ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип. **18**

УДК 512.544

Про деякі властивості операції добутку фаззі-груп

В. А. Чупордя*, **А. С. Марковська****

* Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровск 49010. *E-mail: vchupordya@mail.ru*

** Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровск 49010. *E-mail: yadsan@mail.ru*

Отримано аналог тотожністі Дедекінда для фаззі-груп, а також умови за яких фаззі-підгрупа фаззі-групи буде мати доповнення.

Ключові слова: **група, фаззі-група, тотожність Дедекінда, доповнення.**

Получен аналог тождества Дедекинда для фаззи-групп, а также условия, при которых фаззи-подгруппа будет иметь дополнение.

Ключевые слова: **группа, фаззи-группа, тождество Дедекинда, дополнение.**

Very important role in abstract group theory play a Dedekind's modular law. It was proved modular law for fuzzy groups. It was obtained conditions for a fuzzy subgroup has a direct complement.

Key words: **group, fuzzy group, Dedekind's modular law, direct complement.**

Л. А. Заде ввів поняття фаззі-підмножини в 1965 році. Його ідеї визначили нові напрями досліджень і викликали інтерес в усьому світі. В 1971 році Азріель Розенфілд використовує поняття фаззі-підмножини деякої множини для того, щоб ввести поняття фаззі-підгрупи. Робота А. Розенфілда включає дослідження в абстрактній фаззі-алгебрі.

А. Розенфілд у [2], при формулюванні поняття фаззі-підгруп також заклав основу досліджень структури решіток фаззі-множин. У [3] було розпочато такі ж дослідження в області теорії фаззі-підгруп. Так у роботах [3; 4] побудовано решітку всіх фаззі-підгруп даної групи G за звичайним порядком включення фаззі-множин, зокрема, було доведено, що спеціальний клас нормальних фаззі-підгруп утворює модулярну підрешітку решітки всіх фаззі-підгруп.

У даній роботі доведено аналог тотожності Дедекінда для фаззі-груп, а також розглянуто деякі питання доповнення фаззі-підгруп.

Функцію $\mu : X \mapsto [0,1]$ будемо називати фаззі-підмножиною множини X. Множину всіх таких функцій будемо позначати $FP(X)$.

Множину $\{\mu(x) |\, x \in X\}$, де $\mu \in FP(X)$, будемо називати образом μ, а множину $\mathrm{Supp}(\mu) = \{x \in X |\, \mu(x) > 0\}$ – носієм μ. Нехай $Y \subseteq X$ та $a \in [0,1]$. Визначимо функцію

$$\chi(Y,a) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in Y \\ 0, & \text{якщо } x \notin Y. \end{cases}$$

Зокрема, якщо $Y = \{y\}$, то $\chi(y, a)$ називають фаззі-точкою.

Нехай $\mu, \nu \in FP(X)$. Будемо говорити, що $\mu \subseteq \nu$ якщо для довільного $x \in X$ має місце нерівність $\mu(x) \leq \nu(x)$.

Нехай M є підмножина $[0, 1]$, тоді через $\wedge M$ позначимо найбільшу нижню границю M, а через $\vee M$ – найменшу верхню границю M. У випадку, коли $M = \{a, b\}$, замість $\wedge M$ (відповідно $\vee M$) будемо писати $a \wedge b$ (відповідно $a \vee b$).

На множині $FP(X)$ визначимо операції $\cup$ і $\cap$:

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x),$$

$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x),$$

для довільного $x \in X$.

Нехай μ, ν – фаззі-множини на групі G, визначимо операцію $\bullet$ за наступним правилом:

$$(\mu \bullet \nu)(x) = \bigvee_{y,z \in G, yz = x} (\mu(y) \wedge \nu(z)).$$

Зазначимо, що $(\mu \bullet \nu)(x) = \bigvee_{y \in G}(\mu(y) \wedge \nu(y^{-1}x)) = \bigvee_{z \in G}(\mu(xz^{-1}) \wedge \nu(z)$.

Нехай $\mu \in FP(G)$ і $x \in X$, покладемо $\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$.

Нехай G – група, на якій задана мультиплікативна бінарна операція. Одиничний єлемент G будемо позначати через e, щоб уникнути плутанини з числом 1. Нагадаємо, що фаззі-групою на G називається відображення $\gamma : G \to [0, 1]$, яке задовольняє наступні умови:

1) $\gamma(xy) \geq \gamma(x) \wedge (y)$, для довільних $x, y \in G$,

2) $\gamma(x^{-1}) \geq \gamma(x)$, для довільних $x \in G$.

Множину всіх фаззі підгруп групи G, будемо позначати через $F(G)$.

