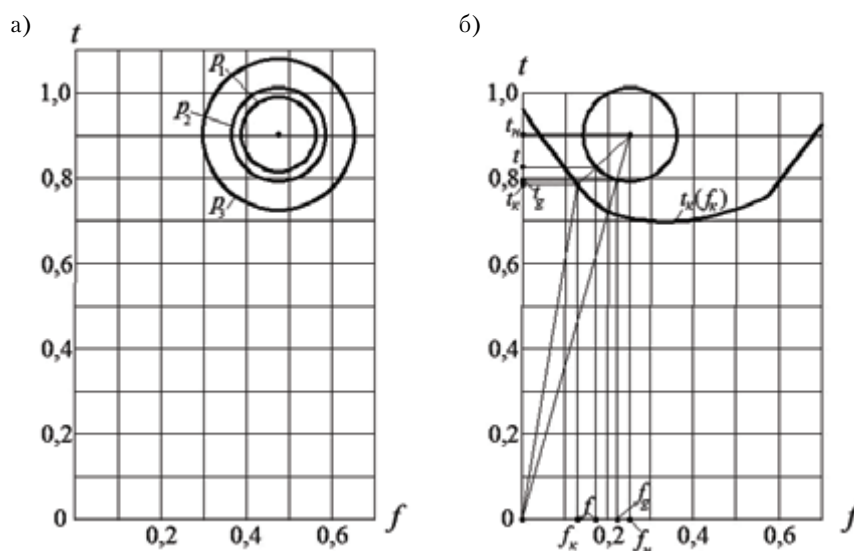
**Рисунок 6** – Графики границ при уровнях доверительной вероятности  $p_1 = 0,90$ ;  $p_2 = 0,95$ ;  $p_3 = 0,99$ : а) доверительной зоны линейной регрессии  $\tau_n = f_n \sigma + c_n$ ; б) доверительной области для параметров  $f$ ,  $c$ .

Графики этих границ доверительной области для трех уровней вероятностей, построенные по результатам [1], изображены на рисунке 6б.

Для упрощения вычислений при определении коэффициента безопасности по грунту и коэффициента запаса устойчивости рационально перейти к безразмерным параметрам. Вместо параметра  $c$  вводится безразмерный параметр  $t = (c + f \bar{\sigma}) / \sqrt{\Delta}$  при неизменном втором параметре  $f$ .

Нормативные и критические значения нового параметра обозначаются соответствующими индексами. В новой координатной системе эллипсы, изображенные на рис. 6б, отображаются окружностями (рис. 7) с центрами в точке  $f_n, t_n = (c_n + f_n \bar{\sigma}) / \sqrt{\Delta}$  и радиусами  $\beta_u$ . Это дает возможность оценивать устойчивость сооружения единым коэффициентом запаса по исходной экспериментальной статистической информации. В этом случае коэффициент запаса устойчивости определяется выражением:

$$k_s = \frac{\sqrt{f^2 + t^2}}{\sqrt{f_k^2 + t_k^2}}. \quad (16)$$



**Рисунок 7** – Графики границ при уровнях доверительной вероятности  $p_1 = 0,90$ ;  $p_2 = 0,95$ ;  $p_3 = 0,99$ : а) доверительной области для параметров  $f, t$ ; б) то же с нанесением линии критических значений  $f_n, t_n$ .

