УДК 378.147
DOI: 10.32342/2522-4115-2020-2-20-16

Т.В. БІРЮКОВА,
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри біологічної фізики та медичної інформатики
Буковинського державного медичного університету (м. Чернівці)

Т.М. СУКАЧ,
кандидат педагогічних наук, доцент, викладач математики
Київського фахового коледжу комп'ютерних технологій та економіки
Національного авіаційного університету

І.М. ЯРОВИЙ,
кандидат економічних наук, заступник директора з навчальної роботи
Київського фахового коледжу комп'ютерних технологій та економіки
Національного авіаційного університету

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ФОРМУВАННІ ПРОФЕСІЙНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ У ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ТА ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

У статті розглянуто методичні та дидактичні аспекти формування професійних, математичних компетентностей здобувачів вищої та передвищої освіти при вивченні предмета «Математика» та дисципліни «Вища математика» студентами технічних та економічних спеціальностей коледжу КФКТЕ НАУ через розв'язування прикладних задач за допомогою диференціальних рівнянь, наведено приклади розв'язання задач для студентів технічного та економічного профілів навчання. Головним завданням вивчення курсу є застосування здобутих знань у задачах економіки, фізики, в різних галузях науки та господарства тощо. Основною метою викладання математики в коледжі вважаємо формування у студентів здатності до самостійного застосування засвоєних знань, науково-дослідницької роботи з дисципліни, а також, застосування здобутих знань до розв'язання завдань професійної спрямованості, практичного та прикладного характеру. Розв'язання задач прикладного характеру стимулює, вмотивовує студентів до вивчення предмета, підвищує зацікавленість у застосуванні набутих знань в майбутньому; підтверджує значущість набутих математичних компетентностей у професійної діяльності, подальшому саморозвитку особистості. Для викладачів математики вишу, коледжу, які працюють із студентами різних спеціальностей, напрямів, найбільш суттєвим є набуття студентами математичних вмінь застосовувати математичний апарат надалі в професійній діяльності в умовах жорсткої конкуренції на ринку праці.

Ключові слова: диференціальні рівняння, математична компетентність, прикладні задачі, практичні задачі, математична модель.

В статье рассмотрены методические и дидактические аспекты формирования профессиональных, математических компетентностей соискателей высшего образования и младших бакалавров при изучении предмета «Математика» и дисциплины «Высшая математика» студентами технических и экономических специальностей колледжа КПКТЕ НАУ через решение прикладных задач с помощью дифференциальных уравнений. Приведены примеры решения задач для студентов технического и экономического профилей обучения. Главной задачей изучения курса является использование приобретенных знаний в задачах экономики, физики, в разных сферах науки и практики. Основной целью преподавания математики в колледже считаем формирование у студентов способности к самостоятельному усвоению знаний, поисково-исследовательской работе по предмету, а также использование приобретенных знаний в решении задач профессиональной направленности, практического, прикладного характера. Решение задач прикладного характера стимулирует, мотивирует студентов к изучению предмета, повышает заинтересованность в использовании приобретенных знаний в будущем; подтверждает значимость приобретенных математических компетентностей в профессиональной деятельности, дальнейшем саморазвитии личности. Для преподавателей математики вуза, колледжа, которые работают со студентами разных специальностей, наиболее существенным является приобретение студентами математических умений использовать математический аппарат в дальнейшем в профессиональной деятельности в условиях жесткой конкуренции на рынке труда.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, математическая компетентность, прикладные задачи, практические задачи, математическая модель.

Постановка проблеми в загальному вигляді. Сучасні вимоги до математичної підготовки здобувачів передвищої, вищої освіти значно підвищують роль формування у студентів здатності до самостійного засвоєння знань, а також застосування здобутих знань до розв'язання завдань професійного спрямування, що, у свою чергу, вимагає від викладача пошуку і розроблення нових практичних матеріалів, спрямованих на розв'язання професійно орієнтованих задач для кожної спеціальності. Актуальним є питання формування у студентів різних напрямів загальних, математичних та професійних компетентностей засобами математики, що, у свою чергу, демонструє їх практичну значущість.

Основне завдання викладача полягає в тому, щоб студенти оволоділи не тільки теоретичним матеріалом з різних розділів математики, а й розуміли для чого вивчається вища математика, здобуті знання застосовували в практичній діяльності. Тому особливої важливості набувають мотивація до навчання, практична значущість здобутих знань. Саме прикладне спрямування сприяє формуванню наукового світогляду і свідчить про роль математики в сучасному виробництві, економіці, науці. Актуальними є питання щодо застосування математичного апарату, що вивчається в системі передвищої та вищої освіти до розв'язання прикладних задач, що, у свою чергу, демонструє їх практичне застосування.

Сучасна математика застосовується у різних галузях науки, підприємствах, сферах побуту, різних галузях знань через побудову та аналіз моделі явища, що вивчається. Математичні моделі реального процесу або об'єкта можуть бути подані у вигляді формули, рівнянь, графіка тощо. На практиці для опису перехідних процесів широко використовуються диференціальні рівняння.

