

А. С. РАСПОПОВ (ДИИТ)

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ РАСЧЕТА ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК И РАМ

Досліджено можливості застосування логічних моделей та асоційованих матриць до розрахунку згинально-крутильних коливань нерозрізних балок та рам з розподіленими параметрами. Отримані матриці враховують різні сполучення пружних закріплень та наявність зосереджених мас.

Исследованы возможности применения логических моделей и ассоциированных матриц к расчету изгибно-крутильных колебаний неразрезных балок и рам с распределенными параметрами. Полученные матрицы учитывают различные сочетания упругих закреплений и наличие сосредоточенных масс.

The suitability logic models and associable matrixes to calculation flexural-torsion oscillations of continuous beam with distribution parameters are researched. The inferential matrixes to consider various combination of elastic constraints and given localized masses.

Одновременно изгибные и крутильные колебания возникают в рамных конструкциях и в системах пересекающихся балок. Их также следует учитывать при изучении вибраций мостов, имеющих несимметричное поперечное сечение и эксцентриситет приложения нагрузки. Оба вида колебаний могут вызвать появление автоколебательных движений, создающих опасные перемещения и напряжения в конструкциях [1, 2]. Однако, решение задачи о совместных колебаниях в точной постановке представляет значительные трудности, что приводит либо к использованию приближенных методов и расчетных схем, либо к изучению тех или других видов колебаний в отдельности [2, 3].

Рассмотрим прямолинейную n -пролетную балку с кусочно-непрерывными характеристиками и однородными граничными условиями. Сечения элементов, погонная масса μ_i , жесткости при кручении GJ_k , изгибе EJ в пределах каждого из пролетов считается постоянными. Ось x направлена вдоль оси балки.

Для i -го участка балки, совершающего одновременно изгибные колебания в направлении оси y и крутильные колебания вокруг оси x количество начальных (НП) и конечных (КП) граничных параметров будет равно шести: углы поворота сечения φ_x, φ_z вокруг осей x, z , соответственно, крутящий и изгибающий моменты M_x, M_z , линейное перемещение u_y и поперечная сила N_y .

Зависимость между параметрами НП и КП на границах i -го участка балки определяется равенством [4]:

$$\mathfrak{P}_{i+1} = M_B \mathfrak{P}_i, \quad (1)$$

где M_B – матрица влияния начальных параметров; \mathfrak{P}_i и \mathfrak{P}_{i+1} – векторы граничных параметров в i -м и $i+1$ сечениях балки; $\mathfrak{P}_{i,i+1} = \{\varphi_x, u_y, \varphi_z, M_z, N_y, M_x\}_{i,i+1}$.

Матрицу M_B можно представить в виде:

$$M_B = \begin{pmatrix} \cos \lambda_k & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \lambda_k \sin \lambda_k \\ 0 & S & \frac{\lambda_n V}{l} & \frac{EJ \lambda_n^2 U}{l^2} & \frac{EJ \lambda_n^3 T}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{l}{\lambda_n} T & S & \frac{EJ \lambda_n V}{l} & \frac{EJ \lambda_n^2 U}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{EJ \lambda_n^2} U & \frac{l}{EJ \lambda_n} T & S & \frac{\lambda_n V}{l} & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{EJ \lambda_n^3} V & \frac{l^2}{EJ \lambda_n^2} U & \frac{l}{\lambda_n} T & S & 0 \\ \frac{1}{\beta \lambda_k} \sin \lambda_k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \lambda_k \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где S, T, U, V – круговые и гиперболические функции А. Крылова [5]; $\lambda_{\kappa}^2 = \frac{J_{xi}\omega_j^2 l_i^2}{GJ_{\kappa i}}$,

$\lambda_n^4 = \frac{\mu_i \omega_j^2 l_i^4}{EJ_i}$ – частотные параметры, соответ-

ственно, для крутильных и изгибных колебаний; $\beta_i = \frac{GJ_{\kappa i}}{l_i}$; l_i – длина i -го пролета балки;

J_{xi} – погонный момент инерции массы балки относительно ее продольной оси; ω_j – круговая частота j -й формы колебаний.

