

6. **Скоростной и высокоскоростной железнодорожный транспорт.** В прошлом, настоящем и будущем. К 150-летию железнодорожной магистрали Санкт-Петербург–Москва. – Т.1 – СПб., 2001. – 320 с.
7. **Сюзюмова Е.М.** Анализ модельных испытаний в аэродинамической трубе поездов различной геометрической формы и сравнение результатов этих испытаний с натурными опытами для тех же поездов / Е.М. Сюзюмова, Г.А. Романенко // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1974. – Вып. № 21846. – 104 с.
8. **Сюзюмова Е.М.** Оценка количественных и качественных характеристик воздушного сопротивления скоростного поезда / Е.М. Сюзюмова, Г.А. Романенко // Вестник Всесоюз. научн.-исслед. ин-та ж.-д. трансп. – 1979. – № 4. – С. 22–26.
9. **Сюзюмова Е.М.** Экспериментальное исследование поля скоростей вокруг скоростного поезда / Е.М. Сюзюмова, Г.А. Романенко // В кн.: Совершенствование процессов теплообмена и аэродинамики электроподвижного состава. Труды Всесоюзн. науч.-исслед. ин-та ж.-д. трансп. М., 1979. – Вып. 617. – С. 86–96.
10. **Худяков Г.Е.** Исследование ветровых нагрузок, действующих на вагон / Г.Е. Худяков // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1987. – Вып. № 3408. – 21 с.
11. **Худяков Г.Е.** Обоснование выбора внешней геометрической формы скоростных поездов / Г.Е. Худяков // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1988. – Вып. № 3666. – 79 с.
12. **Sutter K.** Untersuchungen über den Luftwiderstand an Eisenbahnfahrzeugen in Tunneln / K. Sutter // Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. – 1930 – № 18. – S. 109–122.
13. **Theopold L.** Reisezugwagen für 200 km/h / L. Theopold // Deutsches Eisenbahn technick. – 1967. – 15, № 6. – S. 156–162.
14. **Tollmien W.** Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge / W. Tollmien // Zeitschr. Angew. Mathem. u Mech. – 1926. – № 6. – S. 76–79.
15. **Vogelpohl G.** Windkanalversuche über den Luftwiderstand von Eisenbahnfahrzeugen / G. Vogelpohl // Verein Deutscher Ingenieure. – Bd. 78. – 3 Feb. – 1934. – № 5. – S. 59–67.

Надійшла до редколегії 01.10.10

УДК 551.509

Е.В. Егоров, Н.Н. Лычагин

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## РАСЧЕТ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ ГОРОДСКОГО ЛАБИРИНТА

Розглянуто фільтраційну математичну модель розповсюдження забруднюючих домішок в атмосфері великих міст зі щільною та висотною забудовою (міський лабіринт). Запропоновано наближений метод розрахунку полів швидкості вітру та концентрацій забруднень у приземному шарі атмосфери від наземних точкових та лінійних джерел, які моделюють промислові димові труби на рух автомобільного транспорту вздовж вулиць міста.

*Ключові слова:* забруднення міської атмосфери, фільтраційна модель розповсюдження забруднень, точкові та лінійні джерела забруднення.

Рассмотрена фильтрационная математическая модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере больших городов с плотной и высотной застройкой (городской лабиринт). Предложен приближенный метод расчета полей скорости ветра и концентрации загрязнений в приземном слое атмосферы, поступающих от наземных точечных и линейных источни-

ков, моделирующих промышленные дымовые трубы и подвижные источники вдоль магистралей, соответственно.

*Ключевые слова:* загрязнение городской атмосферы, фильтрационная модель распространения загрязнений, точечные и линейные источники загрязнения.

The mathematical model of filtrational flow is applied to calculation of polluted air flow within the complicated urban canopy structure (urban labyrinth). The approximate method for analysis of the flow field and concentration of pollutants, which are spread from pointed and linear sources (modeling the industrial chimneys and automobile traffic along the roads) is suggested.

*Key words:* urban pollution, filtrational model of the spread of pollution, pointed and linear sources of pollution.

