

Т. С. Зеленская

Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КАНАТАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Построена математическая модель продольных колебаний, возникающих в главных канатах грузоподъемных механизмов, отображающая поле динамических перемещений и напряжений в произвольном сечении каната, который наматывается на барабан. Рассмотрена постановка краевой задачи для стального каната постоянного сечения.

Ключевые слова: волновое и телеграфное уравнения; область с подвижной границей.

Побудовано математичну модель поздовжніх коливань, які виникають в головних канатах вантажопідйомних механізмах, що відображають поле динамічних переміщень та напружень в довільному перерізі каната, що намотується на барабан. Розглянуто постановку крайової задачі для стального каната постійного перерізу.

Ключові слова: хвильове та телеграфне рівняння, область з рухомою границею.

The mathematical model of longitudinal vibrations arising in the main ropes for load-lifting mechanisms, showing the dynamic field of displacements and stresses in the random section of the rope, which is wound on a drum. A formulation of the boundary value problem for steel rope with a constant cross section.

Keywords: wave and Telegraph equation, the area with moving boundary.

Постановка проблемы и анализ публикаций. Вопрос об определении усилий в подъемных канатах, о постановке методов решения тесно связан с задачей о продольных колебаниях упругих стержней и стальных канатов. В работах [6;7] ограничились шахтными канатами постоянной длины и постоянного сечения. В статье [6] рассматриваются различные специальные условия: скорость есть только у подвешенного к канату грузу, мгновенная нагрузка нижнего конца каната, мгновенная остановка верхнего конца каната, и, наконец, равнопеременное движение верхнего конца каната. Заметим, что в первых трех случаях вдоль каната будет наблюдаться разрывность непрерывности. Рассматриваются канаты постоянного сечения, но переменной длины, учитывая массу и вес каната при больших высотах подъема. Металлический канат как гибкий элемент, способный нести большую растягивающую нагрузку, широко применяется в современной подъемно-транспортной технике. Работа каната и связанных с ним устройств, во многом зависит от корректности его конструктивного использования сообразно с критериями эксплуатации и точности расчета на упругость и прочность. В силовом расчете каната вырисовываются две органически связанные, но очень различающиеся по собственной постановке и способам исследовательских работ задачи. Появляется ряд вопросов, связанных с определением общих усилий в канате, как едином агрегате под действием наружных воздействий статического либо динамического усилий. Наружная форма железного каната дает возможность в данном случае использовать идею его расчета как гибкой нити. Потому, такие задачки решаются интерпретацией каната некой эквивалентной по наружным свойствам нитью и, в общем, могут быть рассчитаны с помощью динамики движения продольных колебаний, так как крутильные колебания будут незначительными для шахтных подъемных систем.

Но задачи наружной механики каната еще не определяют фактического его напряженного состояния. Для этого нужно иметь сведения о рассредоточении общих усилий между отдельными элементами в канате. Решение этого вопроса приводит к необходимости исследования силового взаимодействия отдельных частей в канате и построения, таким образом, что в математической модели перемещения волновых процессов в каждый момент времени рассматривают как аналитическую функцию, а не в форме дискретной разницы.

В настоящее время на шахтах и рудниках эксплуатируется большое число подъемных установок, кинематические схемы которых, могут быть представлены в следующем виде (рис.1): кинематическая схема подъемной установки со шкивом трения и противовесом, однодвигательная [2,3].

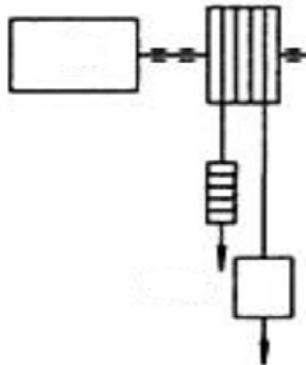


Рис.1. Кинематическая схема подъемной машины

Из оценки динамических усилий в идеально упругих нитях переменных длин следует, что только при подъеме нитей без концевых грузов при неинтегрируемых граничных условиях, усилия в них не возрастают. Во всех остальных случаях усилия при подъеме возрастают (обратно пропорционально той или иной степени из длины нити) [5]. Однако на практике при умеренных скоростях подъема, это явление не наблюдается ввиду того, что наряду с возрастанием амплитуд динамических усилий вследствие уменьшения длины происходит одновременное уменьшение амплитуд их колебаний.