Якщо γ, μ – фаззі-групи на G та $\gamma \subseteq \mu$, то будемо говорити, що γ є фаззі-підгрупою μ і позначати це символом $\gamma \preceq \mu$.

Для підгруп групи G має місце наступне твердження, яке називають тотожністю Дедекінда:

Твердження 1. Нехай G – група і $H, K, L \leq G$ припустимо, що $K \leq L$, тоді $(HK) \cap L = (H \cap L)K$. Зокрема, якщо $HK = KH$, то $\langle H, K \rangle \cap L = \langle H \cap L, K \rangle$.

Розглянемо спочатку аналог для фаззі-підгруп першої частини твердження 1.

Твердження 2. Нехай G – група $\alpha, \beta, \gamma \in F(G)$ і $\alpha \preceq \beta$, тоді $(\gamma \bullet \alpha) \cap \beta = (\gamma \cap \beta) \bullet \alpha$.

Доведення.

$$[(\gamma \bullet \alpha) \cap \beta](x) = (\gamma \bullet \alpha)(x) \wedge \beta(x) = [\bigvee_{uv=x} \gamma(u) \wedge \alpha(v)] \wedge \beta(x) = \bigvee_{uv=x} \gamma(u) \wedge \alpha(v) \wedge \beta(x) =$$

$$= \bigvee_{uv=x} \gamma(u) \wedge \alpha(v) \wedge \beta(uv) = \bigvee_{uv=x} \gamma(u) \wedge \beta(uv) \wedge \alpha(v) \geq \bigvee_{uv=x} \gamma(u) \wedge \beta(u) \wedge \beta(v) \wedge \alpha(v) \geq$$

$$\geq \bigvee_{uv=x} \gamma(u) \wedge \beta(u) \wedge \alpha(v) \wedge \alpha(v) = \bigvee_{uv=x} \gamma(u) \wedge \beta(u) \wedge \alpha(v) = \bigvee_{uv=x} (\gamma \cap \beta)(u) \wedge \alpha(v) =$$
$$= [(\gamma \cap \beta) \bullet \alpha](x)$$

Таким чином $(\gamma \bullet \alpha) \cap \beta \geq (\gamma \cap \beta) \bullet \alpha$.

Навпаки

$$[(\gamma \cap \beta) \bullet \alpha](x) = \bigvee_{uv=x} \gamma(u) \wedge \beta(u) \wedge \alpha(v) = \bigvee_{u=xv^{-1}} \gamma(xv^{-1}) \wedge \beta(xv^{-1}) \wedge \alpha(v) \geq$$

$$\geq \bigvee_{u=xv^{-1}} \gamma(xv^{-1}) \wedge \beta(x) \wedge \beta(v^{-1}) \wedge \alpha(v) \geq \bigvee_{u=xv^{-1}} \gamma(xv^{-1}) \wedge \beta(x) \wedge \alpha(v) \wedge \alpha(v) =$$

$$= \bigvee_{u=xv^{-1}} \gamma(xv^{-1}) \wedge \beta(x) \wedge \alpha(v) = \bigvee_{u=xv^{-1}} \gamma(xv^{-1}) \wedge \alpha(v) \wedge \beta(x) = (\gamma \bullet \alpha)(x) \wedge \beta(x) =$$
$$= [(\gamma \bullet \alpha) \cap \beta](x).$$

Отже, $(\gamma \bullet \alpha) \cap \beta \leq (\gamma \cap \beta) \bullet \alpha$.

Нехай $\mu \in FP(G)$. Тоді $\langle\mu\rangle = \bigcap\{\nu \mid \mu \subseteq \nu,\ \nu \in F(G)\}$ будемо називати фаззі-підгрупою G породженою μ.

Іншими словами, $\langle\mu\rangle$ – найменша фаззі-підгрупа, яка містить у собі μ.

Теорема 1. *(Критерій фаззі підгрупи [1]) Нехай $\mu \in FP(G)$ тоді $\mu \in F(G)$ тоді і тільки тоді, коли $\mu \bullet \mu \subseteq \mu$ і $\mu^{-1} \subseteq \mu$.*

Лема 1. *Нехай α, $\beta \in F(G)$, і $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$, тоді $\langle\alpha, \beta\rangle = (\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta$.*

Доведення. Нехай $\gamma = (\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta$. Очевидно, що $\alpha \subseteq (\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta$ і $\beta \subseteq (\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta$. Крім того $((\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta)^{-1} = (\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta$. Покажемо, що $\gamma \bullet \gamma \subseteq \gamma$.