На прикладі вивчення диференціальних рівнянь студентами різних спеціальностей розглянемо завдання на використання набутих знань та вмінь у фізиці, хімії, економіці тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз літературних джерел свідчить, що проблему формування математичних компетентностей здобувачів передвищої, вищої освіти досліджували у різних напрямах вітчизняні дослідники: Г.І. Берегова, В.Н. Гладунський, В.В. Барковський, Н.В. Барковська, М.К. Бугір, І.М. Ляшенко, О.І. Ляшенко, Л.С. Межейникова, О.Г. Фомкіна, Л.Б. Коваленко, Г.Г. Кашканова та ін., де подано не тільки методологічні аспекти, а й дидактичні. Проекцією в практичну площину авторами наведено задачі з професійним спрямуванням для окремих спеціальностей, задачі прикладного, практичного змісту.

Так, В. Пікан розрізняє поняття «прикладна» і «практична» спрямованість. На її погляд, прикладна спрямованість навчання математики – це орієнтація змісту методів навчання на застосування математики в техніці і суміжних науках; професійній діяльності; народному господарстві й побуті.

Прикладна спрямованість навчання математики – «це спрямованість змісту і методів навчання на розв'язування задач і вправ, на формування у студентів навичок самостійної діяльності математичного характеру» [9, с. 12].

Під навчальними задачами з професійним змістом Г.Г. Кашканова розуміє прикладні задачі, що відображають специфіку майбутньої професійної діяльності студентів [6, с. 17].

Реалізація професійної спрямованості математики, вважає О.Г. Фомкіна, і застосування її засобів у сфері виробництва, економіки, фінансів, менеджменту відбувається шляхом впровадження в навчальний процес математичних задач з економічним змістом [12, с. 12].

Виділення не виділених раніше частин загальної проблеми. Вимоги сьогодення в розвитку різних галузей промисловості потребують формування у випускників коледжу професійних компетентностей майбутнього фахівця, який розуміє напрями розвитку своєї галузі і вміє самостійно вдосконалюватися, задіяти набуті знання з різних розділів вищої математики до розв'язування завдань професійного характеру, ефективно задіяти власні можливості до збору, обробки та аналізу інформації, впровадження новітніх технологій.

Формулювання цілей статті. Визначення впливу розв'язання прикладних, практичних, професійно орієнтованих задач на рівень математичної підготовки студентів коледжу, підвищення вмотивованості навчання, здатність застосовувати математичний апарат у практичних ситуаціях, підвищення рівня самостійності в складанні математичних моделей прикладних задач, інтерпретації їх розв'язків. У зв'язку з цим викладачам необхідно розробляти, добирати різні дидактичні матеріали до вивчення теми для різних спеціальностей з орієнтацією на різні напрями підготовки студентів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Головними завданнями вивчення в коледжі студентами математики, вищої математики є набуття знань, умінь, навичок, які допоможуть здобувачу передвищої освіти повною мірою реалізувати себе в професійній діяльності, стати компетентним, кваліфікованим спеціалістом на ринку праці.

Значну роль прикладних задач із застосуванням диференціального, інтегрального числення розглянули у своїх працях Л.О. Соколенко [10, с. 115], Е.В. Сухорукова, М.І. Бурда, Ю.М. Калугін, З.І. Слєпкань, В.В. Барковський, Н.В. Барковська, І.П. Васильченко, Г.І. Берегова, В.Н. Гладунський, Л.Б. Коваленко.

Математична компетентність – це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень [4, с. 6].

Математична компетентність визначається рівнями навчальних досягнень, для яких суттєвими є набуття математичних вмінь. До них належать: уміння математичного мислення, аргументування, математичного моделювання; уміння постановки та розв'язування математичних задач, презентації даних; уміння оперувати математичними конструкціями; уміння математичних спілкувань; уміння використання математичних інструментів [7, с. 34–35].

За Я. Бродським та С. Великодним [2, с. 4–5], математична компетентність визначається як «поєднання математичних знань, умінь, досвіду і здатностей людини», які забезпечують розв'язання різних проблем, що потребують застосування математики. Розглядаються такі рівні компетентності: відтворення, встановлення зв'язків, міркувань. Характеристика цих рівнів дає змогу дійти таких висновків:

– компетентність виявляється у розв'язуванні задач, що потребують застосування набутих умінь в умовах, які дещо відрізняються від знайомих учням. При цьому не передбачається значний обсяг математичних умінь, нестандартність завдань забезпечується насамперед їх прикладним спрямуванням;

– рівні компетентності різняться складом когнітивних прийомів діяльності (розпізнавання, відтворення, встановлення зв'язків між даними в умові задачі, інтерпретація розв'язку, встановлення закономірностей, проведення узагальнення, тощо).