Целью данной работы является исследование динамического поля перемещений и напряжений в стальных канатах переменной длины шахтных подъемных механизмах; канаты являются уравновешивающими, и главный канат переносит сосредоточенное напряжение, которое до начала движения системы находилось на нижнем конце главного каната.

Математическая модель динамики шахтной канатной установки. В области $0 < x < l + v(t)$, $t > 0$, найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где a – скорость звука в стальном канате;
удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l \quad (2)$$

и краевым условиям

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h(x,t)u \right) \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h(x,t)u \right) \right|_{x=l+v(t)} = \theta(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

В данной задаче рассматривается интервал, имеющий при $t = 0$ длину l , и при $t > 0$ правый конец этого интервала (точка соприкосновения каната с барабаном) движется по закону $x = l + v(t)$, причем $v(0) = 0$.

Решение задачи ищем в форме

$$u(x, t) = \chi(x - at) + \chi(x + at).$$

Выполняется условие не вырождения среды

$$l + v(t) > 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

Так, как нижний конец каната в относительной системе координат находится в состоянии покоя, то

$$u(x, t) = \chi(x + at) \tag{5}$$

Используем модифицированный метод продолжения для области с подвижной границей, продолжим функцию $\theta(t)$ на всю ось t :

$$\tilde{\theta}(t) = \begin{cases} \theta(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{6}$$

и подставляя форму решения (5) в продолжение (6) на всю ось t второе краевое условие (3), с учетом условия (4), получим

$$\chi'(l + v(t) + at) + h(l + v(t), t) \cdot \chi(l + v(t) + at) = \tilde{\theta}(t). \tag{7}$$

Введем преобразование независимой переменной в уравнение (7)

$$g(t) = l + v(t) + at. \tag{8}$$

Если уравнение (8) неразрешимо относительно t , то рассматриваемая задача не имеет решения. Остается рассмотреть лишь случай разрешимости уравнения (8) относительно t . Функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$.

Должно выполняться условие

$$|v'| < a, \quad t > 0, \tag{9}$$

где a – скорость звука в стальном канате.

Обратная к (8) функция $t_0(g)$ существует тогда и только тогда, когда функция $v(t) + at$ является строго монотонной. Благодаря условию (9), функция $t_0(g)$ является строго-монотонно возрастающей и непрерывно дифференцируемой. Таким образом, продолженная на всю ось g функция $t_0(g)$ обладает следующими свойствами:

$$t_0(g) : \begin{cases} > 0, & g > l, \\ = 0, & g = l, \\ < 0, & g < l. \end{cases} \tag{10}$$

Учитывая свойства (10), уравнение (7) можно представить в виде

$$\chi'(g) + H(g)\chi(g) = \tilde{\theta}(t_0(g)). \tag{11}$$

Тогда общее решение уравнения (1) может быть представлено в форме

$$\chi(g) = \frac{C + \int_{l_0}^g \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy}{E(g)}, \tag{12}$$

где $H(g) = h(l + v(t_0(g)), t_0(g))$; $E(g) = e^{\int H(g)dg}$, C – произвольная константа.

Решение задачи для начального интервала времени:

$$u(x,t) = \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy, \quad (13)$$

так как из первого начального условия следует, что $C = 0$.

Учитывая, что $E'(g) = H(g)E(g)$, для функции (13) имеем

$$u_x(x,t) + h(x,t)u(x,t) = -H(x+at) \cdot \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy + \tilde{\theta}(t_0(x+at)) + \frac{h(x,t)}{E(x+at)} \cdot \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy.$$

Функция (13) удовлетворяет начальным условиям, второму краевому условию (3), а также уравнению (1) при $t > 0$; но первому краевому условию функция (13) удовлетворяет только при $t < \frac{l}{a}$. Поэтому, модифицированным методом про-

должения решается дополнительная задача: в области $0 < x < l + \nu(t)$, $t > \frac{l}{a}$, найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\rho(x, \frac{l}{a}) = 0, \quad \rho_t(x, \frac{l}{a}) = 0, \quad 0 < x < l + \rho(\frac{l}{a}) \quad (14)$$

и краевому условию

$$\begin{aligned} \rho_x(0,t) + h(0,t) \cdot \rho(0,t) &= (H(a \cdot t) - h(0,t)) \cdot \frac{1}{E(a \cdot t)} \int_l^{at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y) - \tilde{\theta}(t_0(a \cdot t)) = \\ &= \varphi_0(t), \quad t > \frac{l}{a} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varphi_0(t) = 0 \text{ при } t < \frac{l}{a}.$$