**Введение.** В [1] предложена фильтрационная математическая модель распространения загрязняющей примеси в атмосфере городского лабиринта – района плотной и высотной застройки, где из-за резкого ухудшения проветривания происходит возрастание концентрации атмосферных загрязнений. Основным источником такого рода загрязнений в городском лабиринте является автомобильный транспорт, вклад которого в загрязнение атмосферы крупных городов составляет 70–90 % [2].

Предложенная в [1] система нелинейных дифференциальных уравнений фильтрационной математической модели, определяющая поля скорости ветра, температуры, концентрации атмосферных загрязнений может быть решена численными методами [3 – 5]. Они, в принципе, позволяют получить точное решение широкого класса задач с учетом рельефной, температурной и влажностной неоднородности подстилающей поверхности земли.

Вместе с тем, необходимо отметить, что численное решение этих задач довольно трудоемко. Оно требует больших затрат времени работы компьютера. Точность решения ухудшается вследствие аппроксимаций точечных и линейных источников выбросов загрязняющей примеси на конечно-разностной сетке. Её шаг приходится задавать достаточно большим, вычисления проводить по всей сетке, даже если область распространения загрязнений от отдельных источников носит локальный характер.

Однако, в практической деятельности специалистов метеорологов и экологов часто возникает необходимость в проведении быстрых и оперативных, оценочного характера, расчетов для анализа и прогноза распространения атмосферных загрязнений на территории со сложной неоднородностью подстилающей поверхности, в различных условиях температурной стратификации атмосферы. Для выполнения такой работы применение численных методов интегрирования не всегда удобно. Возникает необходимость в использовании достаточно простых аналитических или полуаналитических приближенных методов расчета. Уступая в точности численным методам, они позволяют быстро и оперативно получить требуемый результат, даже, если число источников выброса загрязнений велико, так как появляется возможность с необходимой точностью и детальностью указать их расположение.

В настоящей работе предлагается приближенный аналитический метод расчета фильтрационных полей скорости ветра и концентрации атмосферной загрязняющей примеси от наземных точечных и линейных источников, моделирующих движение автомобильного транспорта в условиях городского лабиринта с учетом влияния характера и плотности застройки, а также факторов устойчивости состояния атмосферы.

**Метод расчета поля скорости ветра в приземном слое атмосферы городского лабиринта.** Большинство задач распространения атмосферных загрязнений

решается в квазистационарной постановке, когда предполагается, что время перемещения примеси от источника к рецептору много меньше времени изменения внешних метеорологических условий [3; 6]. В квазистационарном случае система дифференциальных уравнений, определяющих фильтрационное поле скорости ветра в приземном слое атмосферы городского лабиринта  $0 < z < H$ , имеет вид [1]:

$$m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + Bv\sqrt{u^2 + v^2} \right) = v\Omega_z, \quad (1)$$

$$m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial y} + Bv\sqrt{u^2 + v^2} \right) = -u\Omega_z, \quad (2)$$

$$m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial z} + \beta\Delta T \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1) – (4) записаны с использованием величины  $h_i$  (м), которая представляет собой полный напор воздушного потока в порах городского лабиринта

$$h = \frac{u^2 + v^2}{2m^2 g} + \frac{p - p_0}{\gamma} + z, \quad (5)$$

а также вертикальной составляющей вектора вихря, (сек)<sup>-1</sup>

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6)$$

В соотношениях (1) – (6) обозначено:  $x, y, z$  – декартовы координаты, (м);  $u, v, w$  – проекции вектора фильтрационной скорости ветра на оси декартовой системы координат  $Oxyz$ , (м/сек), в которой оси  $Ox, Oy$  расположены на подстилающей поверхности земли: ось  $Ox$  направлена по вектору скорости ветра вдали от городского лабиринта ( $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ), а ось  $Oz$  – перпендикулярно ей;  $p - p_0$  – избыточное давление над подстилающей поверхностью, (Па);  $\Delta T = T(x, y, z) - T_0(x, y)$  – избыточная температура над подстилающей поверхностью, (К);  $B$  – коэффициент силы сопротивления твердого каркаса городского лабиринта, (сек/м)<sup>2</sup>;  $\beta$  – коэффициент объемного термического расширения воздуха, (К);  $g = 9,8$  м/сек<sup>2</sup> – ускорение земного тяготения;  $\gamma$  – удельный вес воздуха, (Н/м<sup>3</sup>);  $H_0 = (50 \div 100)$  м – верхняя граница приземного слоя атмосферы;  $m$  – коэффициент плотности застройки городского лабиринта,  $0 < m < 1$ . Система уравнений (1) – (4) решается при следующих граничных условиях:

