УДК 625.1:51.001.57

В. В. ЛАГУТА (ДИИТ)

НЕПРЕРЫВНЫЙ КОНТРОЛЬ СДВИЖЕК В ЗАДАЧЕ АВТОМАТИЗАЦИИ РАСЧЕТА ВЫПРАВКИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КРИВЫХ

Наведено чисельний метод розв'язання диференціального рівняння здвигів, який дозволяє обчислити величини здвигів в будь-якій точці залізничної кривої при проведенні її виправки. Здвиги, обчисленні між точками виміру стріл вигибу, можуть бути використані як контрольні.

Приводится численный метод решения дифференциального уравнения сдвижек, позволяющий вычислять величины сдвижек в любой точке железнодорожной кривой при проведении ее выправки. Сдвижки, вычисленные между точками измерения стрел изгиба, могут быть использованы как контрольные.

The numerical method of solution of a differential equation of railway shifts is presented allowing to calculate the quantity of shifts in any point of a railway curve during its straightening. Shifts calculated between the points of measurement of bend arrows can be used as control ones.

Ритмичная, безаварийная работа железнодорожного транспорта зависит от технического состояния пути, его положения в плане. Решение задачи проектирования выправки железнодорожного пути имеет важное практическое значение для текущего содержания, в связи с этим проводятся исследования и предлагаются различные методики расчета.

Весомый вклад в развитие методов расчета выправки кривых принадлежит В. И. Ангелейко, В. Б. Бредюку, А. В. Гавриленкову, И. В. Гоникбергу, Б. Н. Евдаеву, Д. Г. Ковтуну, П. Г. Козийчуку, И. П. Корженевичу, А. А. Лебедеву, А. И. Проценко, Е. М. Рапопорту, Н. Г. Ренгачу, И. Я. Туровскому, А. П. Шутову из зарубежных ученых и инженеров можно назвать Dobrovolski B., Degorski T., Ellis D., Hull H. A., Kellie A. C., Moriyama T., Rodwan A. E., Rajaram B., Rao M. S., Sitko S. и др. Среди последних изысканий в решении этой проблемы следует отметить работы А. Я. Когана и С. В. Петуховского [1, 2], Л. Маркса [3], Г. Г. Орлова [4].

Среди методов расчета сдвижек для проектных кривых можно указать такие: методы, использующие сглаживающие функции; усредняющие методы; методы, использующие аппарат приближения функций; методы, использующие аппарат теории вероятностей; методы, использующие аппарат математического программирования; смешанные методы.

Натурная кривая рассматривается для некоторого интервала железнодорожного пути $s \in [0, l]$, $s-$ длина кривой. Предполагается, что проектная кривая получается из натурной кривой с помощью сдвижек $u(s)$ по нормалям натурной.

В [5] приводится вывод точного дифференциального уравнения сдвижек на основе аппарата теории кривых

$$u''(s) = K_g(s)\left(1 + u(s)K_g(s) - \frac{K_p\left[\left(1+u(s)K_g(s)\right)^2 - u'^2(s)\right]^{\frac{3}{2}} - u'(s)\left(2u'K_g(s) + u(s)K_g{}'(s)\right)}{1 + u(s)K_g(s)}\right) \quad (1)$$

Из точного дифференциального уравнения сдвижек получено приближенное дифференциальное уравнение сдвижек, которое имеет вид

$$u''(u,u') = K_g - K_p + \left(K_g^2 - 2K_gK_p\right)u + 0 \cdot u' +$$

$$+\frac{1}{2}\left[-2K_g^2\cdot K_p\cdot u^2+\left(4K_g-3K_p\right)u'^2+2K_g'u\cdot u'\right]+o\left(u^2,u'^2\right), \quad (2)$$

где $K_g(s)$ − кривизна натурной кривой, $K_p(s)$ − кривизна проектной кривой. Из уравнения (2) получается еще одно приближенное дифференциальное уравнение сдвижек

$$u''-\left(K_g^2-2K_gK_p\right)u-\left(K_g-K_p\right)=0, \quad (3)$$

которое предлагается использовать в случаях, когда традиционное уравнение сдвижек

$$u''=K_g-K_p \quad (4)$$

не обеспечивает необходимую точность вычислений. Уравнения (1), (2) являются нелинейными, в этом состоит сложность решения поставленной задачи даже численными методами. Уравнения (3), (4) – линейные, для таких типов уравнений существуют весьма эффективные методы.

