УДК 517.5

Ю. С. Загорулько*, А. А. Кофанов**

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: yuliya.zagorulko@gmail.com*

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

О продолжении дифференцируемых функций с отрезка их монотонности и неравенства типа Колмогорова

Досліджена можливість продовження будь-якої функції $f \in L^r_\infty(\mathbb{R})$ з довільного її відрізкіа монотонності I на всю вісь зі збереженням норм f і $f^{(r)}$ на відрізку.

Ключові слова: **Нерівності типу Колмогорова, теорема порівняння Колмогорова.**

Исследована возможность продолжения произвольной функции $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ с любого отрезка I монотонности f на всю ось с сохранением норм f и $f^{(r)}$ на отрезке.

Ключевые слова: **Неравенства типа Колмогорова, теорема сравнения Колмогорова.**

It is studied the posibility of extension for every function $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ from any monotonicity interval I of function f to the whole axis with retaining norms f and $f^{(r)}$ on interval.

Key words: **Kolmogorov-type inequalities, the comparison theorem of Kolmogorov.**

Пусть $G \subset \mathbb{R}$ — некоторое измеримое подмножество числовой оси. Через $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство измеримых функций f, таких что $\|f\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|f\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai}\sup_{t \in G} |f(t)|, \quad \text{если} \quad p = \infty.$$

В качестве G будем рассматривать отрезок $I = [a, b]$, действительную ось $\mathbb{R}$ или окружность T, реализованную в виде отрезка $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Если $f \in L_p(T)$, положим для краткости $\|f\|_p := \|f\|_{L_p(T)}$ и для $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ вместо $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$ также будем писать $\|f\|_\infty$.

Для $r \in \mathbb{N}$ через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство функций $f \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно, причем $f^{(r)} \in L_\infty(G)$. Положим

$$W^r_\infty(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^r_\infty(\mathbb{R}) : \|f^{(r)}\|_\infty \le 1 \right\}.$$

Символом $\varphi_r(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) := \operatorname{sign}\sin t$, и для $\lambda > 0$ пусть $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Для функции $f \in L_\infty[a,b]$ положим

$$E_0(f)_{L_\infty[a,b]} := \inf_{c\in\mathbb{R}} \|f-c\|_{L_\infty[a,b]}.$$

Аналогичный смысл имеет обозначение $E_0(f)_{L_\infty(\mathbb{R})}$ для $f \in L_\infty(\mathbb{R})$.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, а функция $f \in L^r_\infty(T)$ такова, что для любого отрезка $I = [a,b]$, удовлетворяющего условиям:*

$$f^{'}(a) = f^{'}(b) = 0, \;\; f^{'}(t) \neq 0, \;\; t \in (a,b), \tag{1}$$

существует функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$, такая что

$$f_I(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{2}$$

$$E_0(f_I)_{L_\infty} \leq E_0(f)_{L_\infty[a,b]} \tag{3}$$

и

$$\|f_I^{(r)}\|_\infty \leq \|f^{(r)}\|_{L_\infty[a,b]}. \tag{4}$$

Тогда для любых q, $p \geq 1$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq r-1$, справедливо точное на классе $L^r_\infty(T)$ неравенство

$$\|f^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha}\|f\|_p^\alpha \|f^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \tag{5}$$

с максимально возможным показателем

$$\alpha = \min\left\{\frac{r-k}{r}, \frac{r-k+1/q}{r+1/p}\right\}.$$

Точные неравенства вида (5), называемые неравенствами типа Колмогорова, играют важную роль при решении многих экстремальных задач теории приближения [2]. В работе [1] также доказано, что при $r=2$, $k=1$ и $r=3$, $k=1$ или $k=2$, неравенство (5) имеет место для любой функций $f \in L^r_\infty(T)$.

Авторами этой работы высказана гипотеза о справедливости неравенства (5) на классах $L^r_\infty(T)$ для любых $k,r \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq r-1$ и любых $q,p \geq 1$.

Поэтому представляет интерес следующий вопрос. Верно ли, что любых функций $f \in L^r_\infty(T)$ и отрезка $I = [a,b]$, для которых выполнены условия (1), существует функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая требованиям (2)- (4)?

Положительный ответ на этот вопрос в силу теоремы **??** был бы одновременно положительным ответом на сформулированную выше гипотезу.

