УДК 517.518.2

В. В. СКАЛОЗУБ, Л. А. ПАНИК (ДИИТ)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПОТОКОВЫХ ЗАДАЧ С НЕОДНОРОДНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

В представленной статье выполнен анализ потоков, когда единицы потока имеют индивидуальные свойства (неоднородности).

У представленій статті виконаний аналіз потоків, коли одиниці потоку мають індивідуальні властивості (неоднорідності).

The analysis of streams is executed when units of stream have individual characteristics (heterogeneity) in the represented article.

Введение

При изучении характеристик транспортных и других сетей возникает необходимость в вычислении оптимального значения функции потока, протекающего от источника s к стоку t. Часто такие расчеты проводятся в задачах, связанных с однопродуктовым потоком. Здесь потоки в дугах сети соответствуют передаче некоторого однородного продукта: электроэнергии, воды, информации, денежной массы и т. п. На сетях могут быть сформулированы различные задачи [1] (о кратчайшем пути, о максимальном разрезе, транспортная задача, и т.д.), характеризующие различные аспекты их работы.

Материал и результаты исследования

Рассмотрим модель задачи о максимальном потоке в сети. Пусть $G=(N,A)$ – ориентированная сеть, где N – множество узлов, A – множество дуг, а U_{ij} – пропускная способность дуги (i,j). Считаем, что узел s является источником, а узел t – стоком. Согласно [1], целочисленная функция f_{ij}, определенная на множестве A, называется потоком в сети G, если она удовлетворяет ограничениям:

$$\begin{cases} f_{ij} \geq 0 \, \forall (i,j) \in A, \\ \sum\limits_{j\in\alpha_i} f_{ij} - \sum\limits_{j\in\beta_i} f_{ji} = 0 \, \forall i \in N, i \neq s, i \neq t, \\ f_{ij} \geq U_{ij} \; \forall (i,j) \in A. \end{cases} \qquad (1)$$

В (1) β_i – множество всех узлов, связанных с узлом i дугами, направленными к i, α_i – множество всех узлов, связанных с i – дугами, направленными в противоположную сторону. Значение $\sum\limits_j f_{sj} = \sum\limits_j f_{jt} = V$ называется величиной потока.

В задаче о максимальном потоке требуется найти максимально допустимую величину V, на основе следующего:

$$\max V \qquad (2)$$

при условии, что

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = \begin{cases} V, & i = s, \\ 0, & i \neq s, i \neq t, \\ -V, & i = t. \end{cases} \qquad (3)$$

В уравнениях (1)-(3) суммирование производится по всем узлам, для которых функция f_{ij} определена.

Максимальный поток характеризует пропускную способность сети в целом для стационарного режима. При этом в классической модели [1] отдельные носители единиц потока не рассматриваются. Следовательно, не рассматриваются и траектории носителей потока от s к t. Такое представление соответствует предположению об однородности носителей, отсутствии у них каких-либо индивидуальных свойств. В [2, 3] сформулированы новые задачи исследования потоков для случаев, когда вводится в модель дифференциация носителей потока.

В представленной статье, продолжая [2, 3], выполнен анализ потоков, когда единицы потока имеют индивидуальные свойства. Такими их свойствами (неоднородностями носителей потока) могут быть: перемещение по известным маршрутам, ограничения на возможность совместного движения по дугам, задание определенной последовательности движения носителей, право собственности, то есть индивидуальные оценки качества и цели перемещения носителей, и др.

С учетом индивидуальных свойств единиц потока будем рассматривать три задачи:

1. Для известного потока на входе сети (известно общее число единиц потока поступающее в сеть за некоторый период). Для максимального потока необходимо определить множество возможных траектории, по которым мо-

гут передвигаться отдельные единицы потока.

2. Для объектов с заданным набором индивидуальных свойств необходимо определить максимальный поток в сети.

3. На множестве оптимальных траекторий рассчитать компромиссные варианты движения единиц потока с учетом выбранной системы оценок.