При проведении выправки железнодорожной кривой в основном руководствуются расчетными величинами сдвижек в местах измерения стрел изгиба. Величины сдвижек между точками измерений обычно не рассчитываются и во время проведения выправки не контролируются. Надо ли проводить этот контроль или не надо? Автор этот вопрос не оспаривает. На этот счет никаких рекомендаций в инструкциях по содержанию пути не говорится.

Последние факты введения скоростного пассажирского движения (Киев – Днепропетровск, Киев – Харьков, Днепропетровск – Донецк) говорят о том, что необходимость в качественном содержании пути актуально существует. Как известно, при высоких скоростях движения путь расстраивается интенсивней, что с необходимостью приводит к повышенному вниманию относительно его содержания. В статье не рассматривается какой-либо вычислительный метод по определению рациональных величин сдвижек. Рассматривается только численный метод, позволяющий решать нелинейное дифференциальное уравнение сдвижек как первую краевую задачу. Решение данной задачи позволяет определить величины сдвижек в любой точке железнодорожной кривой, если известны ее натурная и проектная кривизна. Полностью численный метод описан в статьях [6, 7]. Решение основывается на аппроксимации линейным сплайном второй производной сдвижки на интервале железнодорожной кривой.

Пусть известны кривизна натурной кривой и кривизна проектной кривой. Правую часть уравнения (1), равно как уравнений (2), (3), (4), обозначим через $f(u,u',s)$, где s − длина кривой от начальной точки измерения (выправки), u − величина сдвижки в точке s, u' − производная от величины сдвижки в точке s.

Для определения сдвижек рассматривается первая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с однородными граничными условиями

$$u''=f(s,u,u'),\ u(a)=0,\ u(b)=0. \quad (5)$$

Приближенное решение строится в классе функций C^3. Предполагается, что выполнены условия существования решения нелинейной краевой задачи [8], которое может быть получено последовательными приближениями

$$u_p''=f(s,u_{p-1},u_{p-1}'),\ p=1,2\ldots . \quad (6)$$

Каждое решение u_p должно удовлетворять краевым условиям (5). Предел последовательности решений u_p будет приближенным решением исходной задачи.

Отрезок интегрирования $[a,b]$ приводится заменой переменой $t=\dfrac{s-a}{b-a}$ к единичному интервалу $0\le t\le 1$. Функция $u(t)$ также должна удовлетворять однородным граничным условиям

$$u(0)=0,\ u(1)=0. \quad (7)$$

Вторая производная искомой функции $u''=f(t,u,u')$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией F, звенья которой соединяются в узлах сетки $\{t_i\}$ на отрезке [0, 1]. Приближенное решение в этом случае получается в виде кубического сплайна $\tilde{u}(t)$. Аналогичный подход реализован для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и описан в [9, 10].

На отрезке интегрирования вводится регулярная сетка $\{t_i\}$

$$t_i=i\cdot h,\ i=\overline{0,n}.$$

Вторая производная

$$u''=f(t,u_{p-1}(t),u_{p-1}'(t))$$

заменяется кусочно-линейной функцией с вершинами в узлах сетки t_i

$$F_i^p(t) = f_{i-1}^{p-1} + \frac{f_i^{p-1} - f_{i-1}^{p-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}),$$

$$t_{i-1} \le t \le t_i, \quad i = \overline{1,n},$$

где индекс p обозначает номер итерации (приближения) и $f_i^{p-1} = f(t_i, u_i^{p-1}, u_i'^{p-1})$, $u_i^{p-1} = u^{p-1}(t_i)$, $u_i'^{p-1} = u'^{p-1}(t_i)$, $p = 1, 2, \ldots$. Для отрезка $\left[t_{j-1}, t_j\right]$ получается следующее приближенное решение для узлов сетки [6]

$$u_i^p = (i-n)\frac{h^3}{6}\sum_{j=1}^{i}\left[(3j-2)f_{j-1}^{p-1} + (3j-1)f_j^{p-1}\right] -$$

$$-i\frac{h^3}{6}\sum_{j=i+1}^{n}\left[(3n-3j+2)f_{j-1}^{p-1} + (3n-3j+1)f_j^{p-1}\right], \; i = \overline{1,n-1}, \quad (8)$$

и

$$u_i'^p = \frac{h^2}{6}\sum_{j=1}^{i}\left[(3j-2)f_{j-1}^{p-1} + (3j-1)f_j^{p-1}\right] -$$

$$-\frac{h^2}{6}\sum_{j=i+1}^{n}\left[\left(3n-3j+2\right)f_{j-1}^{p-1} + \left(3n-3j+1\right)f_j^{p-1}\right], \; i = \overline{0,n}, \quad (9)$$