Для викладачів математики коледжу, вишу, які працюють із студентами різних спеціальностей, найбільш важливим і суттєвим є формування практично-ціннісних вимірів, що передбачають опанування застосуваннями математики – здатність застосовувати математику (демонструвати здатність використовувати математику для розв'язування завдань, які є актуальними і практично значущими для особистості, соціуму, людства відповідно до цінностей суспільства сталого розвитку). Когнітивний рівень – ціннісні ставлення стосовно математики як складової системи науки і культури суспільства сталого розвитку; усвідомлення і застосування на практиці математичних знань, математичних методів, методології застосувань математики для розв'язування практичних завдань) [5, с. 291].

Сучасна математика застосовується у вивченні економічних, гуманітарних, біологічних, фізичних, технічних та інших явищ. Це відбувається за допомогою побудови математичної моделі, яка враховує всі суттєві зв'язки всередині явища.

Під математичним моделюванням будемо розуміти метод дослідження процесів або явищ шляхом побудови їхніх математичних моделей і дослідження цих процесів.

Математичні моделі реального процесу або об'єкта можуть мати вигляд формули, рівнянь, системи рівнянь, графіків тощо. Вивчаючи різноманітні задачі економіки, фізики, техніки, часто можна встановити зв'язок між величинами, що описують той чи інший процес, та швидкостями їхньої зміни відносно інших незалежних змінних величин. При цьому застосовуються рівняння, у яких невідомі функції містяться під знаком похідної, що називаються диференціальними.

Характерною властивістю диференціальних рівнянь є безліч розв'язків. Тому розв'язавши диференціальні рівняння, які описують перебіг певного процесу, неможливо однозначно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес. Щоб знайти конкретний розв'язок рівняння, який відповідає конкретній задачі, треба мати додаткову інформацію, яка характеризує початкові умови, тобто розв'язати задачу Коші.

Згадаємо, що диференціальним рівнянням називається нетотожне співвідношення між незалежною змінною, шуканою функцією та її похідними по незалежній змінній до певного порядку включно.

У загальному вигляді диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $F(x, y, y') = 0$, а диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд:

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Розв'язанням диференціального рівняння $F(x, y, y') = 0$ на деякому інтервалі $I = (a, b)$ називається неперервно диференційована функція $y = \varphi(x)$, така, що $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$.

Диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків, необхідно зазначити початкову умову $y(x_0) = y_0$, щоб розв'язати задачу Коші.

Дослідження різноманітних явищ та процесів, розв'язання широкого кола задач забезпечується описом диференціальних рівнянь [13].

Розглянемо кілька задач фізики, хімії, біології та економіки, що приводять до диференціальних рівнянь.

Фізику вважають теоретичною основою сучасної науки, багато галузей якої виникли на базі фізичних відкриттів. Це електротехніка, радіотехніка, ядерна енергетика тощо. Фізика вивчає первинні структури матерії і відповідні їм найпростіші форми руху.

Задача 1. Швидкість охолодження нагрітого тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. За 20 хвилин тіло охололо від 100 до 50°С. Температура навколишнього повітря підтримується на рівні 15°С. За скільки хвилин тіло охолоне до 20°С?

Розв'язання. Нехай час t – незалежна змінна, а $x(t)$ – закон зміни температури з часом, яку взято із протилежним знаком, тобто $-\frac{dx}{dt}$.

За умовою задачі $-\frac{dx}{dt} = k(x(t) - 15)$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Крім того, з умови випливає, що $x(0) = 100$, $x(20) = 50$.

Розв'язуючи диференціальне рівняння, отримаємо:

$$\frac{dx}{x-15} = -kdt, \quad \ln|x-15| = -kt + \ln(C), \text{ звідки } x(t) = 15 + Ce^{-kt}.$$

З початкових умов $x(0) = 100$, $x(20) = 50$, знайдемо C і k.

$$100 = 15 + Ce^{0},\ C = 85.$$

$$50 = 15 + 85e^{-20k},\ e^{-20k} = \frac{35}{85} = \frac{7}{17}\ ,\ -20k = \ln\frac{7}{17},$$

Звідки

.
$$x(t) = 15 + 85e^{-\frac{t}{20}\ln\frac{17}{7}} = 15 + 85\left(\frac{17}{7}\right)^{-\frac{t}{20}}$$

Обчислимо тепер значення часу t охолодження тіла до 20°C:

$$x(t) = 15 + 85\left(\frac{17}{7}\right)^{-\frac{t}{20}} = 20.\ \ 85\cdot(2{,}4)^{-\frac{t}{20}} = 5.\ \ (2{,}4)^{-\frac{t}{20}} = 0{,}059.$$ $t \approx 65$ хвилин.

Відповідь: тіло охолоне до 20°C за 65 хвилин.

Цілий ряд задач в природі, медицині, хімії, біології, екології за своїм прикладним змістом, математичною моделлю мають рівняння у вигляді $f'(x) = kf(x)$, де $k - const$, яке називають диференціальним рівнянням показникового зростання.