$$u = v = w = h = \Delta T = 0, \quad \text{при } z = 0, \quad (7)$$

$$\begin{cases} u = u_1 (z / z_1)^n, & v = w = 0, \\ h = \frac{u_1^2}{2g} \left( \frac{z}{z_1} \right)^{2n}, & \frac{\Delta T}{\Delta T_1} = \mp \frac{z}{100}, \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (8)$$

В условиях (8) обозначено:  $z_1 \approx 1$  м – некоторая высота над уровнем подстилающей поверхности;  $u_1, v_1$  – компоненты скорости ветра на высоте  $z = z_1$ ;  $\Delta T_1 = (0,6 \div 1,3)^\circ\text{C}$  – падение температуры на каждые 100 м высоты в пограничном

слое атмосфери в залежності від її стану;  $0,1 \leq n \leq 0,5$  – показатель, що враховує стан атмосфери, її температурну стратифікацію; знак «-» в вираженні (8) береться при  $0,1 \leq n \leq 0,3$ , а знак «+» – при  $n > 0,3$ .

Приближенні вирази для компонент швидкості вітру в атмосфері міського лабіринту будемо знаходити, виходячи з виду рівнянь (1) – (4), граничних умов (7), (8), а також керуючись розглядами розмірності та фізичного змісту. З рівняння (3) маємо:

$$u^2 + v^2 = 2m^2 g [h + \beta \theta(x, y, z)], \quad (9)$$

$$\text{де } \theta(x, y, z) = \int_0^z \Delta T(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Далі поступимо наступним чином.

1) В рівняннях (1), (2) апроксимуємо величину  $\Omega_z$  приблизним вираженням

$$\Omega_z \approx c \frac{v}{h}, \quad \text{де } c = \text{const} \quad (10)$$

в силу того, що  $\Omega_z$  в приземному шарі атмосфери міського лабіринту виникає виключно за рахунок рельєфної та температурної неоднорідності підстилаючої поверхні лабіринту. При  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  ця величина повинна прагнути до нуля, згідно граничній умові (8), так як поза міським лабіринтом неоднорідність підстилаючої поверхні відсутня.

2) Положимо, що

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = mA, \\ \frac{\partial h}{\partial y} = (\bar{z})^n + mA, \end{cases} \quad \text{де } \bar{z} = \frac{z}{z_1}, \quad A = Bu \sqrt{2g(h + \beta)} \quad (11)$$

Використовуючи (9), (10), (11), з рівнянь (1), (2) можна отримати наступні приблизні співвідношення

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{u}{u_1} \approx m \left[ (\bar{z})^n + (1 + v/u) mA \right], \\ \bar{v} = \frac{v}{v_1} \approx -2m^2 A. \end{cases} \quad (12)$$

3) Величини  $u$ ,  $v$ ,  $h$ ,  $\theta$ , що входять у праві частини співвідношень (12), приблизно замінимо їх граничними значеннями (8). Отримаємо

$$\begin{cases} \bar{u} \approx m \bar{z}^n (1 - ma), \\ \bar{v} \approx 2m^2 \bar{z}^n a, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$a = Bu_1^2 m \bar{z}^{2n} \sqrt{1 \mp \gamma_1 \beta \Delta T_1 \bar{z}^{2(1-n)}} \quad (14)$$

В выражении (14) используется параметр:  $\gamma_1 = \frac{gz_1}{u_1^2} \cdot \frac{z_1}{100}$ , а значение величины  $\sqrt{2g(h + \beta\theta)}$  из физических соображений взято со знаком минус.

