

УДК 532.59

О.Г. Гоман, В.А. Катан

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ И НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Проведены вычисления экспериментов по определению гидродинамических характеристик для тел вращения, наиболее часто используемых в качестве гидродинамических аппаратов. Математически задача приведена к определению характера ударного взаимодействия при больших и малых числах Фруда. Полученные гидродинамические характеристики могут быть использованы при определении сил, действующие на аппараты, находящиеся на поверхности жидкости.

Ключевые слова: ударное взаимодействие, коэффициент присоединённой массы, импульсивное давление.

Проведені обчислення експериментів по визначенню гідродинамічних характеристик для тіл обертання, які найбільш часто використовуються в якості гідродинамічних апаратів. Математично задача зведена до визначення характеру ударної взаємодії при великих і малих числах Фруда. Отримані гідродинамічні характеристики можуть бути використані при визначенні сил, які діють на апарати, що знаходяться на поверхні рідини.

Ключові слова: ударна взаємодія, коефіцієнт приєднаної маси, імпульсивний тиск.

Computing experiments to determine the hydrodynamic characteristics for bodies of revolution, which the most frequent as hydrodynamic devices, are conducted. Mathematically the problem reduces to determining the nature of shock interaction with large and small Froude numbers. The obtained hydrodynamic characteristics can be used in determining forces acting on devices located on the surface of the liquid.

Keywords: impact interaction, added mass coefficient, impulsive pressure.

Введение. В случае линейных колебаний плавающего на поверхности жидкости тела вращения условие на свободной поверхности представляется в виде [1]

$$\Phi_{tt} + g\Phi_z = 0|_r,$$

где $\Phi(z, r, t)$ – потенциал течения; (z, r, t) – цилиндрические координаты.

Для синусоидальных колебаний потенциал течения удобно представлять в комплексном виде, позволяющим явно выделить зависимость от времени [1]

$$\Phi(z, r, t) = \text{Re}[\varphi(z, r)e^{-i\omega t}], \quad (1)$$

где ω – частота колебаний тела.

С учетом представления (1) условие на свободной поверхности принимает вид

$$\varphi(z, r) - k_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, r) = 0, \quad (2)$$

где $k_0 = \omega^2 / g$.

В случае высокочастотных колебаний при $\omega \rightarrow \infty$ и $k_0 \rightarrow \infty$, а условие (2) совпадает с условием ударного взаимодействия при больших числах Фруда

$$Fz = v / \sqrt{gL}$$

$$\varphi = 0|_r. \quad (3)$$

Для низкочастотных колебаний $\omega \rightarrow 0, k_0 \rightarrow 0$ и условие (2) превращается в условие ударного взаимодействия при малых числах Фруда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \Big|_{\Gamma}. \quad (4)$$

Следовательно, решение ударных задач при $Fz = 0$ и $Fz \rightarrow \infty$ позволяет оценить диапазон возможного изменения коэффициентов присоединенных масс колеблющихся тел.

В качестве колеблющихся тел выбраны осесимметричные тела, которые наиболее часто используются в качестве метеорологических буюв [2]. Контуры образующих тел вращения, для которых проводились расчеты, приведены на рис. 1.

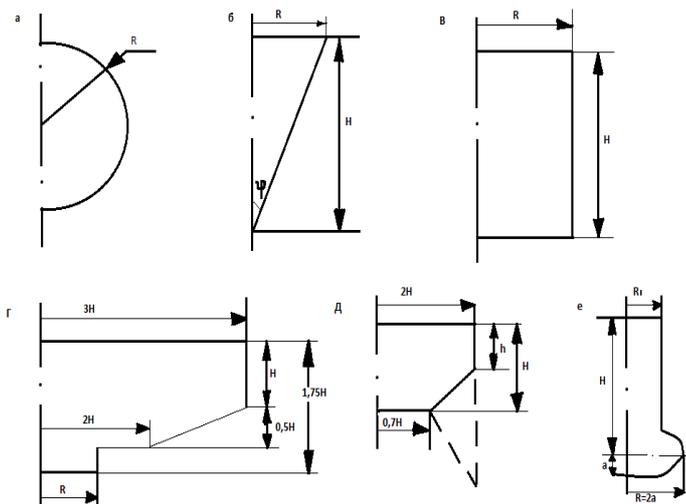


Рис. 1. Контуры образующих тел вращения: *a* – шар; *b* – конус; *c* – цилиндр; *d* – комбинация двух цилиндров и усеченного конуса; *d* – комбинация цилиндра и усеченного конуса; *e* – комбинация эллипсоида вращения и цилиндра

Коэффициент ударной присоединенной массы (КПМ) определяется по формуле

$$\mu = -2\pi \int_{L_s} \rho(s) r(s) z'_s(s) ds,$$

где ρ – плотность жидкости; L_s – смоченная часть образующей осесимметричного тела.