Задача 2. Нехай швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості в початковий момент часу. Кількість бактерій потроюється протягом 4 годин. Знайти залежність кількості бактерій від часу.

Розв'язування. Нехай $P(t)$ – кількість бактерій популяції в момент часу
t, швидкість розмноження є похідна $P'(t)$ від кількості. Одержимо диференціальне рівняння показникового зростання. $P'(t) = k\cdot P(t)$, де $k > 0$ – математична модель цієї задачі.

$\frac{P'(t)}{P(t)} = k\cdot\frac{P(t)}{P(t)},\ \frac{P'(t)}{P(t)} = k$, що рівносильно рівнянню $(\ln(P(t))' = k$, звідки

$$\ln(P(t)\ = k\cdot t + C_1,\ C - const.$$

Призначимо $C_1 = \mathrm{In}C$. Маємо $\mathrm{In}(P(t)) = kt + C_1$, звідки:

$$\ln(P(t)) = kt + \ln C.\quad P(t) = Ce^{kt}.$$

Знайдемо частинний розв'язок за початкових умов: $P(0) = P_0,\ P(4) = 3P_0$.

Ураховуючи, $P(t) = Ce^{kt}$, маємо $P_0 = Ce^0 = C$.

Із другої умови маємо $3P_0 = P_0(e^k)^4$, звідки $e^{4k} = 3$ в момент часу t, а $e^k = 3^{\frac{1}{4}}$.

Отже, кількість бактерій визначається законом $P(t) = P_0(3^{\frac{1}{4}}) = P_0\cdot 3^{\frac{1}{4}}$.

Задача 3. Знайти закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо через 12 годин після введення 10 мг препарату його маса зменшилася вдвічі. Вважати, що швидкість розчинення прямо пропорційна часу.

Розв'язання. Нехай $m(t)$ – маса лікувального препарату в організмі людини в момент часу t, тоді $m'(t)$ – швидкість його розчинення; математичною моделлю задачі є рівняння:

$$m'(t) = -kt,\ \text{де}\ k > 0.$$

Загальним розв'язком цього диференціального рівняння є функція

$$m(t) = \int(-kt)dt = -\frac{kt^2}{2} + C.$$

Використовуючи початкові умови $m(0) = 10,\ m(12) = 5$, маємо:

$$10 = -\frac{k0}{2} + C, \quad C = 10, \quad m(12) = -\frac{k \cdot 12^2}{2} + 10 = 5.$$

$$-72k + 10 = 5. \ -72k = -5. \ k = \frac{5}{72}.$$

Звідси $m(t) = -\frac{5t^2}{72 \cdot 2} + 10 = -\frac{5t^2}{144} + 10.$

Отже, зменшення лікувального препарату в організмі людини відбувається за законом

$$m(t) = -\frac{5t^2}{144} + 10$$

У цьому випадку математичною моделлю задачі є найпростіше диференціальне рівняння.

Задача 4. У резервуарі перебуває $20\ м^3$ розчину кислоти, концентрація якого дорівнює $20\ кг/м^3$. Цей розчин виливається з резервуару зі швидкістю $0{,}6\ м^3/с$, і з такою же швидкістю у резервуар подається чиста вода, яка одразу ж змішується з розчином так, що концентрація розчину зменшується. Через який час концентрація буде дорівнювати $10\ кг/м^3$?

Розв'язання. Позначимо момент початку відліку часу t, а $y(t)$ – функція, яка визначає концентрацію розчину. З умови маємо $\Delta y = -y \cdot \frac{0{,}6\Delta t}{20}\ (кг).$

Концентрація розчину неперервно змінюється на $y(t) = 20\ кг/м^3$

Звідки $\frac{\Delta y}{\Delta t} = -0{,}03y$. Переходячи в останній рівності до границі при $\Delta t \to 0$,

одержимо $y' = -0{,}03y(t)$, яке є математичною моделлю опріснення розчину в резервуарі.

Загальним розв'язком цього рівняння є множина функцій $y(t) = C{\cdot}t^{-0{,}03t}$,

де $C - const$. Використовуючи початкові умови $y(t) = 20$, маємо, що $C = 20$.

Отже, $y(t) = 20e^{-0{,}03t}$. Для відповіді на питання задачі необхідно розв'язати рівняння

$$20e^{-0{,}03t} = 10, \text{ звідси } t^{-0{,}03t} = \frac{1}{2}, \ e^{0{,}03t} = 2.$$

Прологарифмувавши обидві частини рівняння, визначимо $\mathrm{In} e^{0{,}03t} = \mathrm{In}2$, звідки:

$$0{,}03t = \ln 2; \ t = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1\ c.$$

Типовими задачами економіки на застосування диференціальних рівнянь є задачі на залишкову вартість заощаджень, на зміну рівноважної ціни за зміною попиту і пропозиції, на модель природного зростання випуску продукції, неокласичну модель зростання, динамічну модель Кейнса та ін.

