УДК: 519.876.5

В. В. СКАЛОЗУБ, О. В. ВЄТРОВА (ДІІТ)

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ НЕЧІТКОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Досліджено проблеми планування з використанням моделей лінійного програмування, що мають нечіткі коефіцієнти цільової функції та чіткі обмеження, встановлено властивості розв'язків таких задач та підходи до їх рішення. Детально розглянуто транспортну задачу у нечіткій постановці та запропоновано метод її зведення до задачі зазначеного типу і алгоритм розв'язання.

Исследованы проблемы планирования с использованием моделей линейного программирования с нечеткими коэффициентами целевой функции и четкими ограничениями, установлены подходы к решению таких задач и свойства самих решений. Детально рассмотрена транспортная задача в нечеткой постановке, предложен метод ее сведения к задаче указанного типа и алгоритм решения.

In the article planning problems which use linear programming models with fuzzy coefficients and strict constraints are considered. Properties of solutions of such problems are defined and possible approaches to solving these problems are proposed. Also transportation problem in fuzzy formulation is considered. A method of reduction of transportation problem to models of above mentioned type is proposed together with solution algorithm.

Численні проблеми планування роботи залізничного транспорту можуть бути описані моделями, подібними до лінійного програмування (ЛП). Однак використання класичних задач ЛП на практиці обмежене додатковими вимогами щодо можливості побудови адекватних моделей. Одна з причин труднощів застосування класичних моделей ЛП полягає у недетермінованому, стохастичному або розмитому характері даних реальних ситуацій планування. У таких випадках широке застосування набули нечіткі моделі ЛП [1].

Залежно від форми нечіткого описання вихідної інформації серед задач нечіткого лінійного програмування (НЧЛП) можна виділити такі основні типи [1].

А. Задача із чіткою цільовою функцією у разі нечітких обмежень на допустимі розв'язки.

В. Задача із цільовою функцією з нечіткими коефіцієнтами та чіткими обмеженнями.

С. Задача з нечіткою цільовою функцією та нечіткими обмеженнями.

Задача НЧЛП може не мати розв'язків, якщо множина допустимих розв'язків порожня (обмеження задачі несумісні). В іншому разі, оптимальний розв'язок задачі НЧЛП може бути детермінованим або нечітким, тобто нечіткою підмножиною множини допустимих планів.

Задачі НЧЛП у загальному випадку не мають універсальних аналітичних методів знаходження детермінованого оптимального розв'язку або побудови функції належності нечіткого розв'язку [1]. Розв'язання задач А і С у загальному випадку зводиться до розв'язання ряду задач ЛП. Для цього вводяться дискретні α-рівні. Якщо план x_0 є оптимальним розв'язком вихідної задачі на множині рівня α, то можна вважати, що число α є ступенем належності плану x_0 нечіткій множині розв'язків вихідної задачі. Вихідна задача НЧЛП наведена у вигляді сукупності звичайних задач ЛП, які розв'язуються для різних α-рівнів множини допустимих розв'язків. Перебравши різні значення α, отримаємо функцію належності нечіткого розв'язку [1].

Задача ЛП з нечіткими коефіцієнтами цільової функції та чіткими обмеженнями

Окремі моделі задач НЧЛП можуть бути розв'язані аналітично. До таких моделей належить задача В – задача ЛП з нечіткими коефіцієнтами цільової функції (функції належності яких є кусково-лінійними) та чіткими обмеженнями. Досліджується така постановка задачі В:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_i x_i \to \min; \\ (x_i)_{i=1}^{n} \in X; \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

де $X \subset R^n$ – замкнений, опуклий багатогранник; у (1) $\widetilde{c}_i$ – нечіткі трикутні величини, функції належності яких визначаються як:

$$\mu_{c_i}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\alpha_i}{\beta_i-\alpha_i}, & \text{якщо} \quad x\in[\alpha_i;\beta_i];\\ \dfrac{\gamma_i-x}{\gamma_i-\beta_i}, & \text{якщо} \quad x\in[\beta_i;\gamma_i];\\ 0, \text{ в іншому разі.} & \end{cases} \quad (2)$$

Функція $\mu_{c_i}(x)$ на інтервалі $[\alpha_i;\beta_i]$ є лівосторонньою функцією належності (ЛСТ), а на інтервалі $[\beta_i;\gamma_i]$ – правосторонньою (ПСТ) [1]. Для дослідження розв'язання задачі В розглянемо такі задачі:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \to \min;\\ (x_i)_{i=1}^{n}\in X;\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n},\end{cases} \quad (3)$$

де α_i – значення коефіцієнтів $\widetilde{c}_i$, за яких ЛСТ функції $\mu_{c_i}(x)$ набувають нульового значення.

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i \to \min;\\ (x_i)_{i=1}^{n}\in X;\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n},\end{cases} \quad (4)$$

де β_i – значення коефіцієнтів $\widetilde{c}_i$, за яких ЛСТ функції $\mu_{c_i}(x)$ набувають максимального значення.

