УДК 004.056.53

Букелкул Салих, асп. *(Гос. университет информационно-коммуникационных технологий)*

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

Букелкул Саліх. Граничний розподіл для загального випадкового блукання. Досліджується асимптотична поведінка розподілів деяких характеристик випадкових блукань. Поряд з випадковими блуканнями розглядається їх аналог у безперервнім часі. Також наведені леми і теореми.

Ключові слова: РОЗПОДІЛ РЕЛЕЯ, ВИПАДКОВІ БЛУКАННЯ, ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ

Букелкул Салих. Предельное распределение для общего случайного блуждания. Рассмотрено асимптотическое поведение распределений некоторых характеристик случайных блужданий. Наряду со случайными блужданиями рассматривается их аналог в непрерывном времени. Также приведенны леммы и теоремы.

Ключевые слова: РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЛЕЯ, СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ, ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Bukelkul Salikh. Limiting distribution for the general casual wandering. The asymptotic behavior of the distributions of certain characteristics of random wanderingsis considered. Along with the random wanderings their analogue in continuous time is considered. Also theselemmas and theoremsare resulted.

Keywords: RELAY DISTRIBUTION, CASUAL WANDERING, LIMITING DISTRIBUTION

Рассмотрим случайное блуждание $S(n) = \xi_1 + \cdots \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots$– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x) = P\{\xi_1 < x\}$. Предположим, что $M\xi_1 = 0, D\xi_1 = 1$. Положим:

$$U_n(x) = P\{S(1) \geq 0, \ldots S(n-1) \geq 0, S(n) < x\}\ (x \leq)),$$

$$U_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} u_k\,(x), u_n = u_n(0), u_n = u_n(0),$$

$$\overline{U_n}(s) = \int_{-\infty}^{-0} e^{sx} dU_n(x)(Res \geq 0),\ \bar{u}\,(z,s) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{-0} e^{sx} du_n\,(x),$$

$$(|z| \leq 1), \bar{u}(z) = \bar{u}(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, u_n.$$

Введем в рассмотрение случайную величину η – момент первого достижения области $(-\infty, 0)$:$\eta = min\{n: S(n) < 0\}$. Тогда$U_n = P\{\eta \geq n\}, U_n(x) = P\{\eta \geq n, S(\eta) < x\}$.

И одно из факторизационных тождеств и тауберовы теоремы, находятся, при сделанных предположениях, как асимптотическое распределение первого после момента n перескока через 0 случайного блуждания $S(n)$ при условии что, $\eta \geq n$ и $n \to \infty$. Заметим, что случайную величину η можно также трактовать как момент поглощения случайного блуждания $S(n)$, а открытую полупрямую $(-\infty, 0)$ – как поглощающее множество. В следствии из теоремы 1.3 (см. ниже) показано, что непоглощенная часть случайного блуждания при $n \to \infty$ асимптотически распределена по закону Релея. Заметим, что приведенные рассуждения остаются в силе, если вместо открытой полупрямой взять замкнутую полупрямую $(-\infty, 0]$.

Известно факторизационное тождество:

$$ln \frac{1}{1-\bar{u}(z,s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_{-\infty}^{-0} e^{sx} dF^{n*}\,(x)(|z| < 1, Res \geq 0). \quad (1)$$

Здесь $F^{n*}(x)$– краткая свертка распределений $F(x)$. Прежде чем перейти к формулировке основных результатов, приведем две леммы.

Лемма 1.1. Пусть $\alpha(x)$ – монотонная ограниченная интегрируемая на $(-\infty, 0)$ функция. Тогда если $F(x)$ – нерешетчатое распределение, то при $n \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{-0} \alpha(x) dF^{n*}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \int_{-\infty}^{-0} \alpha(x) dx$$

Если же $F(x)$– решетчатое распределение, то при $n \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{-0} \alpha(x) dF^{n*}(x) \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \sum \alpha(x),$$

причем сммирование ведется в этом случае по всем $x < 0$, принадлежащим решетке$F^{n*}(x)$, а h– (максимальный) шаг решетки $F(x)$.

