

## КОНЕЧНО-ГРАФОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

На основі лінійної теорії графів, метода початкових параметрів та асоційованих матриць запропонований універсальний аналітичний підхід до розрахунку вільних та вимушених коливань стержневих конструкцій. Показана формальна однозначна відповідність між структурою конструкції та структурою рівнянь, що отримані. Досліджені особливості представлення графу для моделювання сумісних коливань стержневих систем.

На основе линейной теории графов, метода начальных параметров и ассоциированных матриц предложен универсальный аналитический подход к расчету свободных и вынужденных колебаний стержневых конструкций. Показано формальное однозначное соответствие между структурой конструкции и структурой получаемых уравнений. Исследованы особенности представления графа для моделирования совместных колебаний стержневых систем.

On the basis of a linear graph theory, a method of initial parameters and associated matrices the universal analytical approach to calculation of free and forced vibrations of rod constructions is offered. A formal one-to-one correspondence between the structure of a construction and the structure of obtained equations is shown. Features of representation of the graph for modeling of joint vibrations of rod systems are researched.

Методы, используемые в теории графов, являются эффективным средством формализации современных инженерных задач, возникающих при изучении сложных механических систем. Так, бинарные отношения между различными подсистемами удобно выражать графами, а их описание проводить с помощью теории матриц. В этой связи представляет интерес исследование колебаний стержневых конструкций с помощью математических моделей, основанных на теории графов.

К настоящему времени имеется множество публикаций, посвященных приложениям линейной теории графов к различным техническим областям, например [1–5]. Применение топологических методов, элементов булевой алгебры, электромеханических аналогий приведены в работах [6–9]. В задачах статики графы использовали авторы [4, 10, 11], динамики – [3, 12, 13]. Наиболее полный обзор применения связанных графов можно найти в [14].

Целью данной статьи является построение конечно-графовых моделей для расчета свободных и вынужденных колебаний стержневых систем с распределенными параметрами.

Рассмотрим вначале свободные колебания одиночного призматического стержня постоянного сечения с одним заделанным и другим свободным концами (рис. 1). В последующем такой стержень будем называть оригинальным [10].

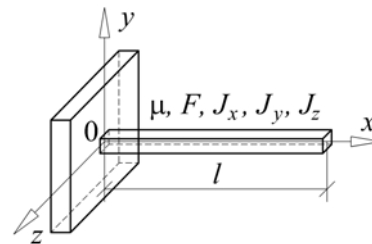


Рис. 1. Оригинальный консольный стержень

Представим каждый из видов колебаний стержня связным графом  $G = (V, E)$ , который состоит из множества вершин, включающих подмножества  $v_i, v_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), обозначающих начальные (НП) и конечные (КП) граничные параметры стержня, и ориентированных дуг  $e_s$ , направленных от одной вершины к другой.

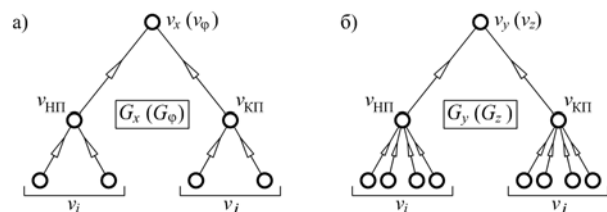


Рис. 2. Связные графы  $G_x (G_\phi)$  и  $G_y (G_z)$

На рис. 2 представлены графы в виде обратно ориентированных деревьев, моделирующих продольные (крутильные) колебания стержня

(рис. 2,а), а также изгибные (поперечные) колебания (рис. 2,б). Следуя [15], каждая вершина  $v_i, v_j$  может принимать либо фиксированное значение (0), либо произвольное (1). Таким образом, совокупность состояний  $n$  граничных параметров одного конца стержня выражается булевой функцией двух переменных для  $G_x, G_\varphi$  и четырех переменных для  $G_y, G_z$ . Соответственно, входные последовательности для  $v_{НП}, v_{КП}$  могут быть реализованы на множествах  $\{0,1\}$  – для  $G_x, G_\varphi$  и  $\{0,0,1,1\}$  – для  $G_y, G_z$ . Вершины  $v_x (v_\varphi)$  и  $v_y (v_z)$  образуют топологический код графа  $G$  [16] и состоят из набора кодов НП и КП стержня.