Теорема 1. Якщо задачі ЛП (3) та (4), що відповідають задачі (1), мають однакові детерміновані оптимальні розв'язки $(x_i^*)_{i=1}^{n}$, тоді для $\forall p\in(0,1)$ задача

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}c_i^p x_i \to \min;\\ (x_i)_{i=1}^{n}\in X;\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n},\end{cases} \quad (5)$$

де $(c_i^p)_{i=1}^{n}\in[\alpha_i,\beta_i]^n$ – значення нечітких величин $(c_i^p)_{i=1}^{n}$: $\forall i=\overline{1,n}$ $\mu_{c_i}(c_i^p)=p$, має такий самий детермінований оптимальний розв'язок $(x_i^*)_{i=1}^{n}$.

Доведення.. Нехай $(x_i^*)_{i=1}^{n}$ – детермінований оптимальний розв'язок задач (3) і (4). Розглянемо задачу (5) при довільному фіксованому $p\in(0,1)$. Згідно з означенням функцій належності (2), для ЛСТ функцій виконується:

$$c_i^p-\alpha_i=p(\beta_i-\alpha_i), \quad c_i^p=p\beta_i+(1-p)\alpha_i.$$

Задача (5) приймає такий вигляд:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}c_i^p x_i = p\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i+(1-p)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \to \min;\\ (x_i)_{i=1}^{n}\in X;\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}.\end{cases} \quad (6)$$

Якщо розв'язок $(x_i^*)_{i=1}^{n}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^* = \min_{(x_i)_{i=1}^{n}\in X}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

та

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^* = \min_{(x_i)_{i=1}^{n}\in X}\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i,$$

тоді у точці $(x_i^*)_{i=1}^{n}$ кожен з доданків цільової функції задачі (5) досягає свого мінімального значення на *X*, а отже $(x_i^*)_{i=1}^{n}$ буде оптимальним розв'язком задачі (5) для $\forall p\in(0,1)$. Кінець доведення.

Узагальнення теореми 1. Якщо задача (5) має однакові детерміновані оптимальні розв'язки $(x_i^*)_{i=1}^{n}$ при $p=p_1\in[0,1)$ та при $p=p_2\in(p_1,1]$, то такий самий оптимальний розв'язок має задача (5) при $\forall p\in[p_1,p_2]$.

Доведення аналогічне.

Теорема 2. Якщо задачі (3) і (4), що відповідають ЛСТ функціям $\mu_{c_i}(x)$, мають оптимальні розв'язки $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ відповідно і $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}\ne\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$, тоді існує і притому тільки одне число $0<p<1$ таке, що оптимальними розв'язками задачі (5) є обидва вектори $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ і будь-який вектор, що є їх лінійною комбінацією; тобто задача має безліч розв'язків, що становлять собою ребро багатогранника множини допустимих розв'язків, яке з'єднує вершини $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$.

Доведення. Нехай $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$ – оптимальний розв'язок задачі (3), а $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ – оптимальний розв'язок задачі (4) і $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n} \neq \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$. Розглянемо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^p x_i^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} c_i^p x_i^{\beta}. \qquad (7)$$

Оскільки $\tilde{c}_i$ – трикутні нечіткі величини вигляду (2), то $c_i^p = p\beta_i + (1-p)\alpha_i$. Таким чином, рівняння (7) приймає вигляд:

$$p\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\alpha} - p\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\alpha} =$$

$$= p\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_1^{\beta} - p\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\beta};$$

$$p\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)x_i^{\alpha} - \sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)x_i^{\beta}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\alpha};$$

$$p\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)\left(x_i^{\alpha} - x_i^{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(x_i^{\beta} - x_i^{\alpha}\right). \qquad (8)$$

Рівняння (8) є лінійним, в ньому

$$\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)\left(x_i^{\alpha} - x_i^{\beta}\right) \neq 0,$$

оскільки $\tilde{c}_i$ – нечіткі трикутні величини вигляду (2) та $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n} \neq \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$. Отже, рівняння (8) має рівно один розв'язок:

$$p_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(x_i^{\beta} - x_i^{\alpha}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(x_i^{\beta} - x_i^{\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(x_i^{\beta} - x_i^{\alpha}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(x_i^{\alpha} - x_i^{\beta}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(x_i^{\beta} - x_i^{\alpha}\right)}} = \frac{1}{1 + M_{\alpha\beta}}; \qquad (9)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(x_i^{\alpha} - x_i^{\beta}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(x_i^{\beta} - x_i^{\alpha}\right)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\alpha} - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\beta}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\alpha}}. \qquad (10)$$

Оскільки

$$\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n} = \arg\left(\min_{(x_i)_{i=1}^{n} \in X} \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right)$$

та

$$\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n} = \arg\left(\min_{(x_i)_{i=1}^{n} \in X} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right),$$

очевидно, що $M_{\alpha\beta} > 0$, а отже $p^* \in (0,1)$. Таким чином, за теоремою 1, для $\forall p \in \left[0, p^*\right]$ розв'язком задачі (5) є $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$, а для $\forall p \in \left[p^*, 1\right]$ – вектор $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$. За властивостями розв'язків задач ЛП точки $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ є вершинами множини *X*. Оскільки при $p = p^*$ оптимум у задачі (5) досягається у двох вершинах множини *X*, то оптимальним розв'язком буде будь-який розв'язок, що належить ребру $\left[\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}, \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}\right]$. Кінець доведення.