4) Усредним по высоте приземного слоя атмосферы  $\bar{H}_0 = H_0 / z_1$  величины  $\bar{z}^n$  и  $\bar{z}^{2(1-n)}$

$$\frac{1}{\bar{H}_0} \int_0^{\bar{H}_0} \bar{z}^n d\bar{z} = \frac{\bar{H}_0^n}{n+1}, \quad \frac{1}{\bar{H}_0} \int_0^{\bar{H}_0} \bar{z}^{2(1-n)} d\bar{z} = \frac{\bar{H}_0^{2(1-n)}}{2(1-n)+1}$$

и подставим их в правые части соотношений (13). Получим

$$\begin{cases} \bar{u} \approx m(1 - m\alpha)\bar{z}^n, \\ \bar{v} \approx 2m^2\alpha\bar{z}^n, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\alpha = \frac{Bu_1^2 \bar{H}_0^n}{n+1} \sqrt{1 \mp \frac{\gamma_1 \beta \Delta T_1 \bar{H}_0^{2(1-n)}}{2(1-n)+1}}. \quad (16)$$

Соотношения (15), (16) представляют собой приближенные выражения для расчета горизонтальных компонент вектора фильтрационной скорости ветра в приземном слое атмосферы городского лабиринта. Они удовлетворяют как граничным условиям (8), так и соображениям физического характера. В самом деле, коэффициент сил сопротивления твердого каркаса городского лабиринта можно приближенно вычислить по формуле

$$B = \frac{1-m}{2mg\ell_{cp}} C_{xD}, \quad (17)$$

где  $C_{xD}$  – средний коэффициент силы сопротивления одного, отдельно взятого здания (сооружения) в городском лабиринте;  $\ell_{cp}$  – средний горизонтальный размер этого здания, (м).

Тогда из (15), (16), (17) очевидно, что при  $m \rightarrow 0$  (очень плотная застройка),  $\bar{u} \rightarrow 0$ ,  $\bar{v} \rightarrow 0$ , а при  $m \rightarrow 1$  (отсутствие всякой застройки),  $\bar{u} \rightarrow \bar{z}^n$ ,  $\bar{v} \rightarrow 0$ , то есть выполняются граничные условия (8).

Вертикальную компоненту  $w$  вектора скорости можно определить, интегрируя уравнения неразрывности (4), если соотношения (15) представить в более общем виде, как функции  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ . Например, так:

$$\begin{cases} \bar{u} = m[1 - m\alpha f_1(\bar{x}, \bar{y})]\bar{z}^n, \\ \bar{v} = 2m^2\alpha f_2(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}^n. \end{cases} \quad (18)$$

где  $\bar{x} = x / z_1$ ,  $\bar{y} = y / z_1$ ; а функции  $f_{1,2}(\bar{x}, \bar{y})$  находятся из решения задачи (1) – (4), (7), (8).

Следует отметить, что в приземном слое атмосферы вертикальная компонента скорости ветра мала и при расчете распространения легкой загрязняющей примеси её влиянием можно пренебречь [6].

**Метод расчета поля концентрации загрязняющей примеси.** Как указывалось ранее, основным источником загрязнения атмосферы городского лабиринта является автомобильный транспорт. Его действие хорошо моделируется непрерывно функционирующими наземными точечными и линейными источниками. Выхлопные газы автомобилей можно рассматривать как легкую загрязняющую примесь, слабо поглощаемую городской подстилающей поверхностью. Конвективным переносом загрязнения в вертикальном направлении можно пренебречь [6].

В случае единичного, непрерывно действующего наземного точечного источника легкой загрязняющей примеси, расположенного в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , где  $z_0$  – уровень шероховатости подстилающей поверхности (для города  $z_0 \approx 1$  м), уравнение переноса атмосферных загрязнений в городском лабиринте имеет вид [1]:

$$m \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{\phi z}^T(z) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] - u \frac{\partial \phi}{\partial x} - v \frac{\partial \phi}{\partial y} - m \sigma \phi = -q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (19)$$

В уравнении (19) обозначено:

$\phi(x, y, z)$  – концентрация загрязняющей примеси, ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  $v_{\phi z}^T(z)$  – вертикальный кинематический коэффициент турбулентной диффузии примеси, ( $\text{м}^2/\text{с}$ );  $\sigma$  – параметр нейтрализации примеси в атмосфере, ( $\text{с}$ )<sup>-1</sup>;  $q$  – интенсивность точечного источника, ( $\text{кг}/\text{с}$ );  $\delta(x_i)$  – дельта-функция Дирака, ( $\text{м}$ )<sup>-1</sup>.