Задаваясь граничными условиями для однородных стержней [15, 17], можно составить топологический код графа  $G$  из одинакового количества произвольных и фиксированных параметров. К примеру, для консольного стержня (рис. 1) графы  $G_x (G_\varphi)$  и  $G_y (G_z)$  будут иметь вид (рис. 3).

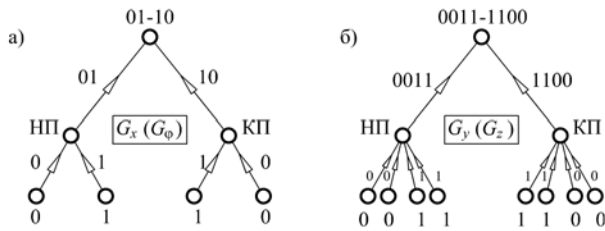


Рис. 3. Графы для консольного стержня

При изгибно-продольных колебаниях стержня (изгиб в плоскости  $xu$ ) количество начальных и концевых граничных параметров будет равно шести: перемещения  $u_x, u_y$  вдоль осей  $x, y$  соответственно, угол поворота сечения  $\varphi_z$ , изгибающий момент  $M_z$ , поперечная и продольная силы  $N_y, N_x$ . Следовательно, вершины  $v_i, v_j$  будут соответствовать параметрам  $\{u_x, u_y, \varphi_z, M_z, N_y, N_x\}$ . Аналогично, при изгибно-крутильных колебаниях стержня (изгиб в плоскости  $xz$ ) параметры будут следующими –  $\{\varphi_x, u_z, \varphi_y, M_y, N_z, M_x\}$ . Графы  $G_x, G_\varphi$  и  $G_y, G_z$  можно рассматривать как связанные подграфы графов  $GL$  и  $GT$ , характеризующих продольные (крутильные) и изгибные (поперечные) колебания. Графы  $GL (GT)$  для

совместных изгибно-продольных (изгибно-крутильных) колебаний представлены на рис. 4.

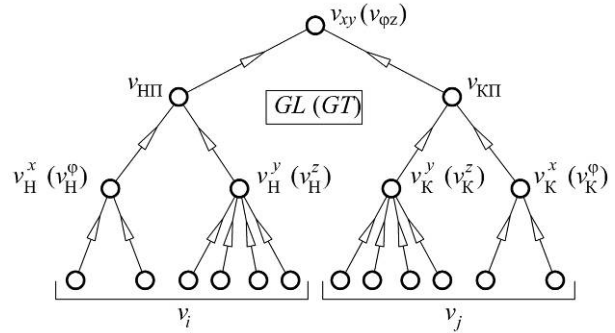


Рис. 4. Графы  $GL, GT$  для совместных колебаний стержня

Для рассмотренного выше примера (рис. 1) код НП будет состоять из набора 000111, КП – 111000. Топологический код графа  $GL (GT)$ , соответствующий вершине  $v_{xy} (v_{\varphi z})$ , равен 000111–111000.

В случае пространственных колебаний входные параметры стержня будут представлены  $n$  переменными для НП и  $n$  – для КП ( $n=12$ ): перемещения в направлении осей  $x, y, z$  –  $u_x, u_y, u_z$ , углами поворота сечения  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ , внутренними моментами  $M_x, M_y, M_z$  и силами  $N_x, N_y, N_z$ . Общее число вершин  $v_i, v_j$  и, следовательно, входных переменных, будет равно 24. Соответствующий граф  $GR$  изображен на рис. 5.