Из начальных условий (14) следует, что

$$\rho(x,t) = -E_1(at-x) \cdot \int_l^{at-x} \varphi_0\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{E_1(y)}.$$

Тогда решением основной задачи будет функция

$$\psi(x,t) = u(x,t) + \rho(x,t) = \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{at+x} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy - E_1(at-x) \int_l^{at-x} \varphi_0\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{E_1(y)}.$$

Применительно к наматыванию каната на барабан эту задачу можно математически интерпретировать следующим образом. В области:

$0 < x < l + \nu(t)$, $t > 0$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Cu(x,t) = 0, \quad (16)$$

где A, B, C, D – коэффициенты телеграфного уравнения;

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0, \quad x > 0 \quad (17)$$

и краевым условиям

$$u(l + \nu(t), t) = \mu(t); \quad u(0,t) = 0, \quad t > 0. \quad (18)$$

Функція $v(t)$ описує зміну довжини каната на барабані. Точка свисаючої частини каната з барабаном має координату $x = l + v(t)$. Упруге переміщення в точці $x = 0$ $u(0, t) = 0$.

Введемо преобразование переменной t :

$$\tau = t + \frac{v(t) + l}{a}, \tag{19}$$

и учтем, что $\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{v'(t)}{a} > 0$, тогда $\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{v'(t)}{a} > 0$.

Продолжим функцию $v(t)$ на всю ось t , требуя выполнения на всей оси t условия (19) и существования производной этого продолжения на всей оси t . Обозначим это продолжение через $\tilde{v}(t)$. Тогда на всей оси t будет определена функция

$$K(t) = \begin{cases} v(t), & t > 0; \\ \tilde{v}(t), & t < 0. \end{cases}$$

Пусть $T(t)$ – продолженная на всю ось t функция:

$$T(t) = t + \frac{K(t) + l}{a}.$$

Функция $T(t)$ является строго монотонной при всех t и для нее существует обратная функция $Z(T)$:

$$Z(t) = \begin{cases} z(\tau) > 0, & T > \frac{l}{a}; \\ 0, & T = \frac{l}{a}; \\ < 0, & T < \frac{l}{a}. \end{cases}$$

Так как в краевом условии (18) функция $\mu(t)$ определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось t :

$$M(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Учитывая, что волны в среде возбуждаются на правом конце отрезка и распространяются в среду в направлении отрицательных x , решение задачи отыскивается в виде функции:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2M_{2n}\left(t + \frac{x}{a}\right) e^{-\frac{(Da+B)x}{2}} + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left(\frac{B}{2} J_0(\sigma) - c_1 \frac{x}{\sigma} J_1(\sigma) \right) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[2e^{\frac{(Da-B)x}{2}} \left(-M_{2n+1}\left(t - \frac{x}{a}\right) + M_{2n}\left(t - \frac{x}{a}\right) \right) + \right.$$

$$\left. + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left(\frac{B}{2} J_0(\sigma) - c_1 \frac{x}{\sigma} J_1(\sigma) \right) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} (M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)) d\eta \right], \tag{20}$$

где $J_0(\sigma), J_1(\sigma)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно;
 $\sigma = \sqrt{c_1(x^2 - a^2(t - \eta)^2)}$; $c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}$.

Принимая во внимание, что первое краевое условие (18) продолжается на всю ось t : $u(l + v(t), t) = M(t)$.

Практическая реализация результатов моделирования. Специфика работы, условия, в которых осуществляются транспортные операции по перемещению грузов, людей, механизмов, запасного и ремонтного оборудования, наличие большого числа ШПМ, работающих в разных климатических зонах и осуществляющих подъем (опускание) как с глубины нескольких сот метров, так и с глубин около двух километров способствовали выделению электропривода ШПМ в отдельное направление, которое до настоящего времени прошло несколько этапов развития [1,4].

Учитывая полученное решение для функции (20), найдем для каждого момента времени работы подъемной канатной установки соответствующие показатели переходных процессов без нагрузки, в точке касания каната с барабаном, и зафиксированной точке свисающей части каната (Рис. 2).