где $f_j^0 = f(t_j, u_j^0, u_j'^0)$, $u_j^0 = 0$, $u_j'^0 = 0$, $j = \overline{0,n}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Приближенное решение $\tilde{u}(t)$ для любой точки отрезка интегрирования $\left[0,\ 1\right]$ определяется следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = (t-1)\frac{h^3}{6}\sum_{\substack{j=1\\(i\ge1)}}^{i}\left[(3j-2)f_{j-1} + (3j-1)f_j\right] + (t-1)\int_{t_i}^{t}\xi F_i(\xi)d\xi + t\int_{t}^{t_{i-n}}(\xi-1)F_i(\xi)d\xi -$$

$$-t\frac{h^3}{6}\sum_{\substack{j=i+2\\(i<n-1)}}^{n}\left[(3n-3j+2)f_{j-1} + (3n-3j+1)f_j\right], \quad t_i \le t \le t_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (10)$$

Точность данного приближенного решения проанализирована в [7]. Погрешность для любой точки t решения (8, 10) составляет

$$\Delta u\left(t\right) = t\left(1-t\right)\frac{h^2}{6}\cdot 7\max_{0\le t\le 1}\left|f''\left(t\right)\right|,$$

учитывая линейное представление функции в окрестности точки t_i в форме Коши. Наибольшая погрешность определяется

$$\left|u(0.5) - \tilde{u}(0.5)\right| \le \max_{0\le t\le 1}\left|f''(t)\right|\cdot\frac{7}{24}h^2.$$

В граничных точках погрешность равна нулю вследствие выполнения граничных условий для точного и приближенного решений. При оценке разности точного и приближенного решения с помощью остаточного члена интерполяционного многочлена Лагранжа, получим

$$\left|u(t) - \tilde{u}(t)\right| \le \max_{0\le t\le 1}\left|f''(t)\right|\cdot\frac{h^4}{24}t(1-t).$$

Данная ошибка достигает наибольшего значения и оценивается как

$$\left|u(0.5) - \tilde{u}(0.5)\right| \le \max_{0\le t\le 1}\left|f''(t)\right|\cdot\frac{h^2}{96}.$$

На реальном примере покажем, как будут отличаться сдвижки, определённые из дифференциальных уравнений (1), (3), (4). Считаем, что заданы натурная кривизна K_g и проектная кривизна K_p. Натурная и проектная кривые заданы таблицей значений стрел. Исходные данные и результаты приближённого численного решения дифференциальных уравнений (1), (3), (4) представлены в табл.1.

Таблица 1

Результаты вычислений сдвижек соответствующие различным дифференциальным уравнениям