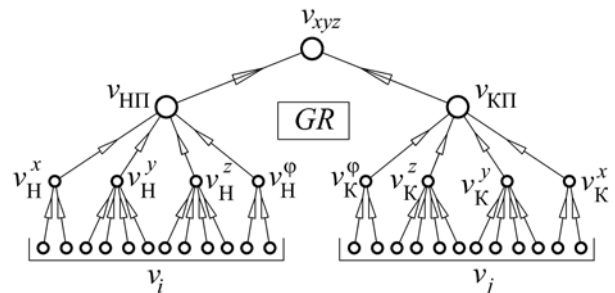


Рис. 5. Граф  $GR$  для пространственных колебаний стержня

Графы  $GR, GL$  и  $GT$  можно представить в более простой форме путем удаления смежных ребер, входящих в вершины  $v_{НП}, v_{КП}$ , и включением в них вершин  $(v_{Нx}^x, v_{Hy}^y, v_{Hz}^z, v_{Нφ}^\varphi)$  и  $(v_{Kφ}^\varphi, v_{Kz}^z, v_{Ky}^y, v_{Kx}^x)$ . Такая модель стержня более близко подходит его физическому изображению (рис. 6).

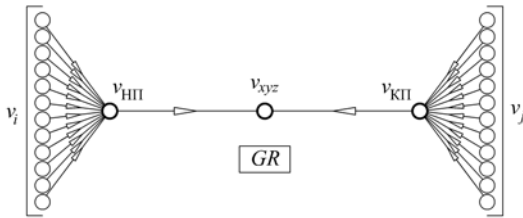


Рис. 6. Ориентированный граф  $GR$

Полустепени исхода  $d^+(v_i)$ ,  $d^+(v_j)$  вершин  $v_i$ ,  $v_j$ , а также  $d^+(v_{НП})$ ,  $d^+(v_{КП})$  полученных ориентированных графов (рис. 6) равны единице, а полустепени захода  $d^-(v_{НП})$ ,  $d^-(v_{КП})$  вершин  $v_{НП}$ ,  $v_{КП}$  – равны  $n$ . Вершины  $v_x$  ( $v_\phi$ ),  $v_y$  ( $v_z$ ),  $v_{xy}$  ( $v_{\phi z}$ ),  $v_{xyz}$  имеют нулевую полустепень исхода и являются точками сочленения графа  $G$ .

Набор входных переменных для НП (КП) графа  $GR$  можно представить следующей схемой (рис. 7). Верхняя часть схемы содержит кинематические (К), а нижняя – силовые (С) входные параметры.

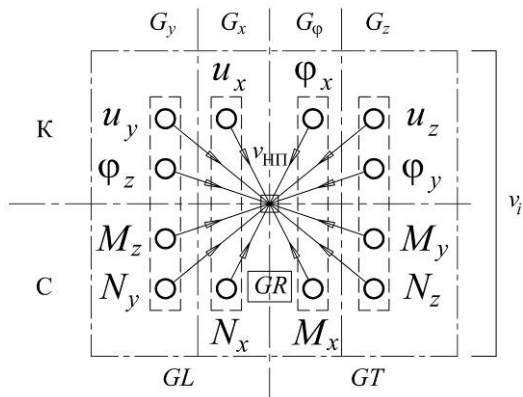


Рис. 7. Входные параметры графа  $GR$

Последующее преобразование графа  $G$  получается в результате снятия ориентации с дуг ориентированных графов (рис. 2, б). При этом несложно заметить (рис. 2, а), что последовательные ребра  $e=(v_{НП}, v_x)$  и  $e=(v_x, v_{КП})$ , инцидентные вершине  $v_x$  ( $v_\phi$ ), можно заменить одним ребром  $e_x$  ( $e_\phi$ )= $(v_{НП}, v_{КП})$ , удалив вершину  $v_x$  ( $v_\phi$ ). В результате такого слияния последовательности [2] ребро  $e_x$  ( $e_\phi$ ) будет нести полную информацию о топологическом коде графа  $G_x$  ( $G_\phi$ ). Аналогичным образом поступаем и для графов  $G_y$  ( $G_z$ ),  $GL$  ( $GT$ ) и  $GR$ , которые также будут простыми связными гра-

фами (рис. 8), топологически эквивалентными графам (рис. 2, б).