Лемма 1.2. При $n \to \infty$ справедливо следущее предельное соотношение:$P\{\eta \geq n\} = = U_n \sim C(2\pi n)^{-1/2}$,где постоянная$C$ задается формулой $\ln C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(P\{S(n) \leq 0\} - \frac{1}{2}\right)$.

Теорема 1.3. При$n \to \infty$ имеет место следущая сходимость функций распределения:

$$P\left\{S(n) < \frac{x}{\eta} > \eta \geq n\right\} = \frac{U_n(x)}{U_n} \to V(x),$$

где $V(x)$ в случае, если $F(x)$ – нерешетчатое распределение или если решетка $F(x)$ имеет вид $\alpha + mh$, где α и h несоизмеримы, определяется своим ПЛС $V(s)$ по формуле:

$$v(s) = \sqrt{2}(Cs)^{-1}\left(1 - \bar{U}_1(s)\right) \tag{2}$$

а в случае, если решетка $F(x)$ имеет вид $\alpha + mh(h > 0, h \leq \alpha < 0)$ и $\alpha = -hk/l$, где дробь k/l несократима, –по формуле:

$$v(s) = \frac{\sqrt{2}}{C}(1 - \bar{U}_1(s))\frac{h}{l}(e^{sh/l}\text{-}1)^{-1}. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что распределение $F(x)$ нерешетчато. Тогда из леммы 1.1 следует, что при $s > 0$

$$\int_{-\infty}^{-0} e^{sx} dF^{n*}(x) \sim \frac{1}{s\sqrt{\pi}} n^{-1/2}. \tag{4}$$

Поэтому ряд в формуле (1) сходится при $z = 1$. Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{-0} e^{sx} dF^{n*}(x) = ln. \tag{5}$$

Далее из формул (4) и (5) и тауберовой теоремы следует, что при $z \uparrow 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_{-\infty}^{-0} e^{sx} dF^{n*}(x) - ln \frac{1}{1-\bar{U}_1(s)} \sim \frac{\sqrt{2}}{s}(1-z)^{1/2}$, или, принимая во внимание (1),

$$\bar{U}(z,s) - \bar{U}_1(s) \sim -\frac{\sqrt{2}}{s}(1 - \bar{U}_1(s))(1-z)^{1/2}. \tag{6}$$

Снова применяя к (6) тауберову теорему, получаем $\bar{U}_n(s) \sim -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(1 - \bar{U}_1(s)\right)n^{\frac{1}{2}}$. Отсюда и из леммы 1.2 заключаем, что $\frac{\bar{U}_n(s)}{U_n} - \frac{\sqrt{2}}{Cs}\left(1 - \bar{U}_1(s)\right) = v(s)$.

Учитывая, наконец, что при $s \to 0$ справедливо разложение

$$1 - \bar{U}_1(s) \sim Cs\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7}$$

получаем $v(s) \to 1$. Это показывает, что распределение $V(x)$ – собственное.

Пусть теперь $F(x)$ – решетчатое распределение и решетка $F(x)$ имеет вид $\alpha + mh(h > 0, h \leq \alpha < 0)$. Предположим сначала, что $\alpha = -hk/l$, где дробь k/l несократима (здесь m , $k > o, l > 0$– целые числа). Тогда $F^{n*}(x)$ сосредоточено на решетке вида $\alpha_n + mh$, где $\alpha_n = h\left(-\frac{nk}{l} - \left[-\frac{nk}{l}\right]1\right)$ (через $[a]$ обозначена целая часть a. Положим:

$$B_i = \sum_{n=i}^{i+l-l} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{-0} e^{sx} dF^{n*}(x), \tag{8}$$

$$A_i = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{-0} e^{sx} dF^{n*}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{i+jl}.$$

Из леммы 1.1 при $n \to \infty$получаем: $\int_{-\infty}^{-0} e^{sx} dF^{n*}(x) \sim \frac{he^{\alpha_n s}}{1-e^{sh}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h^{-1/2}$. (9)

Применяя (9) к (8), имеем: $B_i \sim \frac{h}{1-e^{sh}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i^{-3/2} \sum_{n=i}^{i+l-1} e^{\alpha_n s}$.