С учетом положений [6; 8], совокупность состояний граничных параметров отдельного стержня при изгибно-крутильных колебаниях может быть выражена булевыми функциями шести переменных, определяющими коды его граничных условий. В общем случае, возможным состояниям концов стержня из равного количества фиксированных $\{0\}$ и произвольных $\{1\}$ граничных параметров соответствуют частотные определители из миноров 3-го порядка матрицы M_B , которые могут быть представлены в составе ассоциированной блочной матрицы $M_i^{нк}$ с

кодами НП и КП для угловых перемещений φ_x и крутящих моментов M_x .

$$M_i^{нк} = \begin{array}{c|cc} & \text{01} & \text{10} \\ \hline \text{10} & \left\| \begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right\| & \\ \hline \text{01} & & \end{array} \quad (3)$$

Подматрицы блочной матрицы $M_i^{нк}$ имеют вид:

$$M_{11} = \cos \lambda_{\kappa} M_{1001}; \quad M_{12} = -\beta \lambda_{\kappa} \sin \lambda_{\kappa} M_{1010};$$

$$M_{21} = \frac{1}{\beta \lambda_{\kappa}} \sin \lambda_{\kappa} M_{0101}; \quad M_{22} = \cos \lambda_{\kappa} M_{0110}, \quad (4)$$

где $M_{1001}, \dots, M_{0110}$ – ассоциированные матрицы изгибных колебаний стержня [6] с комбинациями всех значений булевых функций на множествах $\{0,0,1,1\}$, $\{1,1,0,0\}$ и с индексами кодов НП и КП $\{0,1\}$ и $\{1,0\}$ – для крутильных колебаний. Матрицы в подматрицах $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ будут отличаться только значениями кодов НП и КП для φ_x и M_x . Так, например, матрицу M_{22} можно представить следующим образом (табл. 1).

Таблица 1

КП \ НП	100110	101010	101100	110010	110100	111000
011001	\bar{E}	$-\frac{EJ\lambda_n}{l} A$	$-\frac{EJ\lambda_n^2}{l^2} F$	$-\frac{EJ\lambda_n^2}{l^2} H$	$-\frac{EJ\lambda_n^3}{l^3} C$	$\frac{(EJ)^2 \lambda_n^4}{l^4} G$
010101	$\frac{l}{EJ\lambda_n} C$	D	$-\frac{\lambda_n}{l} A$	$-\frac{\lambda_n}{l} A$	$-\frac{\lambda_n^2}{l^2} B$	$-\frac{EJ\lambda_n^3}{l^3} C$
010011	$\frac{l^2}{EJ\lambda_n^2} H$	$\frac{l}{\lambda_n} C$	\bar{E}	$-G$	$-\frac{\lambda_n}{l} A$	$-\frac{EJ\lambda_n^2}{l^2} F$
001101	$\frac{l^2}{EJ\lambda_n^2} F$	$\frac{l}{\lambda_n} C$	$-G$	\bar{E}	$-\frac{\lambda_n}{l} A$	$-\frac{EJ\lambda_n^2}{l^2} H$
001011	$\frac{l^3}{EJ\lambda_n^3} A$	$\frac{l^2}{\lambda_n^2} B$	$\frac{l}{\lambda_n} C$	$\frac{l}{\lambda_n} C$	D	$-\frac{EJ\lambda_n}{l} A$
000111	$\frac{l^4}{(EJ)^2 \lambda_n^4} G$	$\frac{l^3}{EJ\lambda_n^3} A$	$\frac{l^2}{EJ\lambda_n^2} H$	$\frac{l^2}{EJ\lambda_n^2} F$	$\frac{l}{EJ\lambda_n} C$	\bar{E}