Полученные для отдельных видов колебаний графы отличаются только количеством вершин  $v_i$ ,  $v_j$  и смежных ребер  $e_i$ ,  $e_j$ , что дает возможность использовать их в различных сочетаниях при моделировании совместных колебаний стержня. Степени вершин  $v_i$ ,  $v_j$ , обозначаемые как  $d(v_i)$ ,  $d(v_j)$ , равны единице, а вершин  $v_{НП}$ ,  $v_{КП}$  –  $(n+1)$ . Соответственно порядок графов, представленных на рис. 8, равен  $2(n+1)$ . В общем случае граф  $G$  на  $2(n+1)$  вершинах и  $2n+1$  ребрах имеет одну компоненту  $k=1$ . Поэтому ранг  $\rho(G)$  графа  $G$  будет равен числу ребер  $2n+1$ , а цикломатическое число  $\mu(G)=0$ . Все графы являются связными ациклическими графами и имеют форму дерева [2].

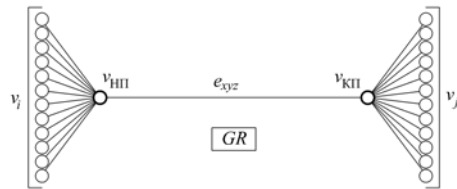


Рис. 8. Неориентированный граф  $GR$

Для каждого из графов  $G=(V, E)$  можно выполнить двудольное разбиение с разделением множества вершин  $V$  на два подмножества  $X$ ,  $Y$ , включающие начальные и конечные параметры стержня

$$X = \sum_{i=1}^n v_i + v_{НП}; Y = \sum_{j=1}^n v_j + v_{КП}. \quad (1)$$

Ребра  $e_i$ ,  $e_j$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) в двудольном графе  $G=(X, Y, E)$  являются независимыми и образуют максимальное паросочетание  $M$  в графах  $G_x$ ,  $G_\phi$ ,  $G_y$ ,  $G_z$ . Число паросочетания  $\alpha(G)$  графа  $G$  равно  $2n$ . Вершины  $v_i$ ,  $v_j$  являются концевыми и насыщенными, а паросочетание  $M$  – полным паросочетанием  $X$  с  $Y$ .

Определим матрицу достижимости  $M=[a_{ij}]$  графа  $G$  на  $n$  вершинах  $v_i$  и  $n$  вершинах  $v_j$  как  $n \times n$  (0,1)-матрицу, имеющую только нулевые и единичные элементы. Строки

матрицы  $M$  будут соответствовать НП стержня с вершинами  $v_i \in X$ , а столбцы – КП стержня с вершинами  $v_j \in Y$ . Тогда элементы  $a_{ij}$  определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in E; \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Другими словами, каждый элемент  $a_{ij}$  матрицы  $M$  равен 1 при условии, что существует ориентированный путь из вершины  $v_i$  в вершину  $v_j$ .

Так, матрицы  $M_x, M_\varphi$  и  $M_y, M_z$  графов  $G_x, G_\varphi$  и  $G_y, G_z$  будут матрицами второго и четвертого порядков с единичными элементами. Для графов  $GL, GT$  соответствующие матрицы  $M_{GL}, M_{GT}$  примут вид:

$$M_{GL} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{КП} \\ \text{НП} \end{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (2)$$

где  $X = \left\{ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ N_x & N_y & M_z & \varphi_z & u_y & u_x \end{matrix} \right\}$  для графа  $GL$  и

$X = \left\{ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ M_x & N_z & M_y & \varphi_y & u_z & \varphi_x \end{matrix} \right\}$  для графа  $GT$ .