$$(\gamma \bullet \gamma)(x) = \bigvee_{uv=x} [\alpha(u) \vee \beta(u) \vee (\alpha \bullet \beta)(u)] \wedge [\alpha(v) \vee \beta(v) \vee (\alpha \bullet \beta)(v)] \leq$$

$$\leq \alpha(x) \vee (\alpha \bullet \beta)(x) \vee [\alpha \bullet (\alpha \bullet \beta)](x) \vee (\beta \bullet \alpha)(x) \vee \beta(x) \vee [\beta \bullet (\alpha \bullet \beta)](x) \vee [(\alpha \bullet \beta) \bullet \alpha](x) \vee$$
$$\vee [(\alpha \bullet \beta) \bullet \beta](x) \vee (\alpha \bullet \beta)(x) = [\alpha \cup \beta \cup (\alpha \bullet \beta)](x) = \gamma(x)$$

Отже, $(\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta \in F(G)$. Таким чином $\langle\alpha, \beta\rangle \subseteq (\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta$. Нехай тепер $\mu \in F(G)$ така, що $\alpha \subseteq \mu$ і $\beta \subseteq \mu$. Тоді $\alpha \cup \beta \subseteq \mu$, крім того $\alpha \bullet \beta \subseteq \mu$, а отже $(\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta \subseteq \mu$, а це означає, що $(\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta \subseteq \langle\alpha, \beta\rangle$, що у свою чергу означає, що $(\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta = \langle\alpha, \beta\rangle$.

Розглянемо тепер аналог другої частини тотожності Дедекінда для фаззі підгруп.

Твердження 3. Нехай G – група $\alpha, \beta, \gamma \in F(G)$, $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$ і $\beta \prec \gamma$, тоді $\langle \alpha, \beta \rangle \cap \gamma = \langle \alpha \cap \gamma, \beta \rangle$.

Доведення.

$$[\langle \alpha, \beta \rangle \cap \gamma](x) = \langle \alpha, \beta \rangle(x) \wedge \gamma(x) = [(\alpha \bullet \beta) \cup \alpha \cup \beta](x) \wedge \gamma(x) = [(\alpha \bullet \beta)(x) \vee \alpha(x) \vee \beta(x)] \wedge \gamma(x) =$$

$$= [(\alpha \bullet \beta)(x) \wedge \gamma(x)] \vee [\alpha(x) \wedge \gamma(x)] \vee [\beta(x) \wedge \gamma(x)] = [(\alpha \bullet \beta)(x) \wedge \gamma(x)] \vee (\alpha \cap \gamma)(x) \vee \beta(x) =$$

$$= [(\alpha \bullet \beta) \cap \gamma](x) \vee (\alpha \cap \gamma)(x) \vee \beta(x) = [(\alpha \cap \gamma) \bullet \beta](x) \vee (\alpha \cap \gamma)(x) \vee \beta(x) = \langle \alpha \cap \gamma, \beta \rangle(x)$$

Таким чином, враховуючи результати твердження 2 та твердження 3, має місце наступна теорема

Теорема 2. *Нехай G – група, α, β, γ – фаззі-групи на G. Припустимо, що $\beta \preceq \gamma$, тоді $(\alpha \bullet \beta) \cap \gamma = (\alpha \cap \gamma) \bullet \beta$. Зокрема, якщо $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$ то $\langle \alpha, \beta \rangle \cap \gamma = \langle \alpha \cap \gamma, \beta \rangle$.*

Наслідок 1. *Нехай G – група і γ – фаззі-група на G. Тоді решітка всіх нормальних фаззі-підгруп γ є модулярною.*

У випадку, коли $\gamma = \chi(G, 1)$, останнє твердження було отримано в роботах [3, 4].

Нехай α, $\gamma \in F(G)$, де $\alpha \preceq \gamma$, тоді фаззі-підгрупу $\beta \in F(G)$, де $\beta \preceq \gamma$ будемо називати доповненням α до γ якщо $\gamma = \alpha \bullet \beta$ і $\alpha \cap \beta = \chi(e, \gamma(e))$.

Твердження 4. Нехай α, $\gamma \in F(G)$ і $\mathrm{Supp}(\alpha) = H$, $\mathrm{Supp}(\gamma) = G$, де $G = HK$, $H \cap K = \langle e \rangle$, і нехай існує фаззі-підгрупа $\beta \in F(G)$ така, що $\mathrm{Supp}(\beta) = K$, і $\gamma = \alpha \bullet \beta$ тоді $\alpha(e) = \gamma(e) = \beta(e)$ і $\alpha(x) = \gamma(x)$, для довільного $x \in H$ і $\beta(x) = \gamma(x)$, для довільного $x \in K$.

