ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2014, вип. **19**

УДК 517.518

С. Б. Вакарчук*, М. Б. Вакарчук**

* Днепропетровский университет им. Альфреда Нобеля,
Днепропетровск 49000. *E-mail: sbvakarchuk@mail.ru*
** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: vacarchuk@ukr.net*

Точные неравенствах типа Джексона в весовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$

Точні нерівності типу Джексона отримано на класах диференційованих функцій двох змінних у випадку найкращого наближення "кутами" з алгебраїчних поліномів у метриці простору $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ з вагою Чебишева-Ерміта.

Ключові слова: **узагальнений модуль неперервності, найкраще наближення "кутом", многочлени Чебишева-Ерміта**

Точные неравенства типа Джексона получены на классах дифференцируемых функций двух переменных в случае наилучшего приближения "углами" из алгебраических полиномов в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ с весом Чебышева-Эрмита.

Ключевые слова: **обобщенный модуль непрерывности, наилучшее приближение "углом", многочлены Чебышева-Эрмита.**

Exact inequalities of Jackson type, connected with the best approximation by "angles" of algebraic polynomials have been obtained on the classes of differentiable functions of two variables in the metric of space $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ of the Chebyshev-Hermite wieght.

Key words: **generalized modulus of continuity, best approximation by "angle", Chebyshev-Hermite polynomials.**

Пусть $L_2(\mathbb{R}^2)$, где $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \{(x,y) : -\infty < x, y < \infty\}$, есть пространство измеримых функций суммируемых на плоскости $\mathbb{R}^2$ с квадратом модуля. Символом $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, где $\rho(x,y) := \exp(-(x^2+y^2)/2)$, обозначим множество функций f, для которых $f \cdot \rho \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Отметим, что норма в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ определяется формулой

$$\|f\| := \|f\|_{2,\rho} = \left\{ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x,y) \cdot \rho(x,y)|^2 dxdy \right\}^{1/2}.$$

В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим оператор обобщенного сдвига [1]

$$F_h(f) := F_h f(x,y) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f\left(x\sqrt{1-h^2} + hu, y\sqrt{1-h^2} + hv\right) \rho^2(u,v)dudv,$$

где $0 < h \leqslant 1$. Как и в классическом случае, определим аналоги конечных разностей первого и высших порядков функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, используя для этого оператор $F_h(f)$:

$$\Delta_h^1(f) := \Delta_h^1(f; x, y) = F_h f(x,y) - f(x,y) = (F_h - \mathbb{I}) f(x,y),$$

$$\Delta_h^k(f) := \Delta_h^1\left(\Delta_h^{k-1}(f)\right) = \Delta_h^1\left(\Delta_h^{k-1}(f); x, y\right) = (F_h - \mathbb{I})^k f(x,y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x,y). \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$; $F_h^0(f) := f$; $F_h^1(f) := F_h(f)$; $F_h^i(f) := F_h\left(F_h^{i-1}(f)\right)$, $i = 1, ..., k$; $k \in \mathbb{N}$. Величину

$$\widetilde{\omega}_k(f, t) := \sup\left\{\left\|\Delta_h^k(f)\right\| : 0 < h \leqslant t\right\}, \tag{2}$$

где $0 < t \leqslant 1$, будем называть обобщенным модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $H_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, есть ортонормированная система полиномов Эрмита (см., например, [2]) и

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) H_i(x) H_j(y) \tag{3}$$

— двойной ряд Фурье-Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, а

$$c_{ij}(f) := \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) H_i(x) H_j(y) \rho^2(x,y)\, dx dy$$

— коэффициенты Фурье-Эрмита для f. Символом $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$, $\widetilde{\rho}(x) := \exp(-x^2/2)$, обозначим множество измеримых функций f таких, что функции $f \cdot \widetilde{\rho}$ суммируемы на действительной оси $\mathbb{R}$ с квадратом модуля. Пусть $L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ (соответственно $L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$) есть пространство $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R})$ в случае, когда в качестве $\mathbb{R}$ выступает ось абсцисс OX (соответственно ось ординат OY). Полагаем, что $\mathfrak{M}_{N+1} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{N}_{M+1} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$ есть конечномерные подпространства с базисами $\{H_i(x)\}_{i=0}^{N}$ и $\{H_j(y)\}_{j=0}^{M}$ соответственно, где $N, M \in \mathbb{Z}_+$. В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим множество функций

$$G\left(\mathfrak{M}_{N+1}, \mathfrak{N}_{M+1}\right) := L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{M}_{N+1} \oplus L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{N}_{M+1}, \tag{4}$$