Паросочетание графа  $GL$  состоит из двух паросочетаний  $M_x, M_y$  и содержит компоненты двух видов – для продольных и изгибных колебаний

$$M_{GL} = M_x \oplus M_y, \quad (3)$$

где  $M_x = \{e_{Н1}, e_{Н6}, e_{К1}, e_{К6}\}$ ,

$M_y = \{e_{Н2}, e_{Н3}, e_{Н4}, e_{Н5}, e_{К2}, e_{К3}, e_{К4}, e_{К5}\}$ .

Соответственно для графа  $GT$  можно записать

$$M_{GT} = M_\varphi \oplus M_z. \quad (4)$$

Кольцевая сумма графов  $G_x, G_y$  и  $G_\varphi, G_z$  представляет собой графы  $GL$  и  $GT$  (рис. 9)

$$G_x \oplus G_y = GL; G_\varphi + G_z = GT. \quad (5)$$

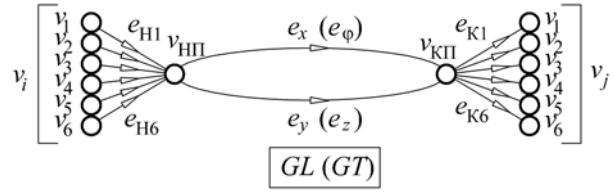


Рис. 9. Ориентированные графы  $GL$  и  $GT$

Если представить величины  $v_i, v_j$  как компоненты векторов  $V_{НП}, V_{КП}$ , то матрицу  $M$  можно рассматривать как матрицу влияния или переходную матрицу [18, 19], которая преобразует параметры оригинального стержня в сечении  $x=0$  (рис. 1) в параметры в сечении  $x=l$ . В этом случае каждый ненулевой элемент матрицы  $M$  будет иметь свой вес  $\omega_{ij}$ , выражаемый определенными функциями из уравнений метода начальных параметров в матричной форме

$$a_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij}, & \text{если } (v_i, v_j) \in E; \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases} \quad (5)$$

Значения  $\omega_{ij}$  соответствуют элементам матрицы влияния [19, 20], а зависимость между граничными НП и КП стержня в сечениях 0, 1 (рис. 1) определяется выражением

$$V_1 = M_1 V_0. \quad (6)$$

Таким образом, переменная, соответствующая вершине  $v_j$ , равна сумме произведений весов дуг, которые заходят в вершину  $v_j$  и переменных, соответствующих вершинам  $v_i$ , из которых эти дуги исходят.

Рассмотрим цепочку стержней с кусочно-постоянными характеристиками в виде логической схемы (рис. 10):

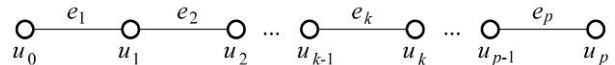


Рис. 10. Одномерная стержневая система

Тогда зависимость между граничными параметрами и их значениями в сечении  $p$  представляется с помощью цепочки матриц [17, 18]:

$$V_p = M_p M_{p-1} \dots M_1 V_0. \quad (7)$$

Следует заметить, что путь от одной вершины к другой может быть необязательно ориентированным от 0 к  $p$ . Возможна и обратная ориентация с учетом принятой системы координат и перемены знаков в элементах матрицы  $M$ . Поэтому, если между любыми смежными вершинами расположить по две противоположно ориентированные дуги, то можно рассматривать граф  $G$  как неориентированный граф, представляющий симметричное бинарное отношение  $R$  в виде  $v_i R v_j$  и  $v_j R v_i$ .

На рис. 11 представлен планарный граф  $GR$  и двойственный ему граф  $GR^*$ . Принцип теоретической двойственности используемых графов [10] позволяет более детально исследовать их структуру, исходя из подпространств циклов и разрезов графа  $G$ .