Рассмотрим первую из задач. Пусть t_i – количество единиц потока с i–м индивидуальным свойством, где $i = \overline{1,m}$. Тогда задача о траекториях максимального потока имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = V \tag{4}$$

при условии, что:

$$\sum_j \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^k - \sum_j \sum_{k=1}^{m} f_{ji}^k = \begin{cases} V, & i = s, \\ 0, & i \neq s, i \neq t, k = \overline{1,m} \\ -V, & i = t. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь V – величина потока. Отличие задачи (4)-(5) от задачи (1)-(3) заключается в наличии двойной суммы (внутренняя сумма берется по величинам потока с k-м индивидуальным свойством). Задача (4)-(5) будет иметь решение, если выполняется соотношение:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^k \leq U_{ij}, \text{ здесь } f_{ij}^k \leq t_k, \tag{6}$$

где U_{ij} – пропускная способность дуги (i,j) сети, f_{ij}^k – величина потока с k-м индивидуальным свойством по дуге (i,j), $k = \overline{1,m}$. Задача (4)-(5) не имеет решения если существуют дуги (i,j) на которых выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} f_{ij}^k > U_{ij}. \tag{7}$$

Для решение задачи (4)-(5) требуется также указать возможные траектории перемещения единиц потока по сети, общее число которых известно (максимально). Если ограничение (7) будет выполняться, то за некоторый период времени через сеть проходит меньше единиц потока, чем согласно (4).

Зная для некоторой дуги, число единиц потока протекающего по ней, выделяем возможные маршруты для каждой единицы потока на основе матричного метода представленного в работе [2, с. 62].

Во второй задаче надо найти максимальный поток в сети, в зависимости от пропускных способностей дуг при дополнительных ограничениях, обусловленных индивидуальными свойствами носителей. Исследуем зависимость величины максимального потока от ограничений, накладываемых набором индивидуальных свойств на следующих примерах. Рассмотрим задачу о максимальном потоке в сети с однородными носителями (рис. 1), и с индивидуальными свойствами носителей потока (рис. 2). Примем, что индивидуальным свойством является требование, согласно которому только 1 носитель должен перемещаться по траектории $1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 10$.

Для задачи (рис. 1) максимальный поток, рассчитанный согласно [1], равен 8, а для задачи рис. 2 он равен 5.

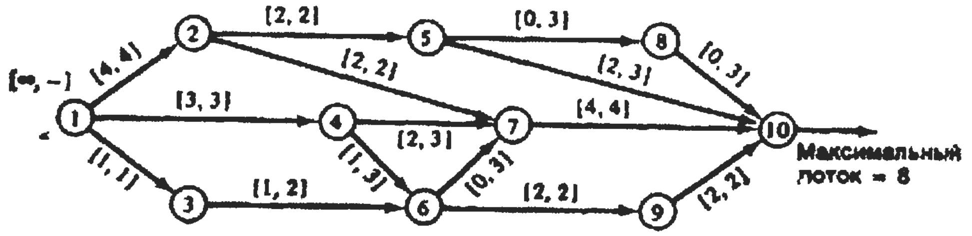

Рис. 1. Максимальный поток без индивидуальных свойств носителей

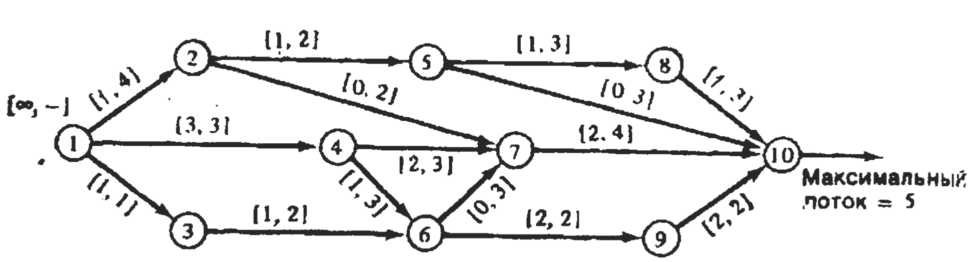

Рис. 2. Максимальный поток с индивидуальными свойствами носителей

Найдем все траектории носителей потока, заданной на рис. 1 сети, от источника (вершина 1) к стоку (вершина 10) по [2]. Присвоим этим траекториям числовые значения, которые, для определенности считаем ценами за перевозку одной единицы потока (в усл. ед.). Получим:

1) $1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 10$ цена за перевозку 7;
2) $1 \to 2 \to 5 \to 10$ цена за перевозку 6;
3) $1 \to 2 \to 7 \to 10$ цена за перевозку 8;
4) $1 \to 4 \to 7 \to 10$ цена за перевозку 5;
5) $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10$ цена за перевозку 9;
6) $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ цена за перевозку 4;
7) $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$ цена за перевозку 3;
8) $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$ цена за перевозку 1.

Для формулирования содержательной задачи компромиссного выбора на множествах траекторий носителей, введем еще одно индивидуальное свойство – право собственности. Далее, пусть есть три собственника, которым принадлежит следующее количество единиц потока: $m_1 = 3$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$. Найдем максиминную оценку эффективности потока с собственными свойствами носителей в виде [3] (принцип гарантированного результата):

$$F(s) = \max_{s} \min_{i \in [1,3]} \left(\frac{f_i(s) - f_i^-}{f_i^+ - f_i^-} \right), \qquad (8)$$

где s – распределение единиц потока в сети на рис.1, $f_i(s)$ – доход i – ого перевозчика при s – м распределении, f_i^+, f_i^- – наибольший и наименьший доход i – ого перевозчика.

Величины f_i^+, f_i^- вычисляются следующим образом. Значение $f_1^+ = 22$ усл. единиц (2 единицы потока этого перевозчика проследуют по пути $1 \to 2 \to 7 \to 10$, а одна единица потока по пути $1 \to 2 \to 5 \to 10$); $f_2^+ = f_1^+$ – так как у второго перевозчика такое же количество единиц потока, что и у первого; $f_3^+ = 16$ усл. единиц (2 единицы потока этого перевозчика проследуют по пути $1 \to 2 \to 7 \to 10$). Значение $f_1^- = 12$ усл. единиц (1 единица потока проследует по пути $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$, вторая по пути $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$, а третья по пути $1 \to 4 \to 7 \to 10$); $f_2^- = f_1^-$; $f_3^- = 7$ усл. единиц (1 единица потока проследует по пути $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$, вторая по пути $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$).

Рассмотрим распределение единиц потока s_1 по траекториям сети представленной на рис. 1:

1) $1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 10$ – проследует 0 ед. потока;
2) $1 \to 2 \to 5 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 1–ого перевозчика;
3) $1 \to 2 \to 7 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 2–ого перевозчика;
4) $1 \to 4 \to 7 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 3-го перевозчика;
5) $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;
6) $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 1-го перевозчика;
7) $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 2-го перевозчика;
8) $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока.

Тогда согласно (8), имеем: для 1-го перевозчика: $F_{11} = \frac{4}{10}$; для 2-го перевозчика: $F_{12} = \frac{7}{10}$; для 3–ого перевозчика: $F_{13} = \frac{3}{9}$;

$$F_1(s_1) = \min\left(\frac{4}{10}, \frac{7}{10}, \frac{3}{9}\right) = \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим распределение единиц потока s_2 по траекториям той же сети:

1) $1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;
2) $1 \to 2 \to 5 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 3-го перевозчика;
3) $1 \to 2 \to 7 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 2–ого перевозчика;
4) $1 \to 4 \to 7 \to 10$ – проследует 1 единица потока 1-го перевозчика и 1 единица потока 2-го перевозчика;
5) $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;
6) $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 1–ого перевозчика;
7) $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 1–ого перевозчика;
8) $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока.