Граничные условия для уравнения (19) имеют вид:

$$v_{\phi z}^T(z) \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx 0, \quad \text{при } z = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (22)$$

В качестве компонент скорости ветра  $u, v$  в атмосфере городского лабиринта возьмем соотношения (15), (16), а кинетический коэффициент турбулентного обмена  $v_{\phi z}^T(z)$  будем задать в виде (7)

$$v_{\phi z}^T(z) = k_1(z/z_1)^p = k_1 \bar{z}^p, \quad (23)$$

Приближенное решение задачи (19) – (22) будем отыскивать следующим образом.

Осредним функцию  $u(\bar{z}), v(\bar{z}), v_{\phi z}^T(\bar{z})$  по концентрации  $\phi(x, y, \bar{z})$  в пределах высоты приземного слоя атмосферы городского лабиринта  $\bar{H}_0$ , используя соотношения (15), (23) и теорему о среднем значении интеграла. Будем иметь:

$$\phi_e = \int_0^{\bar{H}_0} \phi(x, y, \bar{z}') d\bar{z}',$$

$$u_e = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\bar{H}_0} u(\bar{z}') \phi(x, y, \bar{z}') d\bar{z}' \approx u_1 m (1 - m_1 \alpha) (\bar{H}_0/2)^n, \quad (24)$$

$$v_e = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\bar{H}_0} v(\bar{z}') \phi(x, y, \bar{z}') d\bar{z}' \approx 2u_1 m^2 \alpha (\bar{H}_0/2)^n,$$

$$v_e^T = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\bar{H}_0} v_{\phi z}^T(\bar{z}) \phi(x, y, \bar{z}') d\bar{z}' \approx K_1 (\bar{H}_0 / 2)^n.$$

Заменим исходную задачу (19) – (22) приближенной задачей

$$mv_e^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \left( u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - m\sigma \phi = -q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (25)$$

$$v_e^T \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx 0, \quad \text{при } z = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (28)$$

где величины  $u_e, v_e, v_e^T$  определены соотношениями (24).

Наличие городской застройки и обусловленное этим действие сил сопротивления, приводит к отклонению главного вектора фильтрационной скорости ветра в городском лабиринте от направления скорости ветра вне лабиринта на угол

$$\theta = \pm \arccos(u_e / V_e), \quad (29)$$

где

$$V_e = \sqrt{u_e^2 + v_e^2} = u_1 m (\bar{H}_0 / 2)^2 \sqrt{1 - 2m\alpha + 5(m\alpha)^2}. \quad (30)$$

В (25) – (28) сделаем замену переменных

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{v_e} [(x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta]; \\ y_1 = \frac{1}{z_0} [-(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta]; \\ z_1 = \frac{z}{\sqrt{mv_e^T}}; \quad z_{01} = \frac{z_0}{\sqrt{mv_e^T}}; \end{cases} \quad (31)$$

где

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{u_e}{V_e} = \frac{1 - m\alpha}{\sqrt{1 - 2m\alpha + 5(m\alpha)^2}}; \\ \sin \theta = \frac{v_e}{V_e} = \frac{\pm 2m\alpha}{\sqrt{1 - 2m\alpha + 5(m\alpha)^2}}; \end{cases} \quad (32)$$

а затем сделаем замену искомой функции  $\phi(x, y, z)$

$$\phi(t_1, y_1, z_1) = \bar{\phi}(t_1, y_1, z_1) \exp(-m\sigma t_1). \quad (33)$$

В итоге, придем к задаче

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t_1} = -\frac{q \exp(m\sigma t_1)}{z_0 V_e \sqrt{mv_e^T}} \delta(t_1) \delta(y_1) \delta(z_1 - z_{01}), \quad (34)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z_1} \approx 0, \quad \text{при } z_1 = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z_1} \rightarrow 0, \quad \text{при } z_1 \rightarrow \infty, \quad (36)$$

$$\bar{\phi} \rightarrow 0, \quad \text{при } t_1^2 + y_1^2 \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Решение задачи (34) – (37) имеет вид:

$$\bar{\phi}(t_1, y_1, z_1) = -\frac{q}{2\sqrt{\pi z_0} V_e \sqrt{m v_e^T t_1}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(z_1 - z_{01})^2}{4t_1} \right] + \exp \left[ -\frac{(z_1 + z_{01})^2}{4t_1} \right] \right\}. \quad (38)$$