Однако в данной статье показано, что ответ на поставленный вопрос отрицательный. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для некоторого $r \in \mathbb{N}$ существуют функция $f \in L^r_\infty(T)$ и отрезок $I = [a, b]$, для которых выполнены условия (1), но для них в классе $L^r_\infty(\mathbb{R})$ нет функций $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей требованиям (2) – (4).*

Доказательство этой теоремы опирается нас следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, а функция $f \in L^r_\infty(T)$ и отрезок $I = [a, b]$, удовлетворяющие условию , таковы, что для них существует функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$, для которой выполнены требования (2)-(4). Тогда справедливо неравенство*

$$E_0(f)_{L_\infty[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^r \|\varphi_r\|_\infty \|f^{(r)}\|_{L_\infty[a,b]}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как неравенство (6) однородно, можно считать что

$$\|f^{(r)}\|_{L_\infty[a,b]} = 1. \tag{7}$$

Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$E_0(f)_{L_\infty[a,b]} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = \lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty. \tag{8}$$

Тогда согласно условиям (3) - (4) леммы

$$\|f_I^{(r)}\|_\infty = 1$$

и

$$E_0(f_I)_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

Следовательно, $f_I \in W^r_\infty(\mathbb{R})$ и для нее выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [3]. Из этой теоремы вытекает неравенство

$$\frac{\pi}{\lambda} \le b - a,$$

которое с учетом (8) можно переписать в виде

$$\left(\frac{E_0(f)_{L_\infty[a,b]}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r}} \le \frac{b-a}{\pi}.$$

Отсюда имеем

$$E_0(f)_{L_\infty[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^r \|\varphi_r\|_\infty.$$

Последнее неравенство в силу (7) равносильно неравенству (6).

Доказательство теоремы 2. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Это означает, что каково бы не было $r \in \mathbb{N}$, для любых функции $f \in L^r_\infty(T)$ и отрезка $I = [a, b]$, удовлетворяющих условию (1), найдется функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$ для которой выполнены требования (2)- (4).

Возьмем в качестве функции f тригонометрический полином τ, для которого существует отрезок $I=[a,b]$, такой что

$$\tau^{'}(a)=\tau^{'}(b)=0,\ \ \tau^{'}(t)\neq 0,\ \ t\in(a,b),$$

причем

$$b-a<\frac{\pi}{n},$$

где n — порядок полинома. Существование такого полинома очевидно. Ясно, что для любого $r\in\mathbb{N}$ справедливо включение $\tau\in L^r_\infty(T)$, а для полинома τ и отрезка I выполнены условия леммы. Согласно леммы имеет место неравенство

$$E_0(\tau)_{L_\infty[a,b]}\leq\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^r\|\varphi_r\|_\infty\|\tau^{(r)}\|_\infty.$$

Оценивая в этом неравенстве норму $\|\tau^{(r)}\|_\infty$ при помощи неравенства Бернштейна

$$\|\tau^{(r)}\|_\infty\leq n^r\|\tau\|_\infty,$$

получим

$$E_0(\tau)_{L_\infty[a,b]}\leq\left(\frac{b-a}{\pi/n}\right)^r\|\varphi_r\|_\infty\|\tau\|_\infty.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $r\to\infty$. Учитывая, что $b-a<\frac{\pi}{n}$ и

$$\lim_{r\to\infty}\|\varphi_r\|_\infty=\frac{4}{\pi},$$

приходим к выводу, что

$$E_0(\tau)_{L_\infty[a,b]}=0.$$

Из этого равенства в силу теоремы единственности для аналитических функций вытекает, что полином τ является константой, что противоречит неравенству $\tau^{'}(t)\neq 0$, $t\in(a,b)$.

Библиографические ссылки

1. *В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов* Точные константы типа Колмогорова с ограниченной старшей производной в случае малых гладкостей// Укр.мат.журн.(2001). – 53, №10. – С.1298–1308.
2. *В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов* Неравенства для производных и их приложения/ В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов// Киев, Наукова думка, 2003.
3. *А. Н. Колмогоров* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале// Избр. тр. Математика, механика. - М.:Наука, 1985. - С.252–263.

Надійшла до редколегії 01.02.2014