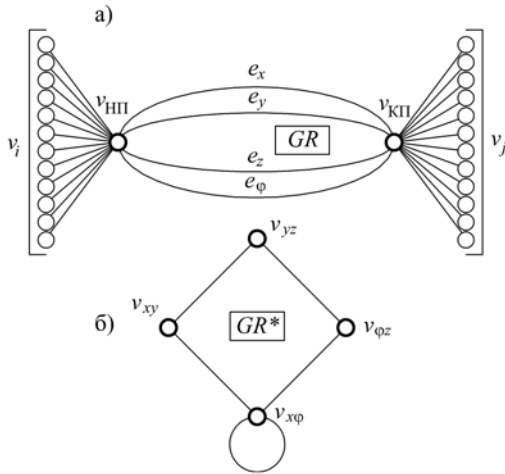


Рис. 11. Планарный и двойственный графы

Матрица достижимости  $M_{GR}$  графа  $GR$  имеет порядок  $n=12$  и определяется множеством параметров

$$X = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ N_x & M_x & N_y & M_z & N_z \\ M_y & \phi_y & u_z & \phi_z & u_y & \phi_x & u_x \end{Bmatrix}.$$

$$M_{GR} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{КП} \\ \text{НП} \end{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (8)$$

или, в сокращенной форме, через компоненты  $M_x, M_\phi, M_y, M_z$  и  $M_{GL}, M_{GT}$

$$M_{GR} = M_x \oplus M_\phi \oplus M_y \oplus M_z; \quad (9)$$

$$M_{GR} = M_{GL} \oplus M_{GT}. \quad (10)$$

Соответствующая матрице  $M_{GR}$  функциональная матрица влияния  $M_B$  приведена в работе [15]. Эти матрицы примечательны тем, что они дают базовое описание всех величин, характеризующих поведение колеблющегося стержня, из которого получают другие описания для отдельных видов колебаний путем удаления некоторых строк и столбцов матриц  $M_{GR}, M_B$ .

Связные подграфы  $G_x, G_\phi, G_y, G_z$  будут являться основными компонентами графа  $GR$ , для которого можно записать

$$GR = G_x \oplus G_\phi \oplus G_y \oplus G_z, \quad (11)$$

или

$$GR = GL \oplus GT. \quad (12)$$

Также отметим, что графы  $GL$  и  $GT$  (рис. 9) будут нести параллельные (циклические) ребра  $e_x, e_y$  и  $e_\phi, e_z$ , которые могут быть заменены одним ребром  $e_{xy}$  и  $e_{\phi z}$ . Соответственно для графа  $GR$  (рис. 11,а) параллельные ребра  $e_x, e_y, e_z, e_\phi$  можно заменить одним ребром  $e_{xyz}$ , инцидентным вершинам  $v_{НП}, v_{КП}$ . И в том и другом случае приходим к графу, представленному на рис. 8.

Следующим шагом является построение алгоритма определения топологического кода графа  $G$  и его идентификация с помощью ассоциированных матриц. Каждый элемент такой матрицы является выражением частотного определителя стержня при определенных входных параметрах  $v_i, v_j$ . Соответствующие определители состоят из миноров порядка  $k=n/2$ , порождаемых матрицей влияния начальных параметров  $M_B$  порядка  $n$ . Для графа  $GR$   $k=6$ ;  $GL, GT$   $k=3$ ;  $G_y, G_z$   $k=2$ ;  $G_x, G_\phi$   $k=1$ . Возможные комбинации кодов начальных и концевых граничных параметров стержня определяются в каждом конкретном случае с помощью таблиц переходов [15].

Ассоциированная блочная матрица  $M_{xyz}$  для пространственных колебаний стержня состоит из четырех подматриц, описывающих отдельные виды колебаний стержня, соответствующих компонентам графа  $GR$  и вершинам двойственного графа  $GR^*$ , который является удобным графическим представлением потока переменных в системе. При построении структуры матрицы  $M_{xyz}$  использовался каскадный алгоритм формирования ее блоков и кодирования состояний. Полученные матрицы кодов, ассоциированные матрицы, а также методика их использования для расчета свободных пространственных колебаний стержневых систем приведены в работе [15].