Зауваження. Якщо у (10) знаменник $M_{\alpha\beta}$ дорівнює нулю, це означає, що $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ є оптимальним розв'язком задачі (3). Отже, за теоремою 1, можна вважати цей розв'язок детермінованим оптимальним розв'язком задачі (5) для $\forall p \in (0,1)$ (для ЛСТ функцій $\mu_{c_i}(x)$). Якщо ж нуль з'являється у чисельнику величини $M_{\alpha\beta}$, обчисленої за (10), це означає, що розв'язок $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$ є оптимальним розв'язком задачі (3). Отже, за теоремою 1 можна вважати цей розв'язок детермінованим оптимальним розв'язком задачі (5) для $\forall p \in (0,1)$ (для ЛСТ функцій $\mu_{c_i}(x)$).

Наслідок 1. Якщо задача (4) та задача виду:

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i \to \min; \\
\left(x_i\right)_{i=1}^{n} \in X; \\
x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n},
\end{cases} \qquad (11)
$$

що відповідають ПСТ функціям $\mu_{c_i}(x)$, мають детерміновані оптимальні розв'язки $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}$ відповідно, і $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n} \ne \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$, тоді існує, і притому тільки одне, число $0 < p < 1$ таке, що оптимальними розв'язками задачі (5) є обидва вектори $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ і будь-який вектор, що є їх лінійною комбінацією. Тобто задача має безліч розв'язків, які становлять собою ребро багатогранника множини допустимих розв'язків, яке з'єднує вершини $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$. При цьому число p знаходиться за формулою

$$
p_{\beta\gamma} = \frac{1}{1 + M_{\beta\gamma}}, \qquad (12)
$$

де

$$
M_{\beta\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(x_i^{\gamma} - x_{\mathrm{i}}^{\beta}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \left(x_i^{\beta} - x_i^{\gamma}\right)}. \qquad (13)
$$

Доведення тверджень аналогічне теоремі 2.

Зауваження. Якщо у формулі (13) у знаменнику $M_{\beta\gamma}$ виходить нуль, це означає, що розв'язок $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ є оптимальним розв'язком задачі (11). Отже, за теоремою 1 можна вважати $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ детермінованим оптимальним розв'язком задачі (5) для $\forall p \in (0{,}1)$ (для ПСТ функцій $\mu_{c_i}(x)$). Якщо ж нуль з'являється у чисельнику величини $M_{\beta\gamma}$, обчисленої за (13), це означає, що розв'язок $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}$ є оптимальним розв'язком задачі (4). Отже, за теоремою 1 можна також вважати $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}$ детермінованим оптимальним розв'язком задачі (5) для $\forall p \in (0{,}1)$ (для ПСТ функцій $\mu_{c_i}(x)$).

Наслідок 2. Якщо оптимальні розв'язки $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ задач (3) і (4) відповідно такі, що $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n} \ne \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$, тоді вони є суміжними вершинами n – вимірного багатогранника X, та $\exists!\, p^* \in (0;1)$: при $p = p^*$ задача (5) має множину оптимальних розв'язків, що становить собою ребро $\left[\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}, \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}\right]$. Аналогічно, різні детерміновані оптимальні розв'язки $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ задач (11) і (4) відповідно є суміжними вершинами n – вимірного многогранника X та $\exists!\, p^* \in (0;1)$: при $p = p^*$ задача (5) має множину оптимальних розв'язків, що становлять собою ребро $\left[\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}, \left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}\right]$.

Наслідок 3. Якщо детерміновані оптимальні розв'язки $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$, $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}$ задач (3), (4) і (11) відповідно є попарно нерівними, то вони (у відповідному порядку) становлять собою послідовність суміжних вершин многогранника допустимих розв'язків.

Таким чином, якщо коефіцієнти $\tilde{c}_i$ цільової функції задачі (1) – нечіткі трикутні величини з функціями приналежності (2), то для розв'язання задачі (1) можна запропонувати такий алгоритм.

Алгоритм В.

1. Розв'язуємо задачі (3), (4) та (11). Отримуємо детерміновані оптимальні розв'язки $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n}$, $\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ та $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}$ відповідно.

2. Якщо $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n} \ne \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$ та (або) $\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n} \ne \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$, то знаходимо $p_{\alpha\beta}$ та (або) $p_{\beta\gamma}$ за формулами (9), (10) та (12), (13) відповідно.

