ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип. **18**

УДК 517.5

О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в единичном бикруге функций

С. Б. Вакарчук*, **М. Б. Вакарчук****

* Днепропетровский университет им. Альфреда Нобеля,
Днепропетровск 49000. *E-mail: sbvakarchuk@mail.ru*
** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: vacarchuk@yandex.ru*

Для аналітичних у одиничному біколі функцій двох комплексних змінних одержано точну нерівність типу Колмогорова у просторі $\mathfrak{B}(U_2)$.

Ключові слова: **одиничне біколо, проміжна похідна, нерівність типу Колмогорова.**

Для аналитических в единичном бикруге функций двух комплексных переменных получено точное неравенство типа Колмогорова в пространстве $\mathfrak{B}(U_2)$.

Ключевые слова: **единичный бикруг, промежуточная производная, неравенство типа Колмогорова.**

The exact inequality of Kolmogorov type has been obtained in the space $\mathfrak{B}(U_2)$ for functions of two complex variables analytic in the unit bicircle. .

Key words: **unite bicircle, intermediate derivative, inequality of the Kolmogorov type.**

Данная работа является продолжением исследований, начатых в публикациях авторов [1-4]. Пусть $\mathbf{z} := (z_1, z_2) = (\rho_1 e^{it_1}, \rho_2 e^{it_2})$, где $0 \leqslant \rho_j < \infty; 0 \leqslant t_j < 2\pi$, $j = 1, 2,$ — точка двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$; $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : : |z_j| < 1,\ j = 1, 2\}$ — единичный бикруг в $\mathbb{C}^2$. Класс всех аналитических в U^2 функций обозначим через $A(U^2)$. Для произвольной функции $f \in A(U^2)$ полагаем

$$M_2(f; \rho_1, \rho_2) := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\rho_1 e^{it_1}, \rho_2 e^{it_2}) \right|^2 dt_1 dt_2 \right\}^{1/2},$$

где $\rho_j \in [0, 1)$, $j = 1, 2$. Символом $\mathfrak{B}(U_2)$ обозначим пространство, состоящее из функций $f \in A(U^2)$, которые имеют конечную норму

$$\|f\| := \|f\|_{\mathfrak{B}(U_2)} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{U^2} |f(z_1, z_2)|^2 \, d\sigma_{z_1} \sigma_{z_2} \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \rho_1 \rho_2 M_2^2(f; \rho_1 \rho_2) d\rho_1 d\rho_2 \right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $d\sigma_{z_j} := dx_j dy_j$ $(z_j := x_j + iy_j)$; $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $x_j^2 + y_j^2 < 1$, $j = 1, 2$. Для любого элемента

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_1,j_2}(f) z^{j_1} z^{j_2},$$

принадлежащего пространству $\mathfrak{B}(U_2)$, где $c_{j_1,j_2}(f)$ $(j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_+)$ — коэффициенты Тейлора функции f, запишем, исходя из формулы (1), следующее равенство

$$\|f\| = \left\{ \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{4(j_1+1)(j_2+1)} |c_{j_1,j_2}(f)|^2 \right\}^{1/2}. \tag{2}$$

Символом $\mathfrak{B}^{r_1,r_2}(U_2)$, где $r_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2$, обозначим класс функций $f \in A(U_2)$, у которых смешанные производные $f^{(r_1,r_2)}$ по переменным z_1 и z_2 и частные производные $f^{(r_1,0)}$ и $f^{(0,r_2)}$ по переменной z_1 и z_2 соответственно принадлежат пространству $\mathfrak{B}(U_2)$. Отметим, что функция $f \in \mathfrak{B}^{r_1,r_2}(U_2)$ также принадлежит пространству $\mathfrak{B}(U_2)$, т. е. имеет место включение $\mathfrak{B}^{r_1,r_2}(U_2) \subset \mathfrak{B}(U_2)$. Для натуральных чисел $j_k \geqslant r_k$, где $k = 1, 2$, полагаем

$$\alpha_{j_k,r_k} := j_k(j_k - 1)...(j_k - r_k + 1).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r_j, k_j \in \mathbb{N}$ и $k_j \leqslant r_j$, где $j = 1, 2$. Тогда для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}^{r_1,r_2}(U_2)$, у которой коэффициенты Тейлора удовлетворяют условиям*