Розглянемо деякі приклади застосування диференціальних рівнянь у задачах економічного характеру.

Задача 5. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. грош. одиниць) і випуском продукції x (млрд грош. одиниць). Знайти еластичність собівартості, якщо випуск продукції складає 40 млрд грош. одиниць.

Розв'язання. Обчислимо еластичність собівартості за формулою:

$$E(y) = \frac{x}{y} \cdot y'. \text{ [8, c. 234]}$$

$$E_x(y) = \frac{x}{-0,6x + 60} \cdot (-0,6) = \frac{x}{x - 100}.$$

$$E_{40}(y) = \frac{40}{40 - 100} \approx -0,67.$$

Тобто у разі випуску продукції на 40 млрд грош. одиниць, збільшення на 1% приведе до зниження собівартості на 0,67% .

Задача 6. Знайти надлишок споживача, якщо крива попиту визначається функцією

$p = f(q) = 30 - 5q^2$, p = рівноважний обсяг товару – $q_0 = 2$.

Розв'язання. Підставивши значення $q_0 = 2$ у функцію попиту, одержимо рівноважну ціну

$$p = f(q) = 30 - 5 \cdot 2^2 = 30 - 20 = 10, \; p_0 q_0 = 10 \cdot 2 = 20.$$

Використовуючи формулу надлишку споживачів

$$S_n = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0 q_0, \text{ [1, c. 60]}$$

знайдемо надлишок:

$$S_n = \int_0^K (30 - 5q^2)dq - 20 = \left(30q - \frac{5q^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 - 20 = \left(60 - \frac{40}{3}\right) - 20 =$$

$$= 40 - \frac{40}{3} = \frac{120 - 40}{3} = \frac{80}{3} = 26,6.$$

Надлишок складає 26,6 умовних одиниць.

Розглянемо ще одне поняття ринкової економіки – додаткову вартість, або надлишок виробника.

Задача 7. Знайти додану вартість виробників, якщо крива пропозиції визначається функцією $p = f(q) = 6 + 4q^3$, а рівноважний обсяг товару – $q_0 = 2$.

Розв'язання. Знайдемо рівноважну ціну $p_0 = f(q_0) = 6 + 4 \cdot 2^3 = 38$.

Використовуючи формулу

$$S_{\text{дод.варт.}} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq,$$

знайдемо додаткову вартість виробника:

$$S_{\text{дод.варт.}} = 38 \cdot 2 - \int_0^2 (6 + 4q^3)dq = 76 - \left(6q + \frac{4q^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 76 - (12 + 16) = 76 - 28 = 48.$$

Задача 8. Скласти диференціальне рівняння відносно функції $y(f)$, яка описує зростання рівня виробництва продукції в момент часу t (t вимірюється в роках), якщо темп зростання випуску продукції $T_0 = 0{,}06$ (темп зростання 6% річних).

Знайти його розв'язок та сумарну кількість устаткування, виробленого за проміжок часу від $t_0 = 0$ до $t_1 = 8$ років, якщо в базовому році $t = t_0$ рівень виробництва відомий: $y(t_0) = y_0$.

Розв'язування. Позначимо через $y(t)$ рівень виробництва продукції за одиницю часу в момент t (t вимірюється в роках).

Оскільки темп зростання випуску продукції T, то за означенням $T \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{1}{y}$,

звідки $T = \frac{y'(t)}{y}$ при $\Delta t \to 0$.

Шукане диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt} = yT$. За початкових умов $y(t_0) = y_0$,

розв'язком задачі Коші є $y(t) = y_0 \cdot e^{T(t-t_0)}$.

Сумарна кількість устаткування, випущеного фірмою за час $t \in [t_0, t_1]$ визначається інтегралом

$$y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} y_0 \cdot t^{T(t-t_0)}dt = \frac{1}{T} \cdot y_0 \cdot (e^{T(t_1-t_0)} - 1).$$

Ураховуючи початкові умови, маємо

$$y(8) = \frac{1}{0{,}06} \cdot y_0(e^{0{,}06 \cdot 8} - 1) = 16{,}7 \cdot y_0(1{,}61 - 1) \approx y_0 \cdot 16{,}7 \cdot 0{,}61 \approx 10y_0.$$

Задача 9. На момент часу $t = 0$ дехто мав 50000 грн заощаджень. Через три роки їх розмір зменшився до 45000 грн. Яка буде вартість заощаджень через 8 років?

Розв'язання. Ми знаємо, що швидкість знецінення заощаджень через інфляцію пропорційна до їхньої залишкової вартості.

Якщо y_0 – початкова вартість заощаджень, то знецінення вартості через t років дорівнює $y_0 - y(t)$ і швидкість їх знецінення

$\frac{d(y - y(t))}{dt} = ky(t)$, де k – коефіцієнт їх пропорційності [8, с. 110].