3. Якщо детерміновані оптимальні розв'язки $\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^{n} = \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n} = \left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^{n}$, вважаємо, що задача має детермінований оптимальний розв'язок, $\left(x_i^{*}\right)_{i=1}^{n} = \left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^{n}$, інакше можна знайти закон залежності оптимального розв'язку від значень функцій належності вхідних даних

$$(x_i^*)_{i=1}^n = \begin{cases} (x_i^{\alpha})_{i=1}^n\ , & \text{якщо}\ \ \forall i\ \ (\mu_{c_i}(x)\in\Omega\ \ \text{та}\ \ \mu_{c_i}\ -\ \text{ЛСТ}); \\ (x_i^{\gamma})_{i=1}^n, & \text{якщо}\ \ \forall i\ \ (\mu_{c_i}(x)\in\Omega\ \ \text{та}\ \ \mu_{c_i}\ -\ \text{ПСТ}); \\ [(x_i^{\beta})_{i=1}^n,(x_i^{\gamma})_{i=1}^n], & \text{якщо}\ \ \forall i\ \ \mu_{c_i}(x)=p_{\beta\gamma}; \\ (x_i^{\alpha})_{i=1}^n\ , & \text{якщо}\ \ p_{\alpha\beta}>p_{\beta\gamma} \\ & \quad \text{та}\ \ \forall i\ \ (\mu_{c_i}(x)\in\Psi\ \ \text{та}\ \ \mu_{c_i}\ -\ \text{ЛСТ}); \\ (x_i^{\beta})_{i=1}^n, & \text{якщо}\ \ p_{\alpha\beta}>p_{\beta\gamma} \\ & \quad \text{та}\ \ \forall i\ \ (\mu_{c_i}(x)\in\Psi\ \ \text{та}\ \ \mu_{c_i}\ -\ \text{ПСТ}); \\ (x_i^{\gamma})_{i=1}^n\ , & \text{якщо}\ \ p_{\alpha\beta}<p_{\beta\gamma} \\ & \quad \text{та}\ \ \forall i\ \ (\mu_{c_i}(x)\in\Lambda\ \ \text{та}\ \ \mu_{c_i}\ -\ \text{ЛСТ}); \\ (x_i^{\beta})_{i=1}^n, & \text{якщо}\ \ p_{\alpha\beta}<p_{\beta\gamma} \\ & \quad \text{та}\ \ \forall i\ \ (\mu_{c_i}(x)\in\Lambda\ \ \text{та}\ \ \mu_{c_i}\ -\ \text{ПСТ}); \\ [(x_i^{\alpha})_{i=1}^n,(x_i^{\beta})_{i=1}^n], & \text{якщо}\ \ \forall i\ \ \mu_{c_i}(x)=p_{\alpha\beta}; \\ (x_i^{\beta})_{i=1}^n, & \text{якщо}\ \ \forall i\ \ \mu_{c_i}(x)\in(\max\{p_{\alpha\beta},p_{\beta\gamma}\},1]. \end{cases}$$

Тут $\Omega=[0,\min\{p_{\alpha\beta},p_{\beta\gamma}\})$ $\Psi=[p_{\beta\gamma},p_{\alpha\beta}]$ $\Lambda=[p_{\alpha\beta},p_{\beta\gamma}]$.

Зазначену залежність проілюстровано на рис. 1. На осі абсцис відкладено значення функцій приналежності вхідних даних, на осі ординат – оптимальні розв'язки відповідних задач.

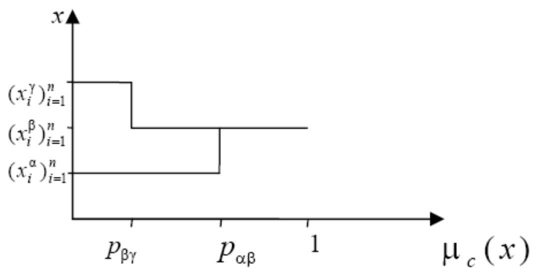

Рис. 1. Функція залежності оптимального розв'язку від значень функцій належності вхідних даних

Нечітка функція цілі матиме такий вигляд (рис. 2).

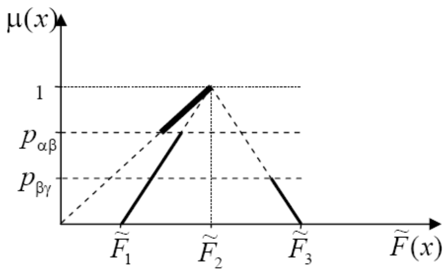

Рис.2. Нечітка функція цілі

На рис. 2 $\widetilde{F}_1=\widetilde{F}\left(\left(x_i^{\alpha}\right)_{i=1}^n\right)$, $\widetilde{F}_1=\widetilde{F}\left(\left(x_i^{\beta}\right)_{i=1}^n\right)$, $\widetilde{F}_1=\widetilde{F}\left(\left(x_i^{\gamma}\right)_{i=1}^n\right)$.

Наведений метод може бути узагальнений на випадок опуклих кусково-лінійних функцій належності коефіцієнтів цільової функції.