Импульсивное давление на поверхности тела определяется из интеграла Коши-Лагранжа [3]

$$p_i = -\rho\varphi.$$

Потенциал течения несжимаемой жидкости, возникающего в результате вертикального ударного взаимодействия тела вращения, плавающего на поверхности жидкости, определяется методом граничных интегральных уравнений (метод ГИУ) решения осесимметричной краевой задачи для уравнения Лапласа. На смоченной поверхности вращения ставится условие непротекания. На бесконечности требуется выполнение условия покоя жидкости.

Постановка задачи. При больших числах Фруда краевая задача с условием Дирихле (3) на свободной границе Γ является смешанной и для ее решения в

методе ГИУ в качестве фундаментального решения используется функция Грина задачи Дирихле для полуплоскости [4]. При малых числах Фруда краевая задача с условием Неймана (4) на свободной границе Γ является задачей Неймана и для ее решения применяется метод ГИУ с простейшим фундаментальным решением.

Аналитическое исследование. На рис. 2 приведено распределение импульсивного давления на смоченной поверхности плавающего шара. При низкочастотных колебаниях значения импульсивного давления выше, чем высокочастотные для фиксированной глубины погружения шара. Отрицательные импульсивные давления на верхней поверхности шара при низкочастотных колебаниях возникают при больших глубинах погружения. Таким образом, при низких частотах явление отрыва жидкости от поверхности наступает при больших глубинах.

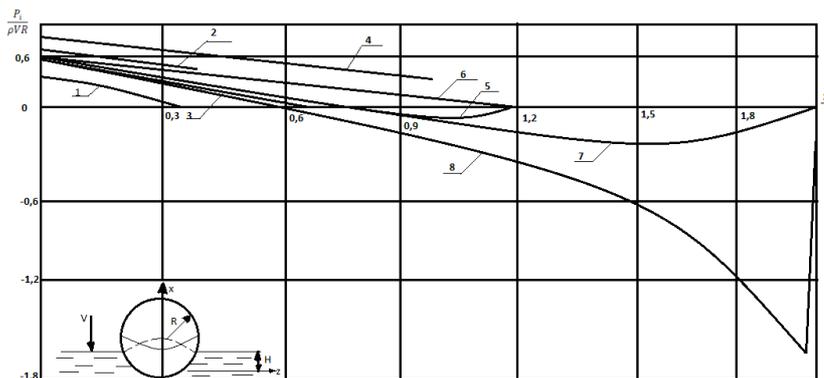


Рис.2. Распределение импульсивного давления на поверхности шара:
 1 - $\omega \rightarrow \infty, H/R=0,4$; 2 - $\omega=0, H/R=0,4$; 4 - $\omega=0, H/R=1$;
 5 - $\omega \rightarrow \infty, H/R=1,5$; 6 - $\omega=0, H/R=1,5$; 8 - $\omega=0, H/R=2$

На рис. 3 приведена зависимость КПМ шара от глубины погружения.

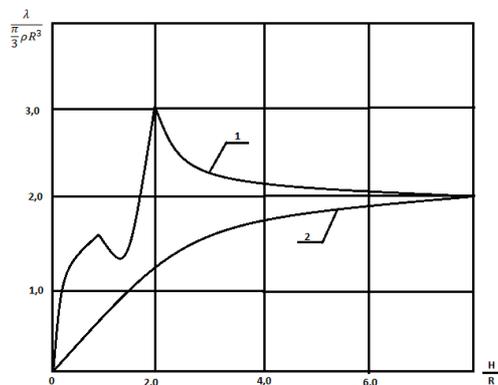


Рис.3. Коэффициент присоединённой массы шара: 1 - $\omega=0$; 2 - $\omega \rightarrow \infty$