Учитывая теперь, что числа α_n принимают все значения вида $\frac{nj}{1}(0 < j \le l)$, когда n изменяется в пределах отi до $i + l - 1$, получаем:$\sum_{n=i}^{i+l-1} e^{\alpha_n s} = \sum_{j=i}^{l} e^{-jhs/2} = \frac{1-e^{-sh}}{e^{-sh/2}-1}$.

Таким образом, $A_i \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h}{e^{sh/l}-1} \sum_{j=o}^{\infty} (i + jl)^{\frac{-3}{2}} \sim \frac{h}{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i^{\frac{-3}{2}}}{e^{sh/l}-1}$. Двойное применение к (1) тауберовой теоремы даст в этом случае$\frac{\bar{U}_n(s)}{U_n} \to \frac{\sqrt{2}}{C}\left(1 - \bar{U}_1(s)\right) \frac{\frac{h}{l}}{e^{sh/l}-1} = v(s)$. Аналогично тому, как это делалось выше, из (7) доказывается собственность распределения $V(x)$.

Наконец, если α и h несоизмеримы (т.е. отношение α/h иррационально), то полагая $\alpha_n = h(\frac{n\alpha}{h} - \left[\frac{n\alpha}{h}\right] - 1)$, получаем при $t \to \infty$ равномерно поi: $h \sum_{n=i}^{i+l-1} e^{\alpha_n s} \sim l \int_{-h}^{0} e^{sx} = \frac{l}{s}(1 - e^{sh})$. Поэтому рассуждения, подобные прежним, приводят к формуле: $A_i \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^{1/2}$ и далее устанавливается справедливость (2).

Заметим, что полученный в теореме 1.3 результат имеет чрезвычайно простую вероятностную трактовку. Прежде всего, $\bar{U}_1(s)$ – ПЛС величины первого перескока случайного блуждания $S(n)$ через 0. Если $F(x)$ – решетчатое распределение, а α и h соизмеримы, то величина первого перескока является решетчатой случайной величиной, сосредоточенной на решетке $\frac{mh}{l}$, в противном случае величина первого перескока является нерешетчатой случайной величиной. Формулы (2) и (3) показывают, что$V(x)$является расспредилением первого момента восстановления в стационарном процессе восстановления с распределением времени между восстановлениями $U_1(x)$, причем в решетчатом случае рассматривается процесс восстановления с дискретным временем(разумеется, процесс восстановления рассматриваются с точностью до знака). Ясно также, $V(x)$можно трактовать как распределение первого перескока случайного блуждания $S(n)$ через бесконечно удаленный барьер.

Положим теперь: $\widetilde{U}_n(t) = \int_{-\infty}^{-0} e^{itx} du_n(x), \widetilde{U}_n(t) \int_{-\infty}^{-0} e^{itx} du_n(x)$. Для дальнейшего нам понадобится следующий результат, вытекающий из теорем 1.3:

$$\widetilde{U}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} C n^{-1/2}. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение еще несколько вспомогательных величин:

$$\psi_n(x) = P\{S(n) < x; \eta > n\}, \qquad \psi_n(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} d\psi_n(x), \acute{S}(n) = n^{\frac{1}{2}} S(n).$$

Наконец, определим функцию распределения и характеристическую функцию нормированной соответствующим образом непоглощенной части случайного блуждания $S(n)$: $Q_n(x) = P\{S(n) < x/\eta > n\}, q_n(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} dQ_n(x)$.Тогда

$$q_n(t) = \frac{1}{U_{n+1}} \psi_n\left(n^{-1/2} t\right) \tag{11}$$

Теорема 1.4. При $n \to \infty$ справедливо следующее соотношение:

$$P\{S(n) < x/\eta > n\} \to 1 - e^{-\frac{3}{2}}(x \ge 0).$$

Доказательство. Разобъем все множество траекторий случайного блуждания $S(n)$ на две части: траектории, достигающие область $(-\infty, 0$ к моменту n, и траектории, не достигающие этой области. Тогда $F^{n*}(x) = P\{S(n) < x; S(1) \ge 0; \dots; S(n) \ge 0\} + \sum_{m=1}^{n} P\{S(1) \ge 0; \dots; S(m-1) \ge 0; S(m) < 0; S(n) < x\}$.