Доведення. Нехай $h \in H$ і $k \in K$, тоді

$$\gamma(h) = (\alpha \bullet \beta)(h) = \bigvee_{uv=h} \alpha(u) \wedge \beta(v) = \alpha(h) \wedge \beta(e) = \alpha(h),$$

$$\gamma(k) = (\alpha \bullet \beta)(k) = \bigvee_{uv=k} \alpha(u) \wedge \beta(v) = \alpha(e) \wedge \beta(k) = \beta(k).$$

Теорема 3. *Нехай G – група, H, $K < G$, $G = HK$, $H \cap K = \langle e \rangle$, $\gamma \in F(G)$, і нехай $\mathrm{Supp}(\gamma) = G$, тоді якщо $\bigvee\{\gamma(x) | x \in (H \cup K) \setminus \{e\}\} \geq \bigvee\{\gamma(x) \mid x \in G \setminus (H \cup K)\}$, то звуження фаззі-підгрупи γ на K є доповненням звуження γ на H, тобто $\gamma = \gamma|_H \bullet \gamma|_K$.*

Доведення. Нехай $\alpha = \gamma|_H$, $\beta = \gamma|_K$.

Тоді за теоремою 4 для довільних $h \in H$ і $k \in K$ будемо мати: $\gamma(h) = (\alpha \bullet \beta)(h)$ і $\gamma(k) = (\alpha \bullet \beta)(k)$.

Розглянемо довільний елемент $x \in G \setminus (H \cup K)$, тоді

$$(\alpha \bullet \beta)(x) = \bigvee_{uv=x} \alpha(u) \wedge \beta(v) = \bigvee_{hk=x,\ h\in H,\ k\in K} \alpha(h) \wedge \beta(k) = \bigvee_{hk=x,\ h\in H,\ k\in K} \gamma(h) \wedge \gamma(k) \leq \gamma(x).$$

З іншого боку:

$$(\alpha \bullet \beta)(x) = \bigvee_{hk=x,\ h\in H,\ k\in K} \alpha(h) \wedge \beta(k) = \bigvee_{h\in H} \gamma(h^{-1}x) \wedge \gamma(h) \geq \gamma(x) \wedge (\bigvee_{h\in H} \gamma(h)).$$

Аналогічно:

$$(\alpha \bullet \beta)(x) = \bigvee_{hk=x,\ h\in H,\ k\in K} \alpha(h) \wedge \beta(k) = \bigvee_{k\in K} \gamma(xk^{-1}) \wedge \gamma(k) \geq \gamma(x) \wedge (\bigvee_{k\in K} \gamma(k)).$$

За умовою $\bigvee\{\gamma(x) \mid x \in (H \cup K) \setminus \{e\}\} \geq \bigvee\{\gamma(x) \mid x \in G \setminus (H \cup K)\}$, а отже $(\alpha \bullet \beta)(x) \geq \gamma(x)$. Таким чином має місце рівність $(\alpha \bullet \beta)(x) = \gamma(x)$.

Наслідок 2. *Наслідок Нехай G – елементарна абелева група, $\gamma \in F(G)$, і нехай* $\mathrm{Supp}(\gamma) = G$, *тоді довільне звуження γ на довільну власну підгрупу групи G має доповнення.*

Доведення. Розглянемо довільну власну підгрупу H групи G. Позначимо $\alpha = |_H$.

Якщо $\bigvee\{\gamma(x) \mid x \in H \setminus \{e\}\} = \bigvee\{\gamma(x) \mid x \in G \setminus \{e\}\}$, тоді розглянемо довільне доповнення K підгрупи H до G. За твердженням 3 будемо мати $\gamma = \alpha \bullet \gamma|_K$.

Якщо $\bigvee\{\gamma(x) \mid x \in H \setminus \{e\}\} < \bigvee\{\gamma(x) \mid x \in G \setminus \{e\}\}$, то, зважаючи на те, що G – елементарна абелева група, існує доповнення K підгрупи H до G, таке, що $\bigvee\{\gamma(x) \mid x \in K \setminus \{e\}\} = \bigvee\{\gamma(x) \mid x \in G \setminus \{e\}\}$. Знову за твердженням 3 будемо мати $\gamma = \alpha \bullet \gamma|_K$.

Бібліографічні посилання

1. *John N. Mordeson, Kiran R. Bhutani, Azriel Rosenfeld* Fuzzy Group Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
2. *Rosenfeld A.* Fuzzy groups // J. Math. Anal. Appl. – 1971. – 35. – P. 512–517.
3. *Ajmal N., Thomas K. V.* The lattices of fuzzy subgroups and fuzzy normal subgroups // Inform. Sci. – 1994. – 76. – P. 1–11.
4. *Ajmal N.* The Lattice of Fuzzy Normal Subgroups is Modular // Inform. Sci. – 1995. – 83. – P. 199–209.

Надійшла до редколегії 01.04.2013