Учитывая (31), (33), получим из (38) распределение концентрации загрязняющей примеси от точечного источника в приземленном слое атмосферы городского лабиринта в виде:

$$\phi(t, y, z) = \frac{q}{2\sqrt{\pi}} \phi'(t, y, z), \quad (39)$$

$$\phi'(t, y, z) = -\frac{\exp(-m\sigma x' / V_e)}{\sqrt{m v_e^T V_e x'}} \left\{ \exp \left[ -\frac{V_e (z - z_0)^2}{4m v_e^T x'} \right] + \exp \left[ -\frac{V_e (z + z_0)^2}{4m v_e^T x'} \right] \right\}. \quad (40)$$

где

$$x'(x, y) = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta. \quad (41)$$

Для линейного наземного источника интенсивности  $q_e \left( \frac{\kappa z}{M \cdot c} \right)$ , действующего на конечном отрезке  $y = f(x)$  подстилающей поверхности городского лабиринта, соответственно будем иметь:

$$\phi_e = \frac{q_e}{2\sqrt{\pi z_0}} \int_{x_1}^{x_2} \phi'_f(x, y, z) dx_0, \quad (42)$$

$$\phi'_f(t, y, z) = -\frac{\exp(-m\sigma x' / V_e)}{\sqrt{m v_e^T V_e x'_f}} \left\{ \exp \left[ -\frac{V_e (z - z_0)^2}{4m v_e^T x'_f} \right] + \exp \left[ -\frac{V_e (z + z_0)^2}{4m v_e^T x'_f} \right] \right\}. \quad (43)$$

где

$$x'_f(x, y) = (x - x_0) \cos \theta + [(y - f(x_0))] \sin \theta. \quad (44)$$

В выражении (42)  $x_1, x_2$  – координаты начала и конца линейного источника загрязнений.

**Результаты расчетов.** С целью выявления влияния изменения плотности застройки (коэффициента  $m$ ) на характер изменения скорости ветра и концентрации загрязняющей примеси в атмосфере городского лабиринта были проведены расчёты для случая одного наземного точечного источника окиси углерода CO (основной компонент выхлопных газов автомобилей) интенсивности  $q=0,1 \frac{\kappa z}{c}$  в различных сек

условиях состояния устойчивости атмосферы. Расчёты проводились при следующих значениях исходных параметров:  $H_0 = 80\text{ м}$ ;  $\sigma = 10^{-4}\text{ с}^{-1}$ ;  $z_0 = z_1 = 1\text{ м}$ ;  $U_1 = 1 \frac{\text{М}}{\text{с}}$ ;  $k_1 = 0,2 \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$ . При расчете коэффициента сил сопротивления твёрдого каркаса городского лабиринта  $B$  параметры  $C_{xD}$ ,  $\ell_{cp}$  вычислялись по экспериментальным данным [7] и задавались в виде:  $C_{xD} \approx 1,11$ ;  $\ell_{cp} \approx 1,22H_0$ . Влиянием силы плавучести пренебрегалось ( $\beta = 0$ ).

На рис.1 представлен безразмерный вертикальный профиль продольной компоненты скорости ветра  $\bar{U}(\bar{z})$ , рассчитанный по формулам (15) – (17) для двух значений коэффициента плотности застройки в зависимости от характера устойчивости атмосферы.

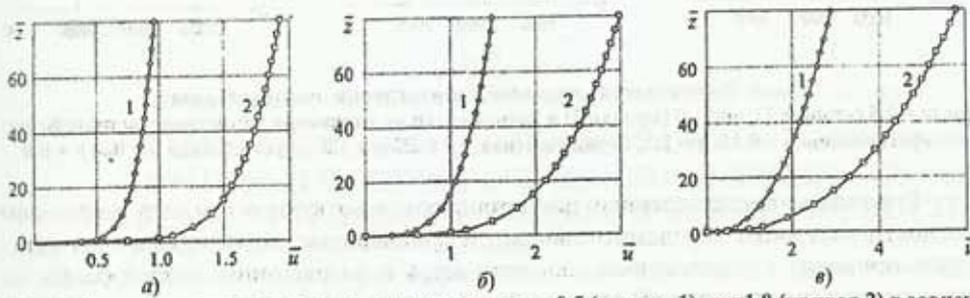


Рис. 1. Изменение продольной скорости ветра при  $m=0,5$  (кривая 1),  $m=1,0$  (кривая 2) в зависимости от характера устойчивости атмосферы: а) неустойчивая  $n = 0,5$ ; б) равновесная  $n = 0,25$ ; в) устойчивая  $n = 0,4$