Тогда согласно (8): для 1–ого перевозчика: $F_{21} = 0$; для 2-го перевозчика: $F_{22} = \frac{9}{10}$; для 3-го перевозчика: $F_{23} = \frac{5}{9}$;

$$F_2(s_2) = \min\left(0, \frac{9}{10}, \frac{5}{9}\right) = 0..$$

Аналогичным образом, продолжим перебор других вариантов распределений s_i единиц потока по траекториям сети. Каждый из вариантов распределений формируется с помощью перестановок единиц потока, участвующих в получении оптимального (максимального) потока. Исходя из этого получим окончательную оценку:

$$F(s^*) = \max(F_1(s_1), F_2(s_2), \ldots) = \frac{1}{3},$$

где s^* – распределение единиц потока такого вида:

1) $1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;

2) $1 \to 2 \to 5 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 1-го перевозчика;

3) $1 \to 2 \to 7 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 2-го перевозчика;

4) $1 \to 4 \to 7 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 3-зго перевозчика;

5) $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;

6) $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 1-го перевозчика;

7) $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 2-го перевозчика;

8) $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока.

Рассмотрим сеть на рис. 2, у которой максимальный поток равен 5. Так как количество единиц носителей у перевозчиков потока осталось то же (8), $F(s^*)$ будет зависеть от всевозможных сочетаний единиц потока на оптимальных траекториях C_8^5. При этом, если рассматривать лишь 5 носителей, могут быть найдены распределения, которые увеличивают $F(s)$, по сравнению с задачей с однородными (по всем 8) носителями. Например, если возьмем $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, то $F(s^*) = \frac{2}{5}$, где s^* – распределение носителей потока вида:

1) $1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 10$ – проследует 1 единица потока 1–ого перевозчика;

2) $1 \to 2 \to 5 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;

3) $1 \to 2 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;

4) $1 \to 4 \to 7 \to 10$ – проследует 1 единица потока 2-го перевозчика и 1 единица потока 3-го перевозчика;

5) $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;

6) $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 1–ого перевозчика;

7) $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 1-го перевозчика;

8) $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока.

Вместе с тем могут быть распределения носителей по траекториям, которые уменьшают значение $F(s)$. Например, если мы возьмем $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, то $F(s^*) = \frac{1}{4}$, где s^* – распределение единиц потока такого вида:

1) $1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 10$ – проследует 1 единица потока 2-го перевозчика;

2) $1 \to 2 \to 5 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;

3) $1 \to 2 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;

4) $1 \to 4 \to 7 \to 10$ – проследует 2 единицы потока 1-го перевозчика;

5) $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока;

6) $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 3-го перевозчика;

7) $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$ – проследует 1 единица потока 2-го перевозчика;

8) $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$ – проследует 0 единиц потока.

Анализ примера показывает, что компромиссно–оптимальные максимальные оценки потоков из носителей, имеющих индивидуальные свойства, зависят от некоторых дополнительных условий – соглашений между участниками перевозок. В частности, здесь такое соглашение состоит в том, что некоторые элементы не участвуют в перевозках. А значит, не получают «прибыли». Естественно, остальные участники должны им компенсировать это, передав определенную часть прибыли. В качестве механизма распределения прибыли с учетом интересов всех участников (перевозчиков) может быть модели игр с побочными платежами [4]. Согласно нее в перевозках участвуют те элементы, которые обеспечивают максимальную суммарную прибыль. Полученный доход после реализации решения (вне рамок модели) распределяется между всеми участниками заранее установленным способом.

Выводы

Показано, что в потоковых задачах с учетом индивидуальных свойств носителей существенно не только значение потока, но и траектории описываемые единицами потока. С учетом характеристик элементов потока на различных траекториях, выделен класс новых компромиссных задач о потоках в сетях.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Филлипс Д. И. Методы анализа сетей / Д. И. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. – М.: Мир, 1984. – С. 496.
2. Нечипуренко В. И. Структурный анализ систем. - М.: «Советское радио». 1977. – С. 212.
3. Гермеер Ю. Б.. Введение в теорию исследования операций. - М.: Наука. 1976. – С. 352.
4. Бутрим Б. И. Игры N лиц с существенным множеством критериев. Журнал «Вычислительная математика и матфизика». № 2. 1980.

Поступила в редакцию 01.11.2007.