Поведение КПМ шара при $\omega=0$ объясняется следующим образом. При глубине погружения шара $H/R \leq 1$ на поверхности шара потенциал отрицателен и убывает при увеличении глубины, поэтому КПМ увеличивается. При изменении глубины погружения в интервале $1 \leq H/R \leq 1,5$ на верхней половине шара

потенціал отрицателен, отрыв жидкости еще не происходит и, следовательно, КПМ уменьшается. При $\omega \rightarrow \infty$ в этом интервале глубин на верхней половине шара происходит отрыв жидкости и КПМ незначительно возрастает. Для глубин $H/R \geq 1,5$ КПМ возрастает из-за положительного потенциала на верхней половине шара. При дальнейшем увеличении глубины погружения шара влияние свободной поверхности ослабевает, распределение потенциала приближается к распределению потенциала при безотрывном обтекании шара потенциальным потоком, а ударные КПМ при $Fz = 0$ ($\omega = 0$) и $Fz \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$) стремятся к КПМ при безотрывном обтекании шара в безграничной жидкости. Приведенные расчёты для конусов с различным углом полураствора показали, как для высоких, так и для низких частот максимум импульсивного давления на образующей конуса смещен от вершины конуса. С увеличением угла полураствора конуса значения импульсивного давления возрастают. Для низкочастотных колебаний на свободной поверхности, начиная с расстояния $z/R \geq 3$, распределение импульсивного давления не зависит от угла полураствора конуса.

Также определялось распределение импульсивного давления на смоченной поверхности плавающего цилиндра при высоких и низких частотах колебаний. Максимальное импульсивное давление достигается в центре основания цилиндра и с увеличением отношения H/R его значения при $\omega = 0$ убывает, а при $\omega \rightarrow \infty$ возрастает.

Рис.4 содержит графики зависимости КПМ цилиндра, отнесенного к КПМ диска такого же радиуса при $\omega \rightarrow \infty$, при высоких и низких частотах колебаний от отношения H/R .

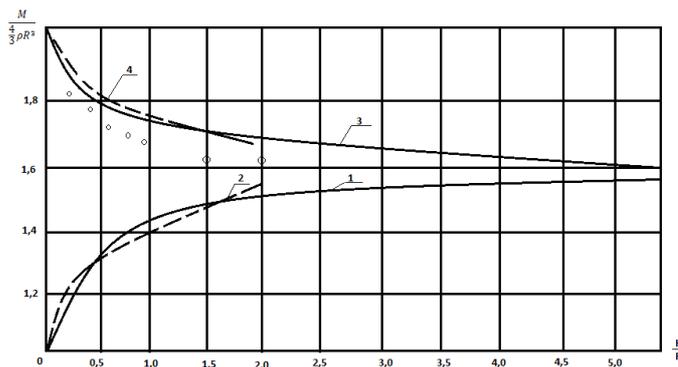


Рис.4. Коэффициент присоединённой массы плавающего цилиндра

При высокочастотных колебаниях цилиндра можно использовать следующую формулу [5]:

$$\mu = \frac{4}{3} \rho R^3 [1 + 0,3882 \left(\frac{H}{R}\right)^{0,343}], \quad 0 \leq \frac{H}{R} \leq 2, \quad (5)$$

погрешность которой не превышает 3%. Для значений $2 < H/R \leq 10$ при определении КПМ цилиндра можно использовать выражение

$$\mu = \frac{4}{3} \rho R^3 [1,4109 + 0,01947 \frac{H}{R}],$$

погрешность которого не превышает 2%. Для низкочастотных колебаний аналогичные формулы имеют вид

$$\mu = \frac{4}{3} \rho R^3 [2 - 0,2411 \left(\frac{H}{R}\right)^{0,5755}], \quad 0 \leq H/R \leq 2, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{4}{3} \rho R^3 [1,7007 - 0,01722 \frac{H}{R}], \quad 2 < H/R \leq 10,$$

погрешность которых не превышает соответственно 2,5% и 2%.

На рис. 5 приведены также расчеты для тела, представляющего собой комбинацию двух цилиндров и усеченного конуса (рис.1, *з*).