Используя марковское свойство случайного блуждания$S(n)$, имеем$F^{n*}(x) = \psi_n(x) + \sum_{m=1}^{n} \int_{-\infty}^{-0} F^{(n-m)^*}(x-y)\,du_m\,(y)$,или, переходя к характеристическим функциям,$f^n(t) = \psi_n(t) + \sum_{m=1}^{n} \tilde{u}_m(t) f^{n-m}(t) = \psi_n(t) + \tilde{u}_1(t) f^m(t) + [\tilde{u}_1(t) f^{n-1}(t) + \tilde{u}_2(t) f^{n-2}(t) + \cdots + \tilde{u}_n(t)]\big(1 - f(t)\big) - \tilde{u}_{n+1}(t)$, где $f(t) = Mexp\{it\xi_1\}$. Следовательно,

$$\psi_n(t) = f^n(t)\big(1 - \tilde{u}_1(t)\big) - \tilde{u}_{n+1}(t) - (1 - f(t)) \sum_{m=1}^{n-1} \tilde{u}_{n-m}(t) f^m(t). \qquad (12)$$

Учитывая, что при$n \to \infty$ справедливо разложение$f\left(n^{\frac{1}{2}}t\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$,в силу (7), (10), (11) и леммы 1.2, получаем из (12) соотношение:

$$q_n(t) \sim it\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - \frac{t^2}{2n})^n + 1 - \frac{t^2}{2n} \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/2} (1 - \frac{t^2}{2n})^m. \qquad (13)$$

Нетрудно видеть, что при$n \to \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/2} (1 - \frac{t^2}{2n})^m \sim \int_0^1 (1-x)^{-1/2} e^{-xt^2/2}\,dx. \qquad (14)$$

Делая замену $y = (1-x)^{1/2}$ из (13) и (14) имеем:

$$q_n(t) \to q(t) = 1 + e^{-\frac{t}{2}}(it\sqrt{\frac{\pi}{2}} - t^2 \int_0^1 e^{yt^2/2} dy. \qquad (15)$$

Простые вычисления показывают, что написанное в правой части формулы (15) выражение есть не что иное, как характеристическая функция распределения Релея. Окончательно получаем:

$$Q_n(x) \to 1 - e^{-x^{\frac{2}{2}}}.$$

Литература:

1. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков. – М.: Наука, 1972, – 368 с.

2.Феллер В.Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2 / В. Феллер. – М.: Мир, 1967. – 752с

3. Shepp L.A. A local limit theorem. – Ann.Math.Statist.,1964, 35, №1, p.413-423.

УДК 621.391

Турупалов В. В.,к.т.н.*(Донецький національний технічний університет)*

ОЦІНКА ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ НАДІЙНОСТІ МАРШРУТУ ТРАНСПОРТНОЇ МЕРЕЖІ

Турупалов В. В. Оцінка функціональної надійності маршруту транспортної мережі. Запропонована модель оцінювання працездатності маршрутів транспортної телекомунікаційної мережі, яка використовується на етапі планування.

Ключові слова:ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ, ТРАНСПОРТНА МЕРЕЖА, НАДІЙНІСТЬ, ПЛАНУВАННЯ, ВІДНОВЛЕННЯ СИСТЕМИ, МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ

Турупалов В. В. Оценкафункциональнойнадежностимаршрутатранспортной сети.Предложена модель оцениванияработоспособностимаршрутовтранспортнойтелекоммуникационной сети, котораяиспользуется на этапепланирования.

Ключевые слова:ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ, ТРАНСПОРТНАЯСЕТЬ, НАДЕЖНОСТЬ, ПЛАНИРОВАНИЕ, ВОССТАНОВЛЕНИЕСИСТЕМЫ, МОДЕЛЬ ОЦЕНИВАНИЯ

Turupalov V. V. Estimation of the functional reliability of the transport networks route. Amodel of performance evaluation of a transport TCN routes, which is used in the planning stage is offered.

Keywords:TELECOMMUNICATIONS, TRANSPORT NETWORK, RELIABILITY, PLANNING, SYSTEMRESTORATION, ESTIMATION MODEL