Номер точки	Стрелы		Сдвижки согласно дифференциального уравнения, (мм)		
	натурной кривой (мм)	проектной кривой (мм)	классического [уравнение (4)]	линейного [уравнение (3)]	Точного [уравнение (1)]
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	5.00	19.74	-4.91	-4.98	-4.98
2	39.00	39.47	-29.63	-29.77	-29.78
3	84.00	59.21	-51.63	-51.86	-51.88
4	54.00	78.95	-49.06	-49.39	-49.41
5	130.00	98.69	-61.04	-61.50	-61.53
6	80.00	99.10	-46.23	-46.79	-46.82
7	120.00	99.10	-39.60	-40.26	-40.29
8	95.00	91.09	-10.29	-11.00	-11.04
9	58.00	82.89	22.84	22.11	22.08
10	81.00	74.70	26.19	25.48	25.44
11	72.00	66.50	31.47	30.80	30.77
12	32.00	66.16	35.00	34.39	34.36
13	90.00	66.16	2.88	2.32	2.29
14	83.00	66.16	-3.23	-3.74	-3.77
15	32.00	66.16	9.67	9.22	9.18
16	82.00	66.16	-12.08	-12.48	-12.51
17	61.00	66.16	-25.83	-26.16	-26.20
18	80.00	66.16	-36.56	-36.83	-36.86
19	69.00	66.16	-29.62	-29.81	-29.84
20	63.00	66.16	-15.34	-15.43	-15.47
21	79.00	66.16	-0.05	-0.05	-0.08
22	40.00	66.16	22.59	22.69	22.66
23	71.00	62.07	17.13	17.33	17.30
24	59.00	57.01	15.22	15.51	15.48
25	48.00	51.96	17.62	18.00	17.97
26	44.00	46.90	14.44	14.87	14.86
27	40.00	45.90	4.58	5.09	5.07
28	55.00	45.90	-10.76	-10.18	-10.21
29	51.00	45.90	-14.24	-13.59	-13.61
30	40.00	45.90	-9.85	-9.13	-9.15
31	47.00	45.90	-11.27	-10.47	-10.49
32	49.00	45.90	-12.16	-11.27	-11.29
33	46.00	45.90	-8.52	-7.55	-7.56
34	42.00	45.90	-5.02	-3.95	-3.96
35	57.00	45.90	-2.99	-1.82	-1.83
36	44.00	45.90	11.91	13.18	13.17
37	34.00	45.25	24.00	25.37	25.36
38	37.00	36.07	20.38	21.85	21.84
39	30.00	26.89	15.27	16.83	16.82
40	12.00	17.71	12.71	14.35	14.35
41	9.00	8.53	3.72	5.44	5.43
42	7.00	0.00	-4.00	-2.22	-2.22
43	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Приближённое численное решение находилось предложенным методом [6], граничные условия выбирались однородными. Перед подстановкой в соответствующее дифференциальное уравнение кривизна натурной и проектной кривой определяются по значениям стрел. Между точками измерений проводится линейная интерполяция. При приближенном решении дифференциального уравнения сдвижек необходимо решить еще и задачу аппроксимации натурной кривизны $K_g(s)$ и проектной кривизны $K_p(s)$. В том случае, если кривизна проектной кривой выбрана геометрически правильной структуры, то для этой кривой задача аппроксимации отпадает (она уже предопределена линейной зависимостью). Аппроксимация как натурной кривизны, так и проектной зависимостью, отличной от линейной, например, приближение $K_g(s)$ и $K_p(s)$ параболическими сплайнами, приводит к появлению эффекта Гиббса в виде характерных колебательных процессов, отсутствующих у исходных функций. Наиболее это свойственно для участков железнодорожной кривой с очень медленно меняющейся кривизной, а также в местах сопряжения участков кривых различной структуры с явно присутствующими особенностями. Эффект Гиббса может привести к существенным ошибкам при определении величин сдвижек, особенно при аппроксимации прямых и круговых участков пути.

ВЫВОДЫ

Для контроля качества проведения выправки железнодорожной кривой можно использовать значения сдвижек в точках лежащих между точками измерения стрел изгиба. Значение сдвижек могут быть получены как решение первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (1), (3), (4), определяемое в соответствии с выражением (10).

В зависимости от вычислительных требований при определении сдвижек, можно пользоваться соответствующим дифференциальным уравнением.

При аппроксимации кривизны натурной и проектной кривых следует избегать эффекта Гиббса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коган А. Я. К вопросу о расчете положения пути в плане по стрелам несимметричной измерительной хорды / А. Я. Коган, С. В. Петуховский // Вестник ВНИИЖТ. – М. − 2002, № 1 – С. 26-29.
2. Коган А. Я. Расчет оптимальных сдвигов при выправке криволинейных участков пути / А. Я. Коган, С. В. Петуховский. // Вестник ВНИИЖТ. – М. − 2002, № 5.
3. Маркс Л. Измерение параметров пути с привязкой к системе глобального позиционирования // Железные дороги мира. – 2002, № 7. − С. 71-75.
4. Орлов Г. Г. Обоснование требований к точности специальной реперной сети для контроля профиля пути в плане и в профиле / Труды ЦНИИС. − М. −2001. – С. 62-75.
5. Лагута В. В. Совершенствование проектирования кривых железнодорожного пути в плане: Диссертация на соискание ученой степени к.т.н.: 05.22.06. – Д.: ДИИТ. − 2002. − 186 с.
6. Лагута В. В. Метод итерации решения первой краевой задачи с нелинейной правой частью / Д.: Вісник ДНУЗТ. − Вип. 18, 2007.
7. Лагута В. В. Погрешность приближенного решения первой краевой задачи с аппроксимацией второй производной линейным сплайном / Д.: Вісник ДНУЗТ. − Вип. 19, 2007.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. – М.: Наука. Д.: Вісник ДНУЗТ. − Вип. 18, 2007. 1976. – С.61-65.
9. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков – К.: Наук. думка – 1986. – С. 71-79, 84-94, 142-143, 148-152.
10. Мейнарович Е. В. О применении интерполяционных сплайнов к решению нелинейных интегральных уравнений Вольтерра / Е. В. Мейнарович, Р. В. Поляков, Л. Н. Шлепаков − В кн.: Линейные и нелинейные краевые задачи математической физики. – К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1974 – С.204-212.

Надійшла до редколегії 03.01.2008.