где символами $\otimes$ и $\oplus$ обозначены соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (4) имеют следующий вид:

$$g_{N,M}(x,y) := \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(y) H_i(x) + \sum_{j=0}^{M} \psi_j(x) H_j(y), \tag{5}$$

где $\{\varphi_i\}_{i=0}^N \subset L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$ и $\{\psi_j\}_{j=0}^M \subset L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ есть произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (5) называют "углами" из алгебраических полиномов [3]. Отметим, что впервые понятие "угла", как одного из эффективных методов теории аппроксимации функций многих переменных, было введено М.К.Потаповым в работе [4] и нашло широкое применение в исследованиях других математиков.

Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ символом $\mathcal{E}_{N,M}(f)$ обозначим её наилучшее приближение элементами множества (4) в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, т.е.

$$\mathcal{E}_{N,M}(f) := \inf\left\{\|f - g_{N,M}\| : g_{N,M} \in G\left(\mathfrak{M}_{N+1}, \mathfrak{N}_{M+1}\right)\right\}.$$

Символами $S_{N,\infty}(f)$ и $S_{\infty,M}(f)$ обозначим частные суммы ряда (3) функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядков N по x и M по y соответственно, которые имеют следующий вид:

$$S_{N,\infty}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y),$$

$$S_{\infty,M}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y).$$

Под $S_{N,M}(f)$ понимаем прямоугольную частную сумму ряда Фурье-Эрмита (3) функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядков N по x и M по y

$$S_{N,M}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y).$$

Функцию

$$\widetilde{S}_{N,M}(f;x,y) = S_{N,\infty}(f;x,y) + S_{\infty,M}(f;x,y) - S_{N,M}(f;x,y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) - \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) \quad (6)$$

будем называть обобщенным полиномом Фурье-Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядка N по x и M по y. Можно показать, что функция (6) принадлежит множеству (4), т.е. имеет место представление (5). Используя идею доказательства леммы 1 из работы [5], можно показать справедливость равенства

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f) = \left\| f - \widetilde{S}_{N-1,M-1}(f) \right\| = \left\{ \sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}^2(f) \right\}^{1/2}, \quad (7)$$

т.е. среди всех элементов $g_{N-1,M-1}$ вида (5), принадлежащих множеству $G(\mathfrak{M}_{N-1}, \mathfrak{N}_{M-1})$, наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ доставляет её обобщенный полином Фурье-Эрмита $\widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)$ порядков $N-1$ по x и $M-1$ по y.

Рассмотрим оператор [1]

$$D := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Символом $L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, имеющих обобщенные частные производные $\partial^m f/\partial x^i \partial y^j$, $i+j=m$; $m=1,...,2r$, принадлежащие пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. При этом $D^0 f := f$, $D^r f := D(D^{r-1}f) \in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $N, M, k \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < t \leqslant 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2) \\ f \not\equiv const}} \frac{2^r (N+M)^r \mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\left\{ \int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h) dh \right\}^k} = \left\{ \int\limits_0^t (1-(1-h^2)^{(N+M)/2}) dh \right\}^{-k}, \qquad (8)$$

где $L^0_{2,\rho}(\mathbb{R}^2) \equiv L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство теоремы 1. В работе [1] было получено разложение функции $F_h f$ в ряд Фурье-Эрмита. С учетом того, что $f \in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, $f \not\equiv const$, и имеет место разложение (3), для $F_h f$ запишем

$$F_h f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)(1-h^2)^{(i+j)/2} H_i(x) H_j(y). \qquad (9)$$

Отметим, что равенство (9) понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. Из формул (3) и (9) получаем

$$\Delta^1_h(f; x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) \left((1-h^2)^{(i+j)/2} - 1 \right) H_i(x) H_j(y). \qquad (10)$$

Используя формулы (1) и (10), на основании метода математической индукции имеем

$$\Delta^k_h(f; x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) \left((1-h^2)^{(i+j)/2} - 1 \right)^k H_i(x) H_j(y), \qquad (11)$$

где $k = 2, 3, ...$, причем равенство в формуле (11) понимаем в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. С учетом соотношений (2) и (11) запишем

$$\widetilde{\omega}_k(f, t) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - (1-t^2)^{(i+j)/2} \right)^{2k} c^2_{ij}(f) \right\}^{1/2}. \qquad (12)$$

Используя формулу (7), получаем

$$\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)-\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)(1-h^2)^{(i+j)/2}=\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right)=$$

$$=\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}\left(c^2_{ij}(f)\right)^{1-1/(2k)}\left(c^2_{ij}(f)\right)^{1/(2k)}\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right). \tag{13}$$