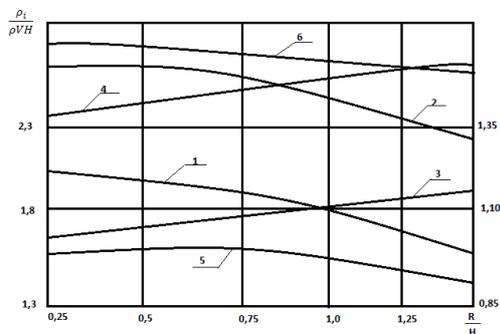


Рис. 5. Импульсивное давление и коэффициент присоединённой массы тела сложной формы:

- 1 – импульсивное давление в точке стыка $\omega \rightarrow \infty$;
- 2 – импульсивное давление в точке стыка $\omega = 0$;
- 3 – импульсивное давление на оси $\omega \rightarrow \infty$;
- 4 – импульсивное давление на оси $\omega = 0$;
- 5 – КПМ $\omega \rightarrow \infty$; 6 – КПМ $\omega = 0$

Диаметр меньшего цилиндра изменялся в пределах от $R/H = 0,25$ до $R/H = 1,5$, где H – высота большого цилиндра. Максимальное импульсивное давление и при $\omega \rightarrow \infty$, и при $\omega = 0$ достигается в точке стыка малого цилиндра и усеченного конуса, если отношение параметров R/H меньше 1. С увеличением параметра R/H величина импульсивного давления в точке стыка малого цилиндра и усеченного конуса уменьшается (кривая 1, рис.5) и при $R/H > 1$ максимум импульсивного давления достигается на оси тела. Кривые 3 и 4 рис.5 отражают изменение КПМ, отнесенного к массе вытесненной жидкости, в зависимости от отношения параметров R/H соответственно при $\omega \rightarrow \infty$ и $\omega = 0$. С увеличением отношения R/H КПМ уменьшается с точностью до 5% в диапазоне изменения R/H от 0,25 до 1,5, присоединенную массу при $\omega \rightarrow \infty$ можно полагать равной массе вытесненной жидкости. При $\omega = 0$ присоединенная масса примерно равна 1,5 массы вытесненной жидкости.

В комбинации цилиндра и усеченного конуса (рис.1, *д*) отношение параметров h/H изменялось в пределах от $h/H = 0,125$ до $h/H = 3,0$, где H – общая высота тела, h – высота цилиндра. График зависимости КПМ, отнесенной к массе вытесненной жидкости, от отношения параметров h/H приведен на рис. 6.

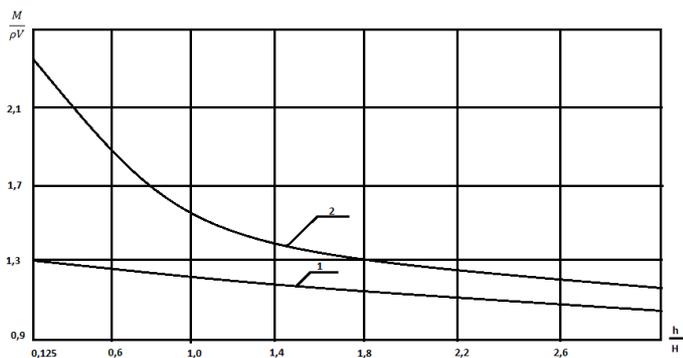


Рис.6. Коэффициент присоединённой массы комбинации цилиндра и усечённого конуса: 1 - $\omega \rightarrow \infty$; 2 - $\omega = 0$

В комбинации эллипсоида вращения высоты $2a$ и радиуса $R_0 = 2a$ и цилиндра радиуса $R_1 < R_0$ глубина погружения центра эллипсоида H изменялась в пределах $1,5 \leq H/a \leq 6,0$, а радиус цилиндра R_1/a принимал одно из значений 0,25; 0,5 или 0,75. На верхней части эллипсоида и на поверхности цилиндра импульсивное давление оказывается отрицательным, т.е. эта часть поверхности тела будет находиться в зоне отрыва. На рис.7 приведен график изменения КПМ, отнесенного к массе вытесненной жидкости, в зависимости от глубины погружения.