$$c_{\nu,r_2-k_2}(f) = ... = c_{\nu,r_2-1}(f) = 0,$$

$$c_{r_1-k_1,\mu}(f) = ... = c_{r_1-1,\mu}(f) = 0,$$

где $\nu = r_1 - k_1, r_1 - k_1 + 1, ..., ; \mu = r_2 - k_2, r_2 - k_2 + 1, ...$; имеет место неравенство типа Колмогорова

$$\left\| f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_{r_1,r_1-k_1}(r_1+1)^{k_1/(2r_1)}}{\alpha_{r_1,r_1}^{1-k_1/r_1}(k_1+1)^{1/2}} \cdot \frac{\alpha_{r_2,r_2-k_2}(r_2+1)^{k_2/(2r_2)}}{\alpha_{r_2,r_2}^{1-k_2/r_2}(k_2+1)^{1/2}} \times$$

$$\times \|f\|^{k_1k_2/(r_1r_2)} \left\| f^{(r_1,0)} \right\|^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2} \left\| f^{(0,r_2)} \right\|^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1} \left\| f^{(r_1,r_2)} \right\|^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}. \tag{3}$$

Неравенство (3) является неулучшаемым в том смысле, что существует функция $f_0 \in \mathfrak{B}^{r_1,r_2}(U_2)$, которая обращает его в равенство. При этом полагаем $\alpha_{r_j,0} := 1$, где $j = 1, 2$.

Доказательство. В случае $r_j = k_j$, где $j = 1, 2$, соотношение (3) очевидно. Когда же $r_1 = k_1$ ($r_1 \in \mathbb{N}$) и $1 \leqslant k_2 \leqslant r_2 - 1$, где $r_2 = 2, 3, \ldots$, или же $r_2 = k_2$ ($r_2 \in \mathbb{N}$) и $1 \leqslant k_1 \leqslant r_1 - 1$, где $r_1 = 2, 3, \ldots$, доказательство неравенства (3) совпадает с доказательством теоремы 1 из работы [4]. Исходя из этого рассмотрим только случай $1 \leqslant k_j \leqslant r_j - 1$, где $r_j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $j = 1, 2$. Пусть f – произвольная функция из класса $\mathfrak{B}^{r_1, r_2}(U_2)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Для частных и смешанных производных данной функции запишем следующие представления:

$$f^{(r_1,0)}(z_1, z_2) = \sum_{j_1=r_1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \alpha_{j_1,r_1} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1-r_1} z_2^{j_2} \ ,$$

$$f^{(0,r_2)}(z_1, z_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=r_2}^{\infty} \alpha_{j_2,r_2} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2-r_2} \ ,$$

$$f^{(r_1,r_2)}(z_1, z_2) = \sum_{j_1=r_1}^{\infty} \sum_{j_2=r_2}^{\infty} \alpha_{j_1,r_1} \alpha_{j_2,r_2} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1-r_1} z_2^{j_2-r_2} \ ,$$

$$f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1, z_2) = \sum_{j_1=r_1}^{\infty} \sum_{j_2=r_2}^{\infty} \alpha_{j_1,r_1-k_1} \alpha_{j_2,r_2-k_2} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1-r_1+k_1} z_2^{j_2-r_2+k_2}.$$

На основании соотношений (1) - (2), равенства Парсеваля и приведенных выше четырех формул получаем следующие равенства:

$$\|f^{(r_1,0)}\|^2 = \sum_{j_1=r_1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{\alpha_{j_1,r_1}^2}{4(j_1 - r_1 + 1)(j_2 + 1)} \ |c_{j_1,j_2}(f)|^2 \ , \tag{4}$$

$$\|f^{(0,r_2)}\|^2 = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=r_2}^{\infty} \frac{\alpha_{j_2,r_2}^2}{4(j_2 - r_2 + 1)(j_1 + 1)} \ |c_{j_1,j_2}(f)|^2 \ , \tag{5}$$

$$\|f^{(r_1,r_2)}\|^2 = \sum_{j_1=r_1}^{\infty} \sum_{j_2=r_2}^{\infty} \frac{\alpha_{j_1,r_1}^2 \alpha_{j_2,r_2}^2}{4(j_1 - r_1 + 1)(j_2 - r_2 + 1)} \ |c_{j_1,j_2}(f)|^2 \ , \tag{6}$$

$$\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|^2 = \sum_{j_1=r_1}^{\infty} \sum_{j_2=r_2}^{\infty} \frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}^2 \alpha_{j_2,r_2-k_2}^2}{4(j_1 - r_1 + k_1 + 1)(j_2 - r_2 + k_2 + 1)} \ |c_{j_1,j_2}(f)|^2. \tag{7}$$