Значение $\cos \lambda_{\kappa}$ представляет общий множитель матрицы M_{0110} . Функции A, \dots, H являются функциями В. Прагера и определяются выражениями [5] с учетом следующих соотношений:

$$A = \frac{1}{2} B(\lambda); \quad C = \frac{1}{2} A(\lambda); \quad B = \frac{1}{2} S_1(\lambda);$$

$$D = \frac{1}{2} C(\lambda); \quad F = H = \frac{1}{2} B;$$

$$G = \frac{1}{2}(1-D); \quad \bar{E} = \frac{1}{2}(1+D).$$

$$V_1 \prod_{i=2}^{n-1} M_i^{\text{нк}} V_n = 0, \quad (5)$$

Таким образом, матрица $M_i^{\text{нк}}$ характеризует 36×4 возможных состояний стержня и комбинаций его граничных условий. Каждый элемент такой матрицы представляет произведение соответствующих элементов ассоциированных матриц для чисто изгибных и чисто крутильных колебаний.

По аналогии [6; 8], уравнение частот для цепной стержневой системы можно представить в виде равенства нулю последовательного произведения ассоциированных матриц каждого из n участков системы, т. е.

где V_1 и V_n – векторы возможных состояний 1-го и n -го участков.

Примером совместных колебаний может служить рамная конструкция, в которой крутильные колебания стержней неизбежно сопровождаются изгибными колебаниями рамы из ее плоскости. Рассмотрим симметричные изгибно-крутильные колебания прямоугольной рамы со стойками одинаковой жесткости и соответствующую ей логическую схему в виде последовательно связанных конечных автоматов (рисунок).

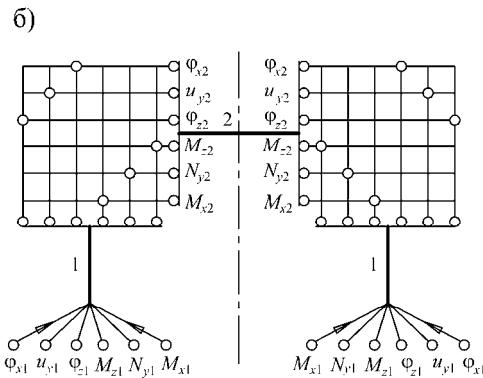
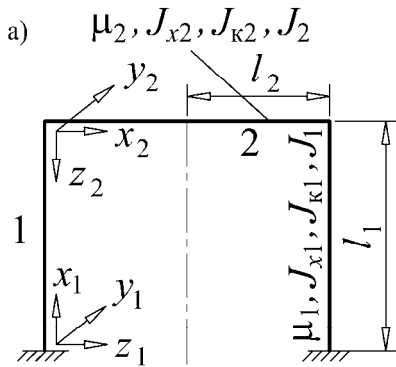


Рис.

Каждому состоянию автомата соответствует набор детерминантных функций отдельных стержней ((4), табл. 1), для определения которых составим таблицу переходов (табл. 2), обозначив сопрягаемые элементы одноименными латинскими буквами, чем зафиксировано наличие между ними логического отношения отрицания. Коды НП и КП, а также значения силовых (С) и кинематических (К) параметров расположены соответственно в верхней и нижней частях таблицы. Зададим граничные условия началу стержней-стоек 1 в виде заделки (код 000111), а середине ригеля 2 – в виде произвольных значений φ_x , u_y , M_z и фиксированных φ_z , N_y , M_x для обеспечения симметричных колебаний рамы (код 010101). Для обратносимметричных форм колебаний КП стержня 2 будут определяться кодом 001011.

Однозначное соответствие кодов НП и КП табл. 2 и элементов матрицы $M_i^{\text{нк}}$ позволяет непосредственно записать трансцендентное уравнение частот:

$$\begin{aligned} & \cos \lambda_{k1} \bar{E}_1 \frac{1}{\beta_2 \lambda_{k2}} \sin \lambda_{k2} \frac{l_2}{EJ_2 \lambda_{n2}} C_2 + \\ & + \cos \lambda_{k1} \frac{l_1^4}{(EJ_1)^2 \lambda_{n1}^4} G_1 \cos \lambda_{k2} \frac{\lambda_{n2}^2}{l_2^2} B_2 + \\ & + \frac{1}{\beta_1 \lambda_{k1}} \sin \lambda_{k1} \bar{E}_1 \frac{1}{\beta_2 \lambda_{k2}} \sin \lambda_{k2} D_2 + \\ & + \frac{1}{\beta_1 \lambda_{k1}} \sin \lambda_{k1} \frac{l_1^4}{(EJ_1)^2 \lambda_{n1}^4} G_1 \cos \lambda_{k2} \frac{EJ_2 \lambda_{n2}^3}{l_2^3} C_2 - \\ & - \cos \lambda_{k1} \frac{l_1}{EJ_1 \lambda_{n1}} C_1 \cos \lambda_{k2} \frac{l_2}{EJ_2 \lambda_{n2}} C_2 - \\ & - \cos \lambda_{k1} \frac{l_1^3}{EJ_1 \lambda_{n1}^3} A_1 \frac{1}{\beta_2 \lambda_{k2}} \sin \lambda_{k2} \frac{\lambda_{n2}^2}{l_2^2} B_2 - \\ & - \frac{1}{\beta_1 \lambda_{k1}} \sin \lambda_{k1} \frac{l_1}{EJ_1 \lambda_{n1}} C_1 \cos \lambda_{k2} D_2 - \frac{1}{\beta_1 \lambda_{k1}} \sin \lambda_{k1} \times \\ & \times \frac{l_1^3}{EJ_1 \lambda_{n1}^3} A_1 \frac{1}{\beta_2 \lambda_{k2}} \sin \lambda_{k2} \frac{EJ_2 \lambda_{n2}^3}{l_2^3} C_2 = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Таблица 2

№№ стержней и состояний системы			1	2	1	2	3	4	5	6	7	8		
					12	12	12	12	12	12	12	12	12	
Коды грани- чных усло- вий	НП	К	0	<i>c</i>	00	01	00	01	01	00	01	00		
			0	<i>b</i>	00	01	00	01	00	01	00	01	01	
			0	<i>a</i>	00	00	01	01	00	00	00	01	01	
		1	<i>f</i>	11	11	10	10	11	11	11	10	10		
		1	<i>e</i>	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	
		1	<i>d</i>	11	10	11	10	10	10	11	10	11	11	
	КП	К	<i>a</i>	0	10	10	00	00	10	10	00	00	00	
			<i>b</i>	1	11	01	11	01	11	01	11	01	11	01
			<i>c</i>	0	10	00	10	00	00	10	00	00	10	10
			<i>d</i>	1	01	11	01	11	11	11	01	11	01	01
		С	<i>e</i>	0	00	10	00	10	00	10	00	10	00	10
			<i>f</i>	1	01	01	11	11	11	01	01	11	11	11

После преобразований приходим к уравнению

$$\frac{E_1 - f_2 \operatorname{ctg} \lambda_{\kappa 2} C_1}{A_1 - f_2 \operatorname{ctg} \lambda_{\kappa 2} G_1} - \frac{\alpha_1 (C_2 + f_1 \operatorname{ctg} \lambda_{\kappa 1} B_2)}{\alpha_2 (D_2 + f_1 \operatorname{ctg} \lambda_{\kappa 1} C_2)} = 0, \quad (7)$$

где $f_1 = \frac{\beta_1 \lambda_{\kappa 1} l_2}{E J_2 \lambda_{\kappa 2}}$; $f_2 = \frac{\beta_2 \lambda_{\kappa 2} l_2}{E J_1 \lambda_{\kappa 1}}$; $\alpha_1 = \frac{l_1^3}{E J_1 \lambda_{\kappa 1}^3}$;

$$\alpha_2 = \frac{l_2^3}{E J_2 \lambda_{\kappa 2}^3}.$$

Путем предельных переходов можно получить уравнения для различных видов колебаний системы. Так, предполагая наличие только крутильных колебаний ригеля ($E J_2 \rightarrow \infty$; $\lambda_{\kappa 2} \rightarrow 0$) и изгибных колебаний стоек ($G J_{\kappa 1} \rightarrow \infty$; $\lambda_{\kappa 1} \rightarrow 0$), приходим к уравнению