В работе [1] было показано, что для функции $f\in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ имеют место равенства

$$c_{ij}(f)=(-1)^r\frac{1}{2^r(i+j)^r}c_{ij}(D^rf), \tag{14}$$

где $i,j\in\mathbb{N}$. Используя неравенство Гельдера, равенства (13)–(14) и соотношения (7) и (12), запишем

$$\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)-\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)(1-h^2)^{(i+j)/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)\right\}^{1-1/(2k)}\left\{\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right)^{2k}\right\}^{1/(2k)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2^{2r}(N+M)^{2r}}\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}2^{2r}(i+j)^{2r}c^2_{ij}(f)\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right)^{2k}\right\}^{1/(2k)}\times$$

$$\times\left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)}=\left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)}\frac{1}{2^{r/k}(N+M)^{r/k}}\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(D^rf)\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right)^{2k}\right\}^{1/(2k)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)}\frac{\widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^rf,h)}{2^{r/k}(N+M)^{r/k}}\ .$$

Из данного соотношения получаем

$$\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\leqslant\left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)}\frac{\widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^rf,h)}{2^{r/k}(N+M)^{r/k}}+$$

$$+\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)(1-h^2)^{(i+j)/2}\ . \tag{15}$$

Интегрируя обе части неравенства (15) по h в пределах от 0 до t, где $0 < t \leqslant 1$, и используя формулу (7), имеем

$$t \cdot \mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f) \leqslant \left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)} \frac{1}{2^{r/k}(N+M)^{r/k}} \int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h)dh+$$

$$+\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f) \int\limits_0^t (1-h^2)^{(N+M)/2} dh.$$

Отсюда получаем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f \in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)\\ f \not\equiv const}} \frac{2^r (N+M)^r \mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h)dh\right\}^k} \leqslant \left\{\int\limits_0^t (1-(1-h^2)^{(N+M)/2})dh\right\}^{-k}. \qquad (16)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части неравенства (16), рассмотрим функцию $f_0(x,y) := H_N(x)H_M(y)$, которая принадлежит классу $L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. В силу формулы (7) имеем

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f_0) = \|f_0\| = 1. \qquad (17)$$

Поскольку, на основании формулы (14),

$$c_{N,M}(D^r f_0) = (-1)^r 2^r (N+M)^r c_{N,M}(f_0),$$

то из соотношения (12) получаем

$$\widetilde{\omega}_k(D^r f_0, h) = \left(1-(1-h^2)^{(N+M)/2}\right)^k |\, c_{N,M}(D^r f_0)| =$$

$$= 2^r (N+M)^r \left(1-(1-h^2)^{(N+M)/2}\right)^k. \qquad (18)$$

Используя равенства (17)–(18) , запишем

$$\sup_{\substack{f \in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)\\ f \not\equiv const}} \frac{2^r (N+M)^r \mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h)dh\right\}^k} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2^r (N+M)^r \mathcal{E}_{N-1,M-1}(f_0)}{\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f_0, h)dh\right\}^k} = \left\{\int\limits_0^t (1-(1-h^2)^{(N+M)/2})dh\right\}^{-k}. \qquad (19)$$

Сопоставляя оценку сверху (16) с оценкой снизу (19), получаем требуемое равенство (8). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $N, M, k \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < t \leqslant 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2) \\ f \not\equiv const}} \frac{2^r (N+M)^r |c_{N,M}(f)|}{\left\{ \int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h) dh \right\}^k} = \left\{ \int\limits_0^t (1 - (1-h^2)^{(N+M)/2}) dh \right\}^{-k}.$$

где $c_{N,M}(f)$ — *коэффициент Фурье-Эрмита функции* f.

Библиографические ссылки

1. *Абилов В. А.* Приближение функций в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N, \exp(-|x|^2))$ / В. А. Абилов, М.В.Абилов // Матем. заметки, 1995. — Т. 57, № 1. — С. 3–19.
2. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сегё. — М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.
3. *Ржавинская Е. В.* О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_p с весом / Е. В Ржавинская // Дис. канд. физ.-мат. наук. — М., 1980. — 126 с.
4. *Потапов М. К.* О приближении "углом" / М. К. Потапов // Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Functions. — Budapest, 1972. — P. 371–399.
5. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных / С. Б. Вакарчук // Изв. вузов. Математика, 1991. — № 7. — С. 14–25.

Надійшла до редколегії 01.01.2001