Применяя к правой части формулы (7) ряд тождественных преобразований, получаем

$$\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|^2 =$$

$$= \sum_{j_1=r_1}^{\infty} \sum_{j_2=r_2}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_{j_1,r_1}^2 \alpha_{j_2,r_2}^2}{4(j_1 - r_1 + 1)(j_2 - r_2 + 1)} \ |c_{j_1,j_2}(f)|^2 \right\}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\alpha_{j_1,r_1}^2}{4(j_1 - r_1 + 1)(j_2 + 1)} \ |c_{j_1,j_2}(f)|^2 \right\}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2} \times$$

$$\times\left\{\frac{\alpha_{j_2,r_2}^2}{4(j_2-r_2+1)(j_1+1)}\;|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{4(j_1+1)(j_2+1)}|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\left\{\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{\alpha_{j_1,r_1}^{1-k_1/r_1}\alpha_{j_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right\}^2\times$$

$$\times\frac{(j_1-r_1+1)^{1-k_1/r_1}(j_2-r_2+1)^{1-k_2/r_2}(j_1+1)^{k_1/r_1}(j_2+1)^{k_2/r_2}}{(j_1-r_1+k_1+1)(j_2-r_2+k_2+1)}\,. \tag{8}$$

Полагая

$$\psi_{r_p,k_p}(j_p):=\frac{\alpha_{j_p,r_p-k_p}(j_p-r_p+1)^{(r_p-k_p)/(2r_p)}(j_p+1)^{k_p/(2r_p)}}{\alpha_{j_p,r_p}^{1-k_p/r_p}(j_p-r_p+k_p+1)^{1/2}}\,, \tag{9}$$

где $p=1,2$, из неравенства (8) имеем

$$\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|^2\leqslant\left\{\sup_{j_1\geqslant r_1}\psi_{r_1,k_1}(j_1)\right\}^2\left\{\sup_{j_2\geqslant r_2}\psi_{r_2,k_2}(j_2)\right\}^2\times$$

$$\times\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2}{4(j_1-r_1+1)(j_2-r_2+1)}\;|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\alpha_{j_1,r_1}^2}{4(j_1-r_1+1)(j_2+1)}\;|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$

$$\times\left\{\frac{\alpha_{j_2,r_2}^2}{4(j_2-r_2+1)(j_1+1)}\;|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{4(j_1+1)(j_2+1)}|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\,. \tag{10}$$

Воспользуемся далее обобщением неравенства Гельдера [5, с. 36] на двумерный случай:

$$\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\mu_{j_1,j_2}^a\beta_{j_1,j_2}^b\gamma_{j_1,j_2}^c\delta_{j_1,j_2}^d\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\mu_{j_1,j_2}\right\}^a\left\{\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\beta_{j_1,j_2}\right\}^b\left\{\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\gamma_{j_1,j_2}\right\}^c\left\{\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\delta_{j_1,j_2}\right\}^d\,, \tag{11}$$

где a,b,c,d — положительные числа, такие, что $a+b+c+d=1$, а μ_{j_1,j_2}, β_{j_1,j_2}, γ_{j_1,j_2}, δ_{j_1,j_2} — неотрицательные числа. С учетом неравенства (11) и формул (2) и (4) - (7) из соотношения (10) получаем

$$\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|^2\leqslant\left\{\sup_{j_1\geqslant r_1}\psi_{r_1,k_1}(j_1)\right\}^2\left\{\sup_{j_2\geqslant r_2}\psi_{r_2,k_2}(j_2)\right\}^2\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\frac{\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2}{4(j_1-r_1+1)(j_2-r_2+1)}\ |c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\frac{\alpha_{j_1,r_1}^2}{4(j_1-r_1+1)(j_2+1)}\ |c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\frac{\alpha_{j_2,r_2}^2}{4(j_2-r_2+1)(j_1+1)}\ |c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\frac{1}{4(j_1+1)(j_2+1)}|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sup_{j_1\geqslant r_1}\psi_{r_1,k_1}(j_1)\right\}^2\left\{\sup_{j_2\geqslant r_2}\psi_{r_2,k_2}(j_2)\right\}^2\|f\|^{2k_1k_2/(r_1r_2)}\times$$

$$\times\left\|f^{(r_1,0)}\right\|^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\ \left\|f^{(0,r_2)}\right\|^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\ \left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\ . \tag{12}$$