$$A_1 - f_2 \operatorname{ctg} \lambda_{\kappa 2} G_1 = 0. \quad (8)$$

Если считать, что стержни 1, 2 не подвержены крутильным колебаниям ($G J_{\kappa 1}, G J_{\kappa 2} \rightarrow \infty$), т. е. происходят только изгибные колебания ригеля и стоек из плоскости рамы ($\lambda_{\kappa 1}, \lambda_{\kappa 2} \rightarrow 0$), уравнение (6) приводится к виду

$$\alpha_2 \frac{C_1}{G_1} - \alpha_1 \frac{B_2}{C_2} = 0. \quad (9)$$

Практический интерес представляет случай, когда можно пренебречь массами стоек по отношению к массе ригеля, что равнозначно колебаниям ригеля с упругими связями относи-

тельно угловых перемещений вокруг осей x_2 , z_2 и линейных перемещений в направлении оси y_2 . Обозначив, соответственно, жесткости эквивалентных упругих связей через $q_x = \frac{E J_1}{l_1}$,

$$q_z = \frac{G J_{\kappa 1}}{l_1}; c_y = \frac{12 E J_1}{l_1^3},$$

$$\left(\cos \lambda_{\kappa 2} - q_x \frac{1}{\beta_2 \lambda_{\kappa 2}} \sin \lambda_{\kappa 2} \right) \left(\frac{E J_2 \lambda_{\kappa 2}^3}{l_2^3} C_2 - c_y D_2 + q_z \frac{\lambda_{\kappa 2}^2}{l_2^2} B_2 - c_y q_z \frac{l_2}{E J_2 \lambda_{\kappa 2}} C_2 \right) = 0, \quad (10)$$

которое распадается на два независимых уравнения – для крутильных и изгибных колебаний ригеля с упругими связями. Если в узлах рамы дополнительно расположены сосредоточенные грузы массой m , то вместо q_x, q_z, c_y необходимо подставить соответственно $q_x - J_{xm} \omega^2, q_z - J_{zm} \omega^2, m \omega^2 - c_y$, где J_{xm}, J_{zm} – моменты инерции сосредоточенного груза относительно осей x, z .

В общем случае, массово-инерционную матрицу M'_i сосредоточенного груза с учетом его инерции вращения при изгибе и кручении можно получить из матрицы (2), если принять при $l_i \rightarrow 0$, $\mu_i l_i = m_i, J_{xi} l_i = J_{xm}$. Запишем M'_i с учетом опирания i -го сечения балки на упругую опору относительно поперечных и угловых перемещений:

$$M'_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_x - J_{xm}\omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & m_i\omega^2 - c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_z - J_{zm}\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Соответствующая переходная матрица M_{B1} участка балки с распределенной и сосредоточенной массами и наличием упругих связей определяется соотношением [4]

$$M_{B1} = M'_i M_B, \quad (12)$$

или, в развернутом виде, при отсутствии сосредоточенного груза.

$$M_{B1} = \begin{vmatrix} \cos\lambda_k + q_x \frac{1}{\beta\lambda_k} \sin\lambda_k & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta\lambda_k \sin\lambda_k + q_x \cos\lambda_k \\ 0 & S + c_y \frac{l^3}{EJ\lambda_n^3} V & \frac{\lambda_n V}{l} + c_y \frac{l^2}{EJ\lambda_n^2} U & \frac{EJ\lambda_n^2}{l^2} U + c_y \frac{l}{\lambda_n} T & \frac{EJ\lambda_n^3}{l^3} T + c_y S & 0 \\ 0 & \frac{l}{\lambda_n} T + q_z \frac{l^2}{EJ\lambda_n^2} U & S + q_z \frac{l}{EJ\lambda_n} T & \frac{EJ\lambda_n}{l} V + q_z S & \frac{EJ\lambda_n^2}{l^2} U + q_z \frac{\lambda_n}{l} V & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{EJ\lambda_n^2} U & \frac{l}{EJ\lambda_n} T & S & \frac{\lambda_n}{l} V & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{EJ\lambda_n^3} V & \frac{l^2}{EJ\lambda_n^2} U & \frac{l}{\lambda_n} T & S & 0 \\ \frac{1}{\beta\lambda_k} \sin\lambda_k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\lambda_k \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Раскрывая частотные определители из миноров 3-го порядка матрицы M_{B1} и записывая их в порядке логического следования кодов НП и КП, приходим к блочной матрице $M_i^{нк}$ (3) с подматрицами