Для решения системы  $n$  неоднородных линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными начальными параметрами  $x_m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ), описывающих вынужденные колебания стержневой системы, можно применить теоретико-графовый метод, предложенный Коутсом и Мэзоном [2]. Однако, вместо используемых ими матриц смежности удобнее сразу же перейти через матрицы достижимости и влияния к ассоциированным матрицам с последующим определением значений  $x_m$  по правилу Крамера [22].

$$x_m = D_{zm} / D_z, \quad (13)$$

где  $D_z = |a_{im}|_1^n$  – определитель системы уравнений  $\sum_{m=1}^n a_{im} x_m = b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , составленный из коэффициентов левой части;  $D_{zm}$  – определитель, получаемый из  $D_z$  заменой элементов  $a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}$   $m$ -го столбца, соответствующего определяемому неизвестному, свободными членами  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , или

$$D_{zm} = \sum_{i=1}^n A_{im} b_i, \quad (14)$$

где  $A_{im}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{im}$  в определителе  $D_z$ .

Использование ассоциированных матриц позволяет значительно упростить процедуру формирования выражений  $D_z$  и  $D_{zm}$ . Так, для цепной стержневой системы (рис. 10) при периодическом внешнем воздействии выражение (13) можно представить в следующем виде:

$$x_k = \frac{W_1 \prod_{k=2}^{p-1} T_k W_p}{V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k V_p}, \quad (15)$$

где  $V_1, M_k, V_p$  и  $W_1, T_k, W_p$  – ассоциированные матрицы участков-стержней, характеризующих свободные и вынужденные колебания системы соответственно.

В целом, структура графов, моделирующих вынужденные колебания стержня, остается без изменений. Отличие заключается только лишь в кодах граничных параметров, которые находятся в состоянии силового или кинематического возмущения и параметров, которые подлежат вычислению. Такие параметры могут быть выражены функцией в виде двузначного предиката [6]. Если задано какое-либо возмущение в сечении стержня  $k$ , то предикат  $F(x_k)$  принимает значение 1, если возмущения нет – значение 0. И наоборот – для параметра, который подлежит вычислению, предикат  $F(x_k)$  принимает значение 0, если нет – 1.

В этом случае возможные комбинации кодов граничных условий на каждом из концов стержня могут содержать различное число фиксированных и произвольных параметров. Следовательно, входные последовательности НП, КП стержня могут быть также реализованы на множествах  $\{0,0,0,1\}$ ,  $\{1,1,1,0\}$  для графов  $G_y, G_z$  и  $\{0,1\}$  – для  $G_x, G_\phi$ . Следовательно, элементы ассоциированных матриц, соответствующих топологическому коду графа  $G$ , будут состоять из определителей миноров матрицы  $M_B$ , имеющих порядок  $k=8$  для графа  $GR$ ;  $k=4$  – для  $GL, GT$ ;  $k=3$  – для  $G_y, G_z$  и  $k=1$  – для  $G_x, G_\phi$ . Полученная таким образом блочная ассоциированная матрица  $R_{xyz}$  и ее подматрицы приведены в работе [21].

В заключение, можно сделать вывод о широких перспективах представления стержневых конструкций с помощью математических моделей, основанных на теории конечных графов. Сочетание комбинаторных методов и классических методов строительной механики позволяет формализовать и систематизировать динамический расчет, открывает альтернативную возможность к исследованию поведения таких систем. Следует также отметить высокую эффективность представления топологической

информации в терминах теории матриц и конечных множеств.