На рис. 2 представлен безразмерный, отнесенный к разовой гранично допустимой концентрации окиси углерода ( $\text{ГДК}_{\text{CO}} = 5 \text{ мг/м}^3$ ) вертикальный профиль  $\bar{\phi}(\bar{z})$  концентрации  $\text{CO}$ , рассчитанный по формулам (39) – (41) при  $x_0 = y_0 = 0$  и  $x = y = 1000 \text{ м}$  для двух значений коэффициента плотности застройки в зависимости от характера устойчивости атмосферы.

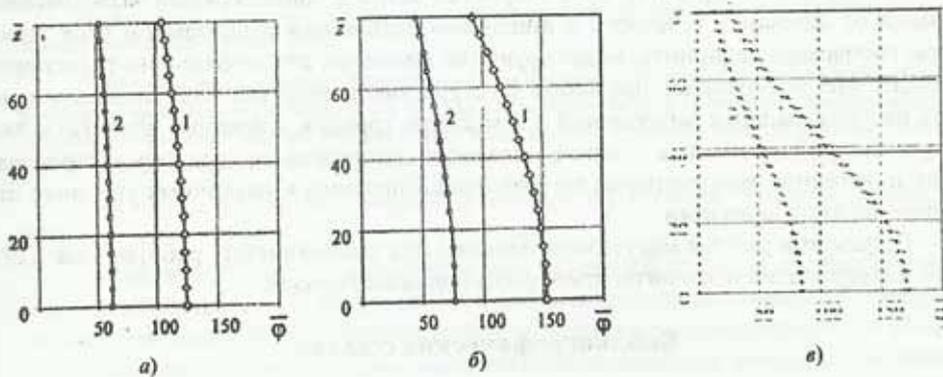


Рис. 2. Изменение вертикального профиля концентрации окиси углерода при  $m = 0,5$  (кривая 1),  $m = 1,0$  (кривая 2) в зависимости от характера устойчивости атмосферы: а) неустойчивая  $n = 0,15, p = 1,2$ ; б) равновесная  $n = 0,25, p = 1,0$ ; в) устойчивая  $n = 0,4, p = 0,8$

На рис.3 представлено безрозмірне, огнесенне к  $\Gamma ДК_{CO}=5 \text{ мг/м}^3$ , наземне розподілення концентрації  $\bar{\phi}_{z_0}$  окиси углерода, розраховане по формулам (39) – (41) при  $x_0 = y_0 = 0$  и  $z = z_0$  для двох значень коефіцієнта щільності застройки в залежності от характеру устойчивости атмосфери.

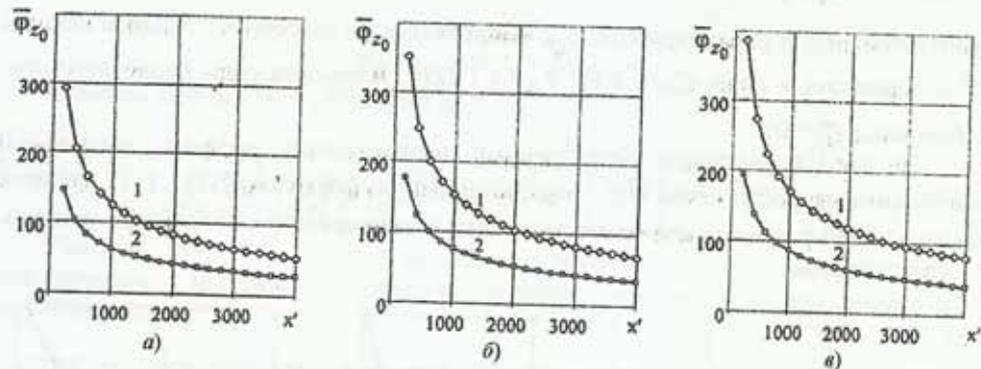


Рис. 3. Распределение наземной концентрации окиси углерода при  $m = 0,5$  (кривая 1),  $m = 1,0$  (кривая 2) в зависимости от характера устойчивости атмосферы: а) неустойчивая  $n = 0,15, p = 1,2$ ; б) равновесная  $n = 0,25, p = 1,0$ ; в) устойчивая  $n = 0,4, p = 0,8$ .