$$M_{11} = \left(\cos\lambda_k + (q_x - J_{xm}\omega^2) \frac{1}{\beta\lambda_k} \sin\lambda_k \right) M_{1001};$$

$$M_{12} = \left(-\beta\lambda_k \sin\lambda_k + (q_x - J_{xm}\omega^2) \cos\lambda_k \right) M_{1010};$$

$$M_{21} = \frac{1}{\beta\lambda_k} \sin\lambda_k M_{0101}; \quad M_{22} = \cos\lambda_k M_{0110}; \quad (14)$$

Структура ассоциированных матриц $M_{1001}, \dots, M_{0110}$ соответствует матрице [7] для

изгибных колебаний участка континуальной балки при наличии опоры, упругой относительно поперечных и угловых перемещений, и сосредоточенной массы. Так, например, подматрица M_{11} при отсутствии сосредоточенного груза и с учетом обозначений [7] имеет вид

$$M_{11} = \left(\cos\lambda_k + q_x \frac{1}{\beta\lambda_k} \sin\lambda_k \right) \times$$

$$\times \left[M + c_y \left(M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)} \right) + \right.$$

$$\left. + q_z \left(M_{1010}^{(1)} + M_{0011}^{(5)} \right) + c_y q_z M_{0011}^{(1)} \right]. \quad (15)$$

Таким образом, и в случае изгибно-крутильных колебаний ассоциированные матрицы и логические модели дают возможность в

простой и компактной форме получать разрешающие уравнения для неразрезных балок и рам. Предлагаемая форма учета упругих связей и сосредоточенных масс позволяет избежать дополнительных решений и введения специальных матриц перехода с большим числом нулевых элементов. Отпадает также необходимость выполнения обычных процедур построения систем алгебраических уравнений и их определителей. Полученные зависимости могут быть использованы для расчета изгибно-крутильных колебаний ортогональных систем пересекающихся балок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бойцов Г. В. Справочник по строительной механике корабля: В 3 т. Т. 3: Динамика и устойчивость корпусных конструкций / Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. - Л.: Судостроение, 1982. - 320 с.
2. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. - М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
3. Новацкий В. Динамика сооружений. - М.: Госстройиздат, 1963. - 376 с.
4. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем: Справочник. - М.: Машиностроение, 1981. - 183 с.
5. Ананьев И. В. Табулированные значения комбинаций круговых и гиперболических функций / И. В. Ананьев, Н. И. Егоршева. - М.: Машиностроение, 1974. - 320 с.
6. Распопов А. С. Применение логических моделей к расчету колебаний неразрезных мостовых конструкций // 6th International Conference «Modern Building Materials, Structures and Techniques» (19-21 May 1999, Vilnius, Lithuania) // Proceedings. - Vol.III.-Vilnius: Technika, 1999, pp. 223-228.
7. Распопов А. С. Колебания континуальных балок с промежуточными опорами. Вісник Дніпропетр. нац. ун-та залізн. трансп. імені акад. В. Лазаряна. Вип. 9. – Д.: ДИИТ, 2005. - С. 199-202.
8. Эйхе Г. Н. Особенности структуры уравнений частот и форм установившихся колебаний рамных мостов и других плоских ортогональных стержневых систем // Вопросы статики и динамики мостов: Межвуз. сб. науч. тр. / Днепропетр. ин-т инж. ж.-д. трансп. – Д., 1987. - С. 83-84.

Поступила в редколлегию: 31.07.2007.