В дальнейших исследованиях предполагается использовать конечно-графовые модели в динамических расчетах стержневых и балочных конструкций с непрерывно-дискретными параметрами.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Басакер Р. Конечные графы и сети: Пер. с англ. / Р. Басакер, Т.Саати. – М.: Наука, 1973. – 368 с.
2. Свами М. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. / М. Свами, К. Тхуласираман – М.: Мир, 1984. – 455 с.
3. Maschke В. Geometrical Formulation of Bond Graph Dynamics with Application to Mechanism // J. Franklin Inst., v. 328, N 5-6. – 1991. – P. 723-740.
4. Brown Forbes T. Hamiltonian and Lagrangian bond graphs // J. Franklin Inst., v. 328, N 5-6. – 1991. – P. 809-831.
5. Karnopp D. An approach to derivative causality in bond graph models of mechanical systems // J. Franklin Inst., v. 329, N 1. – 1992. – P. 65-75.
6. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техника, 1967. – 212 с.
7. Эйхе Г. Н. Особенности структуры уравнений частот и форм установившихся колебаний рамных мостов и других плоских ортогональных стержневых систем // Вопросы статики и динамики мостов: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: ДИИТ, 1987. – С. 83-94.
8. Shai O. Design Through Common Graph Representations // Proc. of DETC'03 ASME 2003 Design Engin. Tech. Conf. – Chicago, Illinois, USA, 2003. – 10 pp.
9. Бобыльченко В. Ю. Определение собственных колебаний балок с сосредоточенными регулярными массами методом электромеханических аналогий / В. Ю. Бобыльченко, П. М. Чеголин // Рост. гос. акад. стр-ва, 1996. – 12 с.; Деп. в ВИНТИ 09.08.96, № 2652-В96.
10. Та'асе Н., Шай О. Graph theoretical duality perspective on conjugate structures and its applications // Eur. J. Mech. A, 2005. – 24, N 6. – P. 974-986.
11. Филин А. П. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. – Л.: Стройиздат, 1983. – 232 с.
12. Watanuki Kelichi. Automatic generation of equations of motion for mechanical system using linear graph theory. Application to mechanical vibration systems / Kelichi Watanuki, Hideyuki Ohtaki // Nihon kikai gakkai ronbunshu. C. = Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C., 1993. – 59, N 562. – P. 1960-1965.
13. McPhee J. J. On the Use of Linear Graph Theory in Multibody System Dynamics // Nonlinear Dynamics, 9. – 1996. – P. 73-90.
14. Montbrun-Di Filippo J. A survey of bond graphs: theory, applications and programs / J. Montbrun-Di Filippo, M. Delgrado // J. Franklin Inst., v. 328, N 5-6. – 1991. – P. 565-606.
15. Распопов А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций // Вестник Днепроп. нац. ун-та жел.-дор. тр-та. – Вып. 19. – Д.: ДНУЖТ, 2007. – С. 125-133.
16. Gheng-Ho Hsu. Topological Code of Graphs / Hsu Gheng-Ho, Lam Kin-Tak // J. Franklin Inst., v. 329. – 1992. – P. 99-109.
17. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем: Справочник. – М.: Машиностроение, 1981. – 183 с.
18. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
19. Распопов А. С. Изгибно-продольные колебания стержневых конструкций с распределенными параметрами // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. тр. – Вып. 43. – Д.: ПГАСА, 2007. – С. 413-421.
20. Распопов А. С. Совершенствование расчета изгибно-крутильных колебаний неразрезных балок и рам // Вестник Днепроп. нац. ун-та жел.-дор. тр-та. – Вып. 18. – Д.: ДНУЖТ, 2007. – С. 161-166.
21. Распопов А. С. Конечно-автоматное моделирование вынужденных колебаний недиссипативных стержневых систем // Опір матеріалів та теорія споруд: Наук.-техн. збірка / Київськ. нац. ун-т буд. та арх. (КНУБА). – Вып. 67. – К., 2007.
22. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Поступила в редколлегию 05.03.2008.