Будемо надалі позначати нечіткі трикутні величини (2) таким чином:

$$(\beta_i-\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i-\beta_i)\,. \tag{14}$$

Наприклад,

$$\mu(x)=\begin{cases} x-1, & \text{якщо}\quad x\in[1,2) \\ \dfrac{13-x}{11}, & \text{якщо}\quad x\in[2,13]= \\ =(2-1,\ \ 2,\ \ 13-2)=(1,\ 2,\ 11) & \\ 0,\ \ \text{в}\ \ \text{інших}\ \ \text{випадках.} & \end{cases}$$

Нечітка модель транспортної задачі. Розглянемо одну з окремих моделей – транспортну задачу лінійного програмування (ТЗ). Нагадаємо класичну постановку ТЗ [3]. Маємо n приймачів певного продукту та m джерел цього продукту. Відомі вартості транспортування одиниці продукції від кожного джерела до кожного приймача c_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Відомі також об'єми продукції a_i, $i=\overline{1,m}$, що знаходяться у кожному джерелі, та об'єми продукції b_j, $j=\overline{1,n}$, які бажає прийняти кожен приймач (співвідношення між величинами $\sum_{i=1}^{m} a_i$ та $\sum_{j=1}^{n} b_j$ можуть бути різними: якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то ТЗ називається транспортною задачею закритого типу, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ – відкритого типу). Потрібно скласти такий план перевезення продукції, щоб потреби кожного джерела та приймача були за можливістю задоволені і при цьому загальна вартість перевезення продукції була мінімальною. Розв'язок будемо шукати у вигляді матриці $x = \{x_{ij}\}_{m\times n}$, де x_{ij} – кількість одиниць продукції, що перевозиться від i-го джерела до j-го приймача. Тоді задачу можна сформулювати таким чином (для визначеності розглянемо задачу відкритого типу, у якій $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сукупна кількість продукції у джерелах не перевищує сукупних потреб приймачів).

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \forall i = \overline{1,m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, \ \forall j = \overline{1,n}; \\ x_{ij} \geq 0, \ \forall\, i = \overline{1,m}, \ \forall\, j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (15)$$

Розглянемо транспортну задачу у нечіткій постановці. Якщо коефіцієнти цільової функції $\tilde{c}_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ є нечіткими величинами, функції належності яких є кусково-лінійними, величини a_i, $i = \overline{1,m}$ та b_j, $j = \overline{1,n}$ є детермінованими, то задача (18) зводиться до задачі (1) і розв'язується за допомогою алгоритму В. Якщо до того ж величини попиту та пропозиції $\tilde{a}_i$, $i = \overline{1,m}$ та $\tilde{b}_j$, $j = \overline{1,n}$ є нечіткими, то задача (15) перетворюється на задачу типу С. Розглянемо наступну постановку НЧТЗ.

Нехай у задачі (15) коефіцієнти цільової функції $\tilde{c}_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ та величини $\tilde{a}_i$, $i = \overline{1,m}$ та $\tilde{b}_j$, $j = \overline{1,n}$ є нечіткими трикутними величинами, функції належності яких:

$$\mu_{c_{ij}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \alpha_{ij}}{\beta_{ij} - \alpha_{ij}}, \text{ якщо } x \in [\alpha_{ij}; \beta_{ij}]; \\ \dfrac{\gamma_{ij} - x}{\gamma_{ij} - \beta_{ij}}, \text{ якщо } x \in [\beta_{ij}; \gamma_{ij}]; \\ 0, \text{ в іншому разі.} \end{cases} \qquad (16)$$

$$\mu_{a_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \alpha_i^{a}}{\beta_i^{a} - \alpha_i^{a}}, \text{ якщо } x \in [\alpha_i^{a}; \beta_i^{a}]; \\ \dfrac{\gamma_i^{a} - x}{\gamma_i^{a} - \beta_i^{a}}, \text{ якщо } x \in [\beta_i^{a}; \gamma_i^{a}]; \\ 0, \text{ в іншому разі.} \end{cases} \qquad (17)$$

$$\mu_{b_j}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \alpha_j^{b}}{\beta_j^{b} - \alpha_j^{b}}, \text{ якщо } x \in [\alpha_j^{b}; \beta_j^{b}]; \\ \dfrac{\gamma_j^{b} - x}{\gamma_j^{b} - \beta_j^{b}}, \text{ якщо } x \in [\beta_j^{b}; \gamma_j^{b}]; \\ 0, \text{ в іншому разі.} \end{cases} \qquad (18)$$

Нехай $(x_{ij}^{*})_{m\times n}$ – оптимальний розв'язок задачі:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \beta_i^{a}, \ \forall i = \overline{1,m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \beta_j^{b}, \ \forall j = \overline{1,n}; \\ x_{ij} \geq 0, \ \forall\, i = \overline{1,m}, \ \forall\, j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (19)$$