Из работы авторов [4] следуют равенства

$$\sup_{j_p\geqslant r_p}\psi_{r_p,k_p}(j_p)=\psi_{r_p,k_p}(r_p) \tag{13}$$

где $p=1,2$. Требуемое неравенство (3) получаем из соотношений (9) и (12) – (13).

Покажем неулучшаемость неравенства (3) в указанном в формулировке теоремы 1 смысле. Для этого рассмотрим функцию

$$f_0(z_1,z_2):=z_1^{r_1}z_2^{r_2},$$

принадлежащую классу $\mathfrak{B}^{r_1,r_2}(U_2)$ и удовлетворяющую всем требованиям теоремы 1. Поскольку

$$f_0^{(r_1,0)}(z_1,z_2)=\alpha_{r_1,r_1}z_2^{r_2},$$

$$f_0^{(0,r_2)}(z_1,z_2)=\alpha_{r_2,r_2}z_1^{r_1},$$

$$f_0^{(r_1,r_2)}(z_1,z_2)=\alpha_{r_1,r_1}\alpha_{r_2,r_2},$$

$$f_0^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1,z_2)=\alpha_{r_1,r_1-k_1}\alpha_{r_2,r_2-k_2}z_1^{k_1}z_2^{k_2},$$

то в силу формул (2) и (4) – (6) имеем

$$\|f_0\|=\frac{1}{2\sqrt{(r_1+1)(r_2+1)}}\ ; \tag{14}$$

$$\left\|f_0^{(r_1,0)}\right\|=\frac{\alpha_{r_1,r_1}}{2\sqrt{r_2+1}}\ ;\qquad\left\|f_0^{(0,r_2)}\right\|=\frac{\alpha_{r_2,r_2}}{2\sqrt{r_1+1}}\ ; \tag{15}$$

$$\left\|f_0^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|=\frac{\alpha_{r_1,r_1-k_1}\alpha_{r_2,r_2-k_2}}{2\sqrt{(k_1+1)(k_2+1)}}\ ;\qquad\left\|f_0^{(r_1,r_2)}\right\|=\frac{1}{2}\alpha_{r_1,r_1}\alpha_{r_2,r_2}\ . \tag{16}$$

Подставляя в формулу (3) вместо f, $f^{(r_1,0)}$, $f^{(0,r_2)}$ и $f^{(r_1,r_2)}$ соответственно f_0, $f_0^{(r_1,0)}$, $f_0^{(0,r_2)}$ и $f_0^{(r_1,r_2)}$, а также используя формулы (14) – (16) убеждаемся в том, что неравенство (3) обращается в равенство. Теорема 1 доказана.

Библиографические ссылки

1. *Вакарчук С. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций / С. Б. Вакарчук // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии: Сб. научн. тр. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1988. — С. 4—7.
2. *Вакарчук С. Б.* О мультипликативных неравенствах типа Харди-Литтльвуда-Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных / С. Б. Вакарчук, М. Б. Вакарчук // Вiсник Днiпропетровського ун-ту. Серiя: Математика, 2010. — Т. 18, № 6/1. — С. 81–87.
3. *Вакарчук М. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для аналитических функций одной и нескольких переменных / М. Б. Вакарчук, С. Б. Вакарчук // Abstracts of Intern. Conf. «Approxim. Theory and Appl.» in memory of N. P. Korneichuk, June 14-17, 2010, Dnepropetrovsk, Ukraine. — P. 27.
4. *Вакарчук С. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций / С. Б. Вакарчук, М. Б. Вакарчук // Вiсник Днiпропетровського ун-ту. Серiя: Математика, 2012. — Т. 20, № 6/1. — С. 82–88.
5. *Харди Г. Г.* Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.

Надійшла до редколегії 01.09.2012