Результаты представленных расчетов свидетельствуют о том, что увеличение плотности застройки городского лабиринта (уменьшение коэффициента  $m$ ) одно-значно приводит к уменьшению скорости ветра и возрастанию концентрации загрязняющей примеси в атмосфере.

Состояние атмосферы влияет на степень гладкости распределения концентрации по высоте. В неустойчивой атмосфере концентрация примеси слабо изменяется по высоте слоя. Для устойчивого состояния характерно повышение концентрации загрязнения в нижней части атмосферы по сравнению с её неустойчивым состоянием. Плотность застройки слабо влияет на указанное повышение. Аналогичное сравнение величин концентрации в верхней части атмосферы показывает противоположное изменение.

**Выводы.** На основе фильтрационной математической модели разработан приближенный метод расчета поля скоростей ветра и концентрации загрязняющей примеси от наземных точечного и линейного источников в приземном слое атмосферы городского лабиринта, моделирующих движение автомобильного транспорта в городе. Метод позволяет проводить быстрые оценочные расчеты анализа и прогноза распространения загрязнений в атмосфере городов, имеющих плотную и высотную застройку, оценить влияние плотности застройки на характер распространения и величину концентрации загрязняющей примеси в различных условиях атмосферной стратификации.

Результаты работы могут быть полезны для специалистов, работающих в области метеорологии и экологии атмосферы больших городов.

#### Библиографические ссылки

1. Егоров Е.В. Фильтрационная модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере городских лабиринтов / Е.В. Егоров, Н.Н. Лычагин // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2010. – Вип.14, т.1. – С. 143–151.

2. Абрамовский Е.Р. Атмосфера больших городов / Е.Р. Абрамовский, Н.Н. Переметчик.—Д., 2007.—188с.
3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г.И. Марчук.—М., 1982.—320 с.
4. Згуровский М.З. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М.З. Згуровский, В.В. Скопецкий, В.К. Хрущ, Н.Н. Беляев.—К., 1997.—368 с.
5. Пененко М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М.Е. Пененко.—Н., 1985.—272 с.
6. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М.Е. Берлянд.—Л., 1985.—72 с.
7. Simiu E. Wind effects on structures. Second edition / E. Simiu, R. Y. Scanlan.—New York, 1986.—589 p.

Надійшла до редколегії 05.12.10

УДК 532.5

В.А. Катан

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

Розглянуто задачу про ударну взаємодію нестисливої рідини та твердого віссиметричного тіла, що плаває на її вільній поверхні. На основі непрямого варіанта методу граничних інтегральних рівнянь розроблено алгоритм її розв'язання, що зводить її до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Наведено приклади розв'язання задачі.

*Ключові слова:* удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, непрямий метод граничних інтегральних рівнянь.

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и твердого осесимметричного тела, плавающего на ее свободной поверхности. На основании непрямого варианта метода граничных интегральных уравнений разработан алгоритм ее решения, который приводит ее к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Приведены примеры решения задачи.

*Ключевые слова:* удар по телу, плавающему на поверхности жидкости, непрямой метод граничных интегральных уравнений.

The problem of a impact interaction of incompressible fluid with the rigid body of revolution floating on its surface is considered. On the basis of indirect method of boundary integral equations the algorithm of problem solution was developed which leads to Fredholm integral equation of the second type. The examples of solytion are presented.

*Key words:* impact of the floating body of revolution, indirect method of boundary integral equation method.

**Введение.** Классическая постановка задачи об ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и твердого тела, плавающего на ее свободной поверхности хорошо известна. Обзор и библиография по этим вопросам содержится в [1–3].

Рассмотрим твердое тело вращения, плавающее на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей соосный осесимметричный резервуар (рис.1). В момент  $t=0$  к телу внезапно прикладывается внешняя импульсная сила и