Для обчислення $y(t)$ маємо задачу Коші для диференціального рівняння

першого порядку: $\frac{dy(t)}{dt} = -ky(t)$, $y(0) = y_0$.

Маємо $\frac{dy}{dt} = -ky$, $y(0) = 50000$.

Розв'яжемо рівняння $\frac{dy}{y} = -kdt$.

Прологарифмуємо: $\ln(y) = -kt + C$; $y = Ce^{-kt}$.

З початкових умов знаходимо: $y(t) = 50000 \cdot e^{-kt}$.

Оскільки $y(3) = 45000$, то маємо $45000 = 50000e^{-3k}$,

з якої знайдемо коефіцієнт k: $e^{-3k} = \frac{45000}{50000} = \frac{9}{10}$.

Прологарифмуємо обидві частини рівняння:

$$\ln e^{-3k} = \ln 9 - \ln 10\,;$$

$$-3k = \ln 9 - \ln 10\,;\;\; k = -\frac{1}{3}(\ln 9 - \ln 10) = \frac{\ln 10 - \ln 9}{3} = \frac{2{,}3 - 2{,}2}{3} \approx \frac{0{,}1}{3} \approx 0{,}03\,.$$

Отже, зміна обсягу заощаджень описується функцією $y(t) = 50000e^{-0{,}03t}$.

Через 8 років обсяг заощаджень дорівнюватиме

$$y(8) = 50000e^{-0{,}03\cdot 8} = 50000\cdot e^{-0{,}24} = \frac{50000}{e^{0{,}24}} \approx \frac{50000}{1{,}2712} \approx 39333 \text{ грн.}$$

Задача 10. (на зміну рівноважної ціни за зміни попиту і пропозиції). Нехай $p(t)$ – ціна на певний товар. $\frac{dp}{dt}$ – тенденція формування ціни.

Функції попиту на пропозиції на певний товар мають вигляд:

$$D(p,\,p') = 40 - 2p - 2\frac{dp}{dt}\,;\;\; S(p,\,p') = 60 + 2p - 3\frac{dp}{dt}\,.$$

а) Знайти залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p(0) = 20$.
б) Знайти $\lim\limits_{t\to\infty} p$. Перевірити, чи рівноважна ціна є стійкою.

Розв'язання.

а) Визначимо рівноважну ціну залежно від часу з умови $D(p,\,p') = S(p,\,p')$, звідки маємо диференціальне рівняння:

$$40 - 2p - 2\frac{dp}{dt} = 60 + 2p - 3\frac{dp}{dt}\,,$$

звідки $\frac{dp}{dy} = 20 + 4p$.

Розділимо змінні, звідси $\frac{dp}{20+4p} = dt$. Проінтегруємо:

$$\int \frac{dp}{20+4p} = \int dt + C\,.$$

Звідки

$$\frac{1}{4}\ln|20+4p| = t + C\,,\text{ або } 20 + 4p = e^{4t+4C} = Ce^{4t}\,.$$

З початкової умови маємо, що $C = 20{+}80 = 100$, отже, рівноважна ціна

$$20 + 40p = 100e^{4t}\,,\text{ звідки } p = \frac{5}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}\,.$$

б) Знайдемо $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{5}{4}e^{4t} - \frac{1}{2}\right) = \infty$. Звідси випливає, що рівноважна ціна є нестійкою, а саме, зростає у часі.

Ваговим чинником у вмінні розв'язувати прикладні задачі є: здатність розпізнати задачу, побудувати математичну модель; узагальнити та виконати теоретичне дослідження цього класу задач; провести обчислювальний експеримент, інтерпретувати математичний результат.

Висновки з дослідження та перспективи подальших розвідок. Прикладне спрямування розв'язання задач студентами різних спеціальностей, зорієнтоване на майбутню професійну діяльність, є ефективним засобом підвищення мотивації навчання, формування математичних та професійних компетентностей. Перед викладачами постають завдання пошуку змісту навчання, методів навчання, орієнтованих на різні напрями спеціалізації випускників коледжу. Науково-дослідна робота викладача і студентів значно підвищує інтерес до вивчення математики, підтверджує значущість предмета в професійній діяльності, формує як загальні, так і математичні, професійні компетентності здобувача передвищої освіти, майбутнього фахового молодшого бакалавра. Нагальним і потрібним, на наш погляд, є розроблення методичних та дидактичних матеріалів щодо посилення прикладної спрямованості вивчення курсу вищої математики згідно з професіональними інтересами здобувачів вищої та передвищої освіти. Одержані результати відкривають перспективи для подальших досліджень у таких напрямах: розроблення методики формування вмінь розв'язувати прикладні задачі студентами різних спеціальностей, посилення інтеграційних зв'язків між фундаментальними та професійно орієнтованими дисциплінами.

Список використаної літератури

1. Аршава О.О. та ін. Прикладні задачі з вищої математики для економічних спеціальностей. Харків: ХДТУБА, 2011. 71 с.