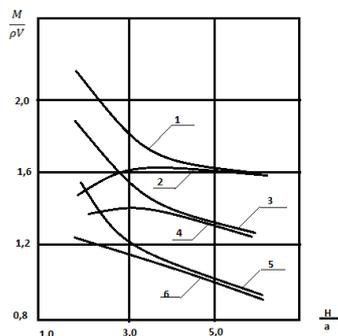


Рис.7. Коэффициент присоединённой массы комбинации цилиндра и эллипсоида вращения:

1 - $R_1/a = 0,25, \omega = 0$; 2 - $R_1/a = 0,25, \omega \rightarrow \infty$;

3 - $R_1/a = 0,5, \omega = 0$; 4 - $R_1/a = 0,5, \omega \rightarrow \infty$;

5 - $R_1/a = 0,75, \omega = 0$; 7 - $R_1/a = 0,75, \omega \rightarrow \infty$

Выводы. В случае тел выпуклой формы (диск, шар, конус, цилиндр и т.п.) значения импульсивного давления и КПМ больше в случае низкочастотных колебаний при одинаковых геометрических условиях. Это обусловлено тем, что условие отсутствия волнообразования (4) эквивалентно наличию на свободной поверхности непроницаемой жесткой крышки, которая увеличивает стеснения потока жидкости, что приводит к отмеченному выше увеличению импульсивного

давления и КПМ. Характерно, что отрыв жидкости на верхней поверхности шара при $\omega = 0$ происходит при больших значениях глубины погружения H/R , чем в случае $\omega \rightarrow \infty$. Для тел вогнутой сложной формы соотношение между значениями КПМ при $\omega \rightarrow \infty$ и $\omega = 0$ остается прежним, однако в распределении импульсивного давления и в появлении отрыва жидкости могут быть аномалии от общей закономерности, поэтому в этом случае для новой конфигурации необходимо проведение расчетов.

Полученные гидродинамические характеристики осесимметричных тел могут быть использованы при определении сил, действующих на тело вращения, колеблющееся на поверхности жидкости.

Библиографические ссылки

1. **Кочин Н.Е.** Теоретическая гидромеханика. Часть 1/ Н. Е. Кочин, Н. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: Гостехиздат, 1948. – 684с.
2. **Берто О.Г.** Океанографические буи. / О.Г. Берто. – Л.: Судостроение, 1979. – 214 с.
3. **Седов Л.И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1980. – 448с.
4. **Железняк В.Д.** Применение функции Грина для решения ударных задач гидродинамики / В. Д. Железняк, В. А. Катан. – Днепр. гос. ун-т. Днепропетровск, 1984. – Библиогр. II назв. – Деп. в ВИНТИ 18 декабря 1984, № 8061-84 ДЕП. – 22 с.
5. **Катан В.А.** Ударные присоединенные массы некоторых осесимметричных буюв / В. А.Катан. – Днепр. гос. ун-т. – Днепропетровск, 1984.– Библиогр. 3 назв. – Деп. в ВИНТИ 28 марта 1984, № 1712-84 ДЕП – 13 с.
6. **Короткин А.И.** Присоединенные массы судна. / А. И. Короткин. – Л.: Судостроение, 1986. – 312с.

Надійшла до редколегії 25.06.2014

УДК 517.9

Т. С. Зеленська, А. В. Сяєв

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ПРО ПОШИРЕННЯ ПОЗДОВЖНИХ ХВИЛЬ У СТАЛЬНИХ КАНАТАХ ДЛЯ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА ЗІ ЗМІННОЮ ГРАНИЦЕЮ

Розглянуто початково-крайову задачу математичної фізики, яка описує позовжні коливання каната змінної довжини з вантажем на нижньому кінці. Наведено порівняння розв'язання за допомогою модифікованого методу продовження та числового інтегрування.

Ключові слова: напруження, позовжні переміщення.

Рассмотрена начально-краевая задача математической физики, описывающая продольные колебания каната переменной длины с грузом на нижнем конце. Приведены сравнения решений с помощью модифицированного метода продолжения и числового интегрирования.

Ключевые слова: напряжение, продольные перемещения.

Considered initial-boundary value problem of mathematical physics that describes the longitudinal fluctuations of the rope variable length with a weight at the lower end. Provides a comparison of solutions using a modified method of continuation and numerical integration.

Key words: stress, longitudinal movement.

© Зеленська Т. С., Сяєв А. В., 2014