## ВЫВОДЫ

1. Наличие эксцентриситета сдвигающей силы относительно центра кручения существенно влияет на коэффициент запаса, поэтому этот фактор следует учитывать при оценке устойчивости сооружения.
2. Наибольшее влияние на оценку устойчивости оказывает смещение сдвигающей силы относительно центра кручения вдоль длинной стороны подошвы сооружения.
3. Разработанная методика, охватывающая все аспекты оценки устойчивости сооружения, позволяет существенно повысить надежность такой оценки при эксцентричном приложении сдвигающей нагрузки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухарцев, В. Н. Оценка устойчивости бетонных сооружений на нескальном основании [Текст] / В. Н. Бухарцев, Хуан Ву Мань // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 1. – С. 57–64.
2. Липовецкая, Т. Ф. Экспериментальные исследования распределения нормальных напряжений в подошве жестких фундаментов на мягких грунтах [Текст] / Т. Ф. Липовецкая // Труды координационных совещаний по гидротехнике. Вып. III / ВНИИГ им. Б. Веденеева. – Л. : Госэнергоиздат, 1962. – С. 22–51.
3. Бухарцев, В. Н. Оценка устойчивости внецентренно нагруженных бетонных сооружений на нескальном основании [Текст] / В. Н. Бухарцев, Хуан Ву Мань // Гидротехническое строительство. – 2011. – № 4. – С. 28–32.
4. Бухарцев В. Н. Повышение надежности оценки устойчивости бетонных сооружений на нескальном основании против сдвига с поворотом [Текст] / В. Н. Бухарцев, Хуан Ву Мань // Гидротехническое строительство. – 2012. – № 11. – С. 41–46.
5. Бухарцев, В. Н. К определению расчетных значений параметров прочности грунтов [Текст] / В. Н. Бухарцев // Гидротехническое строительство. – 2006. – № 6. – С. 27–30.
6. Большев, Л. Н. Таблицы математической статистики [Текст] / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

Получено 25.02.2016

**В. М. БУХАРЦЕВ**  
**ОЦІНКА СТІЙКОСТІ МАСИВНИХ СПОРУД ПРОТИ ЗСУВУ В ПЛОЩИНІ ПІДОШВИ**

Санкт-Петербурзький політехнічний університет Петра Великого

Надано узагальнення результатів досліджень стійкості масивних споруд на нескельній підваліні в умовах ексцентрично прикладеної зрушувальної сили. Розглянуто основні фактори, які впливають на оцінку стійкості масивних споруд. Показано, що наявність ексцентриситету зрушувальної сили відносно центра кручення істотно впливає на коефіцієнт запасу, тому цей фактор слід враховувати при оцінці стійкості споруди. Найбільший вплив на оцінку стійкості має зсув зрушувальної сили відносно центра кручення уздовж довгої сторони підшви споруди. Розроблена методика, яка охоплює всі аспекти оцінки стійкості споруди, дозволяє істотно підвищити надійність такої оцінки при ексцентричному прикладанні зрушувального навантаження.

**зрушення з поворотом, гранична рівновага, центр кручення, розрахункові значення, межі довірчих зон і областей, розподіл напружень**

**VLADIMIR BUKHARTSEV**  
**ESTIMATION OF STABILITY AGAINST SHEAR MASSIVE STRUCTURES IN THE PLANE OF THE SOLE**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

A generalization of the results of stability of studies of massive constructions on no rock basis under eccentrically applied shear force has been given. The main factors have a significant impact on the stability against shear of massive structures. It is shown that the presence of eccentricity of shear about the center of torsion significantly affects on the safety factor, so this factor should be taken into account when assessing the sustainability of the building. The offset of the shear force relative to the center of torsion along the long side of the sole structure has the greatest effect on the measurement of sustainability. The developed method, covering all aspects of assessment of stability of structures, can significantly improve the reliability of such assessment upon eccentric application of shear loading.

**shift to turn, limit equilibrium, center of torsion, the calculated values, the limits of trust zones and regions, the stress distribution**

**Бухарцев Володимир Миколайович** – доктор технічних наук, професор кафедри водогосподарського та гідротехнічного будівництва Санкт-Петербурзького політехнічного університету Петра Великого.

**Бухарцев Владимир Николаевич** – доктор технических наук, профессор кафедры водохозяйственного и гидротехнического строительства Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

**Bukhartsev Vladimir** – D.Sc. (Eng.), Professor, Water Management and Hydrotechnical Construction Department, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.