2. Бродський Я., Великодний С., Павлов О. Компетентнісний підхід у навчанні математики. *Математика в школі.* 2011. №10. С. 2–9.

3. Васильченко І.П. Вища математика для економістів, 2-ге видання, випр. Київ: Знання, 2004. 454 с.

4. Вища освіта України. *Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору»*. 2011. Дод. 2 до №3. Т. ІІ (27). 562 с.

5. Кашканова Г.Г. Использование игровых форм обучения общетехническим дисциплинам в процессе формирования профессиональной направленности студентов: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 10.00.01. Киев, 1992. 20 с.

6. Лісова С.В. Компетентнісний підхід у вищій освіті: зарубіжний досвід. Професійна педагогічна освіта: компетентнісний підхід: монографія; за ред. О.А. Дубасенюк. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2011. С. 34–53.

7. Берегова Г.І., Гладунський В.Н. Математика для економістів: вища математика (перша частина): навч. посібник. УБС НБУ, 2019. 279 с.

8. Пикан В.В. Управление вариативным образовательным процессом в школе: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. Москва, 2005.

9. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу. Київ : НГГУ імені М.П. Драгоманова, 2010. 128 с.

10. Сукач Т.М., Чуйков А.С., Бірюкова Т.В. Застосування визначеного інтеграла у формуванні професійних компетентностей здобувачів вищої та передвищої освіти. *Вісник Університету імені Альфреда Нобеля «Педагогіка і психологія. Педагогічні науки»*. 2020. № 1 (19). С. 289–299.

11. Сухорукова Е.В. Прикладные задачи как средство формирования математического мышления учащихся : дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 : Москва, 1997. 207 с.

12. Фомкина О.Г. Методична система проведення практичних занять з математики зі студентами економічних спеціальностей (на базі кооперативного інституту): автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова. Київ, 2000. 20 с.

13. Dimas S., Andriopoulos K., Tsoubelis D. & Leach P. G. L. Complete specification of some partial differential equations that arise in financial mathematics. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2009, vol. 16:sup1, pp.73–92, doi:10.1142/S1402925109000339.

References

1. Arshava, O.O. ect. (2011). *Prykladni zadachi z vyshchoi matematyky dlia ekonomichnykh spetsialnostei* [Applied problems in higher mathematics for economic specialties]. Kharkiv: KhDTUBA Publ., 71 p. (In Ukrainian).

2. Brodskyi, Ya., Velykodnyi, S. & Pavlov, O. (2011). *Kompetentnisnyi pidkhid u navchanni matematyky* [Competence approach in teaching mathematics]. *Matematyka v shkoli* [Mathematics at school], no. 10, pp. 2-9. (In Ukrainian).

3. Vasylchenko, I.P. (2004). *Vyshcha matematyka dlia ekonomistiv* [Higher mathematics for economists]. Kyiv, Znannia Publ., 454 p. (In Ukrainian).

4. *Vyshcha osvita Ukrainy u konteksti intehratsii do yevropeiskoho osvitnoho prostoru* (2011). [Higher Education of Ukraine in the Context of Integration into the European Educational Space], add. 2, no. 3, vol. II (27), 562 p. (In Ukrainian).

5. Kashkanova, G.G. (1992). *Ispolzovanie igrovykh form obucheniia obshchetekhnicheskim distsiplinam v protsesse formirovaniia professionalnoi napravlennosti studentov. Avtoref dis. kand. ped. nauk* [The use of game forms of teaching general technical disciplines in the process of forming the professional orientation of students. Abstract of cand. ped. sci. diss.]. Kyiv, 20 p. (In Ukrainian).

6. Lisova, S.V. (2011). *Kompetentnisnyi pidkhid u vyshchii osviti: zarubizhnyi dosvid* [Competence approach in higher education: foreign experience]. *Profesiina pedahohichna osvita: kompetentnisnyi pidkhid* [Professional pedagogical education: competence approach]. Zhytomyr, ZhDU im. I. Franka Publ., pp. 34-53. (In Ukrainian).

7. Berehova, H.I. & Hladunskyi, V.N. (2019). *Matematyka dlia ekonomistiv: vyshcha matematyka (persha chastyna)* [Mathematics for economists: higher mathematics (first part)]. 279 p. (In Ukrainian).

8. Pikan, V.V. (2005). *Upravlenie variativnym obrazovatelnym processom v shkole.* Avtoref. dis. dok. ped. nauk [Management of the variable educational process at school. Abstract of doc. ped. sci. diss.]. Moskva, 20 p. (In Russian).

9. Sokolenko, L.O., Filon, L.H. & Shvets, V.O. (2010). *Prykladni zadachi pryrodnychoho kharakteru v kursi alhebry i pochatkiv analizu* [Applied problems of a natural nature in the course of algebra and the beginnings of analysis.]. Kyiv, NHHU imeni M.P. Drahomanova Publ., 128 p. (In Ukrainian).