Для довільного α-переріза: $\alpha = p$ будемо шукати розв'язок задачі (15)–(18) у вигляді:

$$(\tilde{x}_{ij})_{m\times n} = (x_{ij}^{*})_{m\times n} + (1-p)(y_{ij})_{m\times n}. \qquad (20)$$

Тоді (15)–(18) перетворюється на задачу:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}\left(x_{ij}^{*} + (1-p)y_{ij}\right) \to \min;$$

$$\begin{cases} p\beta_i^{\,a}+(1-p)\alpha_i^{\,a}\le\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}^{\,*}+(1-p)\sum\limits_{j=1}^{n}y_{ij}\le \\ \qquad \le p\beta_i^{\,a}+(1-p)\gamma_i^{\,a},\ \forall i=\overline{1,m}; \\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}^{\,*}+(1-p)\sum\limits_{i=1}^{m}y_{ij}\le p\beta_i^{\,b}+(1-p)\alpha_i^{\,b}, \\ \qquad \forall j=\overline{1,n}; \\ x_{ij}^{\,*}+(1-p)y_{ij}\ge 0,\ \forall i=\overline{1,m},\ \forall\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{21}$$

Оскільки $x_{ij}^{\,*}=const$ для $\forall\, i=\overline{1,m},\ \forall\ j=\overline{1,n}$, то задача (21) зводиться до задачі:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}y_{ij}\to\min$$

$$\begin{cases} p\beta_i^{a}+(1-p)\alpha_i^{a}\le\beta_i^{a}+(1-p)\sum\limits_{j=1}^{n}y_{ij}\le \\ \qquad \le p\beta_i^{a}+(1-p)\gamma_i^{a},\quad \forall i=\overline{1,m} \\ \beta_j^{\,b}+(1-p)\sum\limits_{i=1}^{m}y_{ij}\le p\beta_i^{b}+(1-p)\alpha_i^{b}, \\ \qquad \forall j=\overline{1,n} \\ (1-p)y_{ij}\ge -x_{ij}^{*},\quad \forall\quad i=\overline{1,m},\quad \forall\quad j=\overline{1,n} \end{cases}$$

Тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{ij}y_{ij}\to\min;$$

$$\begin{cases} \alpha_i^{\,a}-\beta_i^{\,a}\le\sum\limits_{j=1}^{n}y_{ij}\le\gamma_i^{\,a}-\beta_i^{\,a},\ \forall i=\overline{1,m}; \\ \sum\limits_{i=1}^{m}y_{ij}\le\alpha_i^{\,b}-\beta_i^{\,b},\ \ \forall j=\overline{1,n}; \\ (1-p)y_{ij}\ge -x_{ij}^{\,*},\ \forall i=\overline{1,m},\ \forall\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{22}$$

Розглянемо задачу (22) без останнього обмеження:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{ij}y_{ij}\to\min;$$

$$\begin{cases} \alpha_i^{a}-\beta_i^{a}\le\sum\limits_{j=1}^{n}y_{ij}\le\gamma_i^{a}-\beta_i^{a},\quad \forall i=\overline{1,m}; \\ \sum\limits_{i=1}^{m}y_{ij}\le\alpha_i^{b}-\beta_i^{b},\quad \forall j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{23}$$

Задача (23) не залежить від значення α - перерізу, має чіткі обмеження та нечіткі коефіцієнти цільової функції і може бути розв'язана за допомогою алгоритму В. В результаті отримаємо нечіткий розв'язок $\left(\widetilde{y}_{ij}^{*}\right)_{m\times n}$. Однак цей розв'язок може не задовольняти обмеження $(1-p)y_{ij}\ge -x_{ij}^{\,*},\ \forall\, i=\overline{1,m},\ \forall\ j=\overline{1,n}$, на яке ми не зважаємо у задачі (27). З цих міркувань для розв'язання НчТЗ (15)–(18) пропонуємо такий алгоритм.

Алгоритм В'

1. Знаходимо детермінований оптимальний розв'язок $\left(x_{ij}^{*}\right)_{m\times n}$ задачі (19).

2. Знаходимо оптимальний нечіткий розв'язок $\left(\widetilde{y}_{ij}^{*}\right)_{m\times n}$ задачі (23).

3. Якщо для

$$\forall\, i=\overline{1,m},\ \forall\ j=\overline{1,n},\ \forall\widetilde{y}_{ij}^{\,*}:\mu_{y_{ij}}\left(\widetilde{y}_{ij}^{*}\right)=p$$

виконується:

$$(1-p)\widetilde{y}_{ij}^{\,*}\ge -x_{ij}^{\,*},\ \ \forall p\in[0;1], \tag{24}$$

то переходимо на п.5.

4. Інакше – для кожної пари індексів $i\in(1,m)$ та $j\in(1,n)$, для якої

$$\exists p\in[0;1]\ \ (1-p)\widetilde{y}_{ij}^{\,*}\le -x_{ij}^{\,*},$$

додаємо до задачі (23) обмеження:

$$\widetilde{y}_{ij}^{\,*}\ge -x_{ij}^{\,*}. \tag{25}$$

Розв'язуємо задачу (23), (25).