В итоге, благодаря применению экспериментальных промышленных данных и вычислению полей перемещений и напряжений, мы можем спрогнозировать поведения рывка при пуске нагруженной системы на главном канате (Рис. 3).

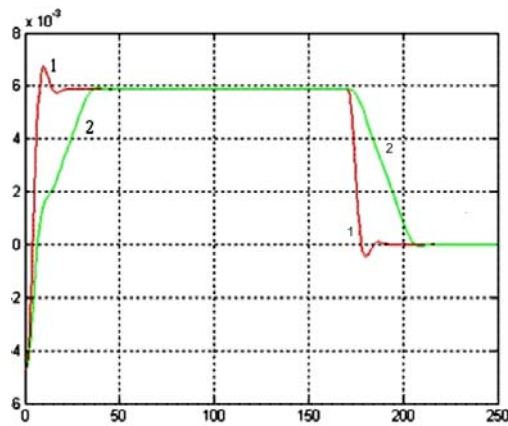


Рис. 2. – Переходной процесс

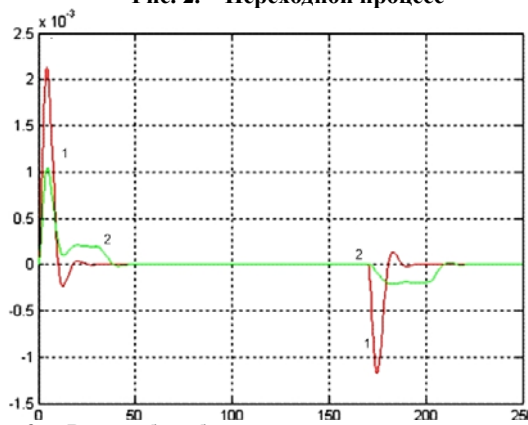


Рис. 3. – Рывок барабана при нагрузке на головной канат

Выводы. Проведены исследования динамической задачи, связанной с продольными колебаниями стальных канатов шахтных систем. Сформулирована задача о динамике подъемной установки с точки зрения напряжений в сечениях главных стальных канатов (упругого стержня) во времени. Установлены закономерности влияния характера отраженных волн от подвижного и неподвижного концов упругой нити, необходимые для оптимальной работы подъемной системы.

Библиографические ссылки

1. **Воеводин В. В.** Численные методы в прикладном пакете sage / В. В.Воеводин – Спб, 2011. – 257 с.
2. **Ильин С.Р.** Математическая модель продольных колебаний струны и отвеса каната мобильной подъемной установки / С.Р. Ильин // Научные труды ДонНТУ. -2011. – Вып. 16(143). – С. 122 – 138.
3. **Ильин В.А.** Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения. 2009. Т. 36. № 11. – С. 153 – 158.
4. **Коряшкіна Л.С.** Чисельні методи / Л.С. Коряшкіна, М.М. Одновол. – Дніпропетровськ: Вид-во ДГУ. – 2007. – 219 с.
5. **Ostapenko V.A.** Dynamic field of displacements in rods of variable length. // Proceedings of 8th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, 2011. – P. 316 – 323.
6. **Razdolsky A. G.** Propagation of longitudinal deformation wave along a lifting rope of variable length //International journal of solids and structures. – 2011. – Т. 48. – №. 24. – P. 359 –364.
7. **Fritzkowski P., Kamiński H.** Dynamics of a rope modeled as a discrete system with extensible members //Computational Mechanics. – 2009. – Т. 44. – №. 4. – С. 473 – 480.

Надійшла до редколегії 01.11.2013.

УДК 532.5

О.Г. Гоман, В.А. Катан

Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара

УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ, В УСЛОВИЯХ ОБРАЗОВАНИЯ ОДНОЙ ЗОНЫ ОТРЫВА И НАЛИЧИИ ВРАЩЕНИЯ

Розглянуто задачу про ударну взаємодію з відривом нестисливої рідини та вертикальної пластини, що плаває на її вільній поверхні при наявності обертання. Поставлена задача зведена до задачі Келдиша-Седова відносно комплексного потенціалу течії. Визначені гідродинамічні характеристики в умовах утворення однієї зони відриву течії.

Ключові слова: удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, задача Келдиша-Седова..

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии с отрывом несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее свободной поверхности при наличии вращения. Поставленная задача сводится к задаче Келдыша-Седова для комплексного потенциала течения. Определены гидродинамические характеристики при образовании одной зоны отрыва.