10. Sukach, T.M., Chuikov, A.S. & Biriukova, T.V. (2020). *Zastosuvannia vyznachenoho intehrala u formuvanni profesiinykh kompetentnostei zdobuvachiv vyshchoi ta peredvyshchoi osvity* [Application of a certain integral in the formation of professional competencies of higher and higher education.] *Visnyk Universytetu imeni Alfreda Nobelia. Pedahohika i psykholohiia. Pedahohichni nauky* [Bulletin of Alfred Nobel University. Pedagogy and psychology. Pedagogical sciences], no. 1 (19), pp. 289-299. (In Ukrainian).

11. Sukhorukova, E.V. (1997). *Prikladnye zadachi kak sredstvo formirovaniia matematicheskogo myshleniia uchashchikhsia. Dis. kand. ped. nauk* [Applied problems as a means of forming students' mathematical thinking. Cand. ped. sci. diss.]. Moskva, 207 p. (In Russian).

12. Fomkyna, O.H. (2000). *Metodychna systema provedennia praktychnykh zaniat z matematyky zi studentamy ekonomichnykh spetsialnostei (na bazi kooperatyvnoho instytutu). Avoref. dis. kand. ped. nauk* [Methodical system of conducting practical classes in mathematics with students of economic specialties (on the basis of a cooperative institute). Abstract of cand. ped. sci. diss.]. Kyiv, 20 p. (In Ukrainian).

13. Dimas, S., Andriopoulos, K., Tsoubelis, D. & Leach, P.G.L. (2009). Complete specification of some partial differential equations that arise in financial mathematics. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, vol. 16, pp. 73–92, doi:10.1142/S1402925109000339.

APPLICATION OF THE DETERMINED INTEGRAL IN THE FORMATION OF THE PROFESSIONAL COMPETENCES OF THE HIGHER AND PRE-HIGHER EDUCATION STUDENTS

Biriukova Tetiana Viktorivna, Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Biological Physics and Medical Informatics, "Bukovinian State Medical University",
E-mail: tanokbir@ukr.net
ORCID iD 0000-0003-4112-7246
Sukach Tatiana Mykolayivna, Ph.D., Associate Professor, the Department of Programming and Mathematics, Kiyv College of Computer Technology and Economics of the National Aviation University,
E-mail: sukach1@ukr.net
ORCID iD 0000-0003-1053-9002
Yarovyi Ihor Mykolayovych, PhD in Economics, Deputy Director on Educational Activities of Kiyv College of Computer Technology and Economics of the National Aviation University,
E-mail: igornyarovoy@gmail.com,
ORCID iD 0000-0003-2183-3899
DOI: 10.32342/2522-4115-2020-2-20-16

Key words: differential equations, mathematical competence, applied problems, practical problems, mathematical model.

Modern requirements for mathematical training of applicants for higher education significantly increase the role of forming students' ability to independently acquire knowledge, as well as the application of acquired knowledge to solve problems of professional orientation, which, in turn, requires the teacher to search and develop new practical materials aimed at solving professionally oriented problems for each specialty. The issue of developing in students different areas of general, mathematical and professional competencies by means of mathematics is relevant, which, in turn, demonstrates its practical significance.

The main task of the teacher is to provide for students' mastering not only the theoretical material from different sections of mathematics, but also understanding why higher mathematics is studied and how the acquired knowledge is applied in practice. Therefore, the motivation to learn, the practical significance of the acquired knowledge become especially important. It is the applied orientation that contributes to the formation of the scientific worldview and testifies to the role of mathematics in modern production, economics, and science. The issues of application of the mathematical apparatus in the system of pre-higher and higher education to the solution of applied problems are relevant, which, in turn, demonstrates their practical application.

Modern mathematics is used in the study of various branches of science, enterprise, spheres of life, in various fields of knowledge through the construction and analysis of a model of the phenomenon being studied. Mathematical models of a real process or object can be presented in the form of formulas, equations, graphs, etc. In practice, differential equations are widely used to describe transients.

The study of various phenomena and processes, the solution of a wide range of problems are provided by the description of differential equations.

The article considers several problems of Physics, Chemistry, Biology and Economics that lead to differential equations.

The applied direction of solving problems by students of different specialties focused on future professional activity is an effective means of increasing learning motivation, an effective means of forming mathematical and professional competencies.

Teachers face the task of finding the content of education, teaching methods focused on different areas of specialization of college graduates. The research work of teachers and students significantly increases interest in the study of mathematics, confirms the importance of the subject in professional activities, forms both general and mathematical, professional competencies of the applicant for higher education, the future professional junior bachelor. Urgent and necessary, in our opinion, is the development of methodological and didactic materials to strengthen the applied orientation of the study of higher mathematics according to the professional interests of applicants for higher education. The obtained results open prospects for further research in the following areas: the development of methods for the formation of skills to solve applied problems by students of different specialties, strengthening the integration links between fundamental and professional-oriented disciplines.

Одержано 3.09.2020.