5. Нечіткий оптимальний розв'язок $\left(x_{ij}^{*}\right)_{m\times n}$ задачі (15)–(18) будуємо таким чином:

$$\left(\widetilde{x}_{ij}^{*}\right)_{m\times n}=\left(x_{ij}^{*}\right)_{m\times n}+\left(1-p\right)\cdot\left(\widetilde{y}_{ij}^{*}\right)_{m\times n},$$

де p – значення функції належності відповідного розв'язку. Кінець.

Приклад 1. Маємо 2 джерела та 3 приймачі. Відомі нечіткі вартості транспортування одиниці продукції від кожного джерела до кожного приймача $\widetilde{c}_{ij},\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,3}$, об'єми продукції $a_i,\ i=\overline{1,2}$, що знаходяться у кожному джерелі та об'єми продукції $b_j,\ j=\overline{1,3}$, які бажає прийняти кожен приймач (нечіткі трикутні величини позначаємо за зразком (14)):

$$C = \begin{array}{ccccc} & (1,4,2) & (1,4,1) & (2,4,1) & b_j / a_i \\ & \left(\begin{array}{c} (1,4,2) \\ (2,6,1) \end{array} \right. & \begin{array}{c} (2,3,2) \\ (1,5,1) \end{array} & \left. \begin{array}{c} (1,2,1) \\ (1,4,1) \end{array} \right) & \begin{array}{c} (1,5,2) \\ (2,6,1) \end{array} \end{array}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді матриці $\tilde{x} = \{\tilde{x}_{ij}\}_{2\times 3}$, де $\tilde{x}_{ij}$ – кількість одиниць продукції, що перевозиться від i-го джерела до j-го приймача. Тоді задачу можна сформулювати таким чином:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\tilde{c}_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = \tilde{a}_i, \quad \forall i=\overline{1,2}; \\ \sum_{i=1}^{2} x_{ij} \le \tilde{b}_j, \quad \forall j=\overline{1,3}; \\ \tilde{x}_{ij} \ge 0, \quad \forall \quad i=\overline{1,2}, \quad \forall \quad j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

Застосуємо до задачі алгоритм B'.

1. Знаходимо детермінований оптимальний розв'язок $(x_{ij}^*)_{m\times n}$ задачі:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = \beta_i^a, \quad \forall i=\overline{1,2}; \\ \sum_{i=1}^{2} x_{ij} \le \beta_j^b, \quad \forall j=\overline{1,3}; \\ x_{ij} \ge 0, \quad \forall \quad i=\overline{1,2}, \quad \forall \quad j=\overline{1,3}, \end{cases}$$

де

$$(\beta_{ij})_{2\times 3} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \end{array} & \beta_j^b / \beta_i^a \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

$$(x_{ij}^*)_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Знаходимо оптимальний нечіткий розв'язок $(\tilde{y}_{ij}^*)_{m\times n}$ задачі:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\tilde{c}_{ij}y_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \alpha_i^a - \beta_i^a \le \sum_{j=1}^{3} y_{ij} \le \gamma_i^a - \beta_i^a, \ \forall i=\overline{1,2}; \\ \sum_{i=1}^{2} y_{ij} \le \alpha_i^b - \beta_i^b, \ \forall j=\overline{1,3}. \end{cases} \quad (26)$$

Цільова функція не обмежена на допустимій множині розв'язків.

4. Додаємо до задачі (26) обмеження:

$$\tilde{y}_{ij}^* \ge -x_{ij}^* \quad \forall i=\overline{1,2}, \ \forall j=\overline{1,3}.$$

Розв'язуємо задачу:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\tilde{c}_{ij}y_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \alpha_i^a - \beta_i^a \le \sum_{j=1}^{3} y_{ij} \le \gamma_i^a - \beta_i^a, \quad \forall i=\overline{1,2}; \\ \sum_{i=1}^{2} y_{ij} \le \alpha_i^b - \beta_i^b, \quad \forall j=\overline{1,3}; \\ \tilde{y}_{ij}^* \ge -x_{ij}^* \quad \forall \quad i=\overline{1,2}, \quad \forall \quad j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

Застосуємо до задачі алгоритм B.

1. Знайдемо детерміновані оптимальні розв'язки задач, отриманих із даної задачі при коефіцієнтах цільової функції, що відповідають нульовим та одиничним значенням відповідних функцій належності.

Оптимальний розв'язок даної задачі при коефіцієнтах: $\tilde{c}_{ij} = \alpha_{ij}$:

$$(y_{ij}^{\alpha})_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -3 & 1,5 & 0,5 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Оптимальний розв'язок даної задачі при коефіцієнтах: $\tilde{c}_{ij} = \beta_{ij}$:

$$(y_{ij}^{\beta})_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -2,75 & 1 & 0,75 \\ 1,75 & -2 & -1,75 \end{pmatrix}.$$

Оптимальний розв'язок даної задачі при коефіцієнтах: $\tilde{c}_{ij} = \gamma_{ij}$:

$$(y_{ij}^{\gamma})_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Отримані розв'язки попарно нерівні. Отже, знаходимо величини $p_{\alpha\beta}$ та $p_{\beta\gamma}$ за формулами (9), (10) та (12), (13) відповідно

$$M_{\alpha\beta} = 2; \quad p_{\alpha\beta} = \frac{1}{1+M_{\alpha\beta}} = \frac{1}{3};$$

$$M_{\beta\gamma} = \frac{4}{9}; \quad p_{\beta\gamma} = \frac{1}{1+M_{\beta\gamma}} = \frac{9}{13}.$$

3. Отже, оптимальний розв'язок даної задачі є нечіткою величиною і функція залежності оптимального розв'язку від значень функцій належності вхідних даних має вигляд (рис. 3):

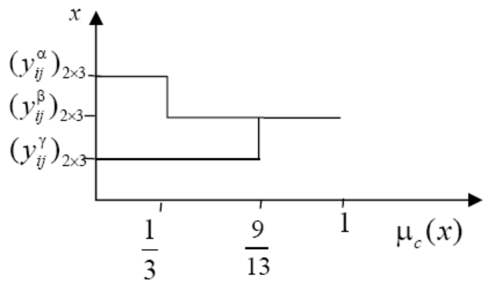

Рис. 3. Функція залежності оптимального розв'язку прикладу 1 від значень функцій належності вхідних даних

5. Нечіткий оптимальний розв'язок задачі $\left(\tilde{x}_{ij}^*\right)_{2\times3}$ будуємо таким чином:

$$\left(\tilde{x}_{ij}^*\right)_{2\times3} = \left(x_{ij}^*\right)_{2\times3} + (1-p)\cdot\left(\tilde{y}_{ij}^*\right)_{2\times3},$$

де p – значення функції належності відповідного розв'язку. Тобто лівостороння функція залежності нечіткого оптимального розв'язку від значення функції належності вхідних даних:

$$\left(\tilde{x}_{ij}^*\right)_{2\times3} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 3p & 3,5-1,5p & (1-p)\cdot 0,5 \\ (1-p)\cdot 2 & 2p & 2+2p \end{pmatrix}, \\ \qquad \text{якщо} \quad p \in \left[0, \frac{1}{3}\right]; \\ \begin{pmatrix} 0,25+2,75p & 3-p & (1-p)\cdot 0,75 \\ (1-p)\cdot 1,75 & 2p & 2,25+1,75p \end{pmatrix}, \\ \qquad \text{якщо} \quad p \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Правостороння функція залежності нечіткого оптимального розв'язку від значення функції належності вхідних даних:

$$\left(\tilde{x}_{ij}^*\right)_{2\times3} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 3p & 1+p & (1-p)\cdot 3 \\ (1-p)\cdot 2 & 2 & 4p \end{pmatrix}, \\ \qquad \text{якщо } p \in \left[0, \frac{9}{13}\right]; \\ \begin{pmatrix} 0,25+2,75p & 3-p & (1-p)\cdot 0,75 \\ (1-p)\cdot 1,75 & 2p & 2,25+1,75p \end{pmatrix}, \\ \qquad \text{якщо } p \in \left(\frac{9}{13}, 1\right]. \end{cases}$$

Для знайдених залежностей побудуємо функцію належності нечіткого оптимального розв'язку (рис. 4).

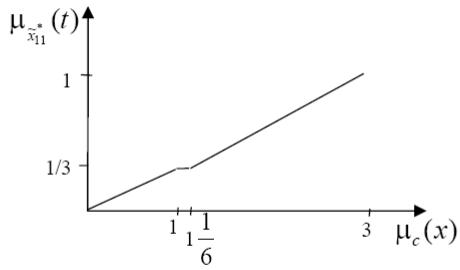

Рис. 4. Функція належності нечіткого оптимального розв'язку $\tilde{x}_{11}^*$

Наприклад, для $\tilde{x}_{11}^*$:

$$\mu_{\tilde{x}_{11}^*}(t) = \begin{cases} \frac{t}{3}, & \text{якщо} \quad t \in [0,1]; \\ \frac{t-0,25}{2,75}, & \text{якщо} \quad t \in \left[1\frac{1}{6}, 3\right]. \end{cases}$$

Висновки

Досліджено проблеми планування з використанням нечітких аналогів моделей задач лінійного програмування. Виділено основні види моделей задач НЧЛП залежно від властивостей цільових функцій і обмежень (детерміновані або нечіткі функції). Розроблено методи розв'язання нечітких аналогів транспортної задачі. Розглянуті приклади планування свідчать про ефективність запропонованих методів та алгоритмів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Згуровский М. З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования. – К.: Вища шк.,1990. – С. 151–186.
2. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. – М.: Советское радио, 1974. – 400 с.
3. Алексеев О. Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

Надійшла до редколегії 09.11.2006.