ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2009. Вип. 1. С. 18–22

УДК 517.9

ПРО ДОДАТНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ ТИПУ КАРАТЕОДОРІ [1]

О. В. Капустян*, В. Я. Данілов**

* *Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ 03022. E-mail: alexkap@univ.kiev.ua*

** *Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ 03022. E-mail: danilov@ukr.net*

Для нелінійного рівняння реакції-дифузії з правою частиною типу Каратеодорі, умови на яку не забезпечують єдиність розв'язку задачі Коші, доведено глобальну розв'язність у класі сумовних із квадратом функцій, що набувають невід'ємних значень.

Ключові слова. Рівняння реакції-дифузії, невід'ємні розв'язки, умови розв'язності.

1. Вступ

Як відомо, для багатьох нелінійних еволюційних рівнянь математичної фізики важливим є доведення того, що розв'язок із початковими даними із заданої підмножини фазового простору залишається в цій множині для всіх $t \geq 0$ (рівняння з інваріантною областю). В класі систем типу реакції–дифузії найвідомішими прикладами є рівняння Ходгкіна–Хаслі, що описують передачу нервових імпульсів, рівняння Смоллера в теорії надпровідності, рівняння теорії горіння, рівняння Білоусова–Жаботинського в хімічній динаміці, дифузійні системи типу Лотки–Вольтерра та багато інших [1]. При цьому в усіх перерахованих задачах інваріантна область знаходиться завдяки явно заданим коефіцієнтам поліноміальної правої частини. Частинним випадком цієї задачі є доведення розв'язності в класі невід'ємних функцій. У випадку гладкого по фазовій змінній нелінійного доданка найбільш загальні результати щодо існування невід'ємного розв'язку були отримані в [2]. Для систем із негладкою по фазовій змінній правою частиною виду $f = f(u)$ відповідні результати одержані в [3]. Проте значну кількість прикладних задач, зокрема і деяких з названих класичних систем, доставляють приклади математичних моделей, в яких нелінійний доданок $f = f(x, u)$ є відображенням типу Каратеодорі. Саме з'ясуванню умов, за яких рівняння реакції-дифузії з такою нелінійністю допускають невід'ємні розв'язки, і присвячена дана робота.

[1] Робота виконана за фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень, грант No. 29.1/025

2. Постановка задача і допоміжні результати

Розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\triangle u(t,x) - f(x,u(t,x)) + h(x),\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

де константа $a > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $h \in L^2(\Omega)$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — функція типу Каратеодорі, тобто

$$\begin{aligned} &f(x,\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} - \text{неперервна для м. в. } x \in \Omega, \\ &f(\cdot,u) : \Omega \mapsto \mathbb{R} - \text{вимірна для всіх } u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

і виконані такі умови:

$$\left.\begin{aligned} \exists\, C_1,\ C_2 > 0,\ \alpha > 0,\ p \geq 2\ \forall\, u \in \mathbb{R} \text{ для м. в. } x \in \Omega, \\ |f(x,u)| \leq C_1(1 + |u|^{p-1}),\ f(x,u)u \geq \alpha|u|^p - C_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Надалі $a, \Omega, C_1, C_2, \alpha, p$ будемо називати константами задачі (2.1).

Фазовим простором задачі (2.1) є простір $L^2(\Omega)$, норму і скалярний добуток в якому будемо позначати $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ відповідно.

Оскільки в силу умов (2.2) $|f(x,u)|^q \leq \widetilde{C}_1(1 + |u|^p)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то маємо таке означення розв'язку (2.1):

Означення 1. Функція $u = u(t,x) \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T; L^p(\Omega))$ називається розв'язком (2.1) на $(0,T)$, якщо для довільних $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $\eta \in \mathbb{C}_0^\infty(0,T)$

$$-\int_\tau^T (u,v)\eta_t dt + \int_\tau^T (a((u,v)) + (f(x,u),v) - (h,v))\eta dt = 0. \tag{2.3}$$

Відомо [1], що будь-який розв'язок задачі (2.1) належить $\mathbb{C}([0,T]; L^2(\Omega))$, тому природним класом глобальної розв'язності задачі (2.1) є функціональний клас

$$W = L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T; L^p(\Omega)) \cap \mathbb{C}([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Теорема 1. *[1] Для довільних $u_0 \in L^2(\Omega)$ задача (2.1) за умов (2.2) має принаймні один розв'язок у класі W, для якого $u(0) = u_0$.*

Крім того, для довільного $u \in W$ - розв'язку (2.1) справедливі оцінки:

$$\|u(t)\|^2 + a\int_s^t \|u(\tau)\|^2_{H_0^1} d\tau + 2\alpha \int_s^t \|u(\tau)\|^p_{L^p} d\tau \leq \\ \|u(s)\|^2 + C_3(t-s)(\|h\|^2 + 1), \tag{2.4}$$

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(s)\|^2 + \int_s^t (h, u(p))dp + C_4|\Omega|(t-s), \tag{2.5}$$

$\forall\ t \geq s,\ t,s \in [0,T]$, причому додатні константи C_3, C_4 залежать лише від констант задачі (2.1).

Покладемо

$$H = \{u \in L^2(\Omega) \mid u(x) \geq 0 \text{ для м.в. } x \in \Omega\}.$$

Основною метою роботи є з'ясування умов, за яких для довільних $u_0 \in H$ існує принаймні один розв'язок $u = u(x,t)$ задачі (2.1) з $u(0) = u_0$, для якого

$$u(t) \in H \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.6}$$

Для цього будемо конструювати апроксимативні задачі для (2.1), праві частини яких у певному сенсі збігаються до правої частини (2.1), і при цьому є гладкими функціями, що задовольняють умови з [2].

З цією метою розглянемо послідовність задач (2.1) (будемо позначати їх $(2.1)_n$, $n \geq 0$, $(2.1)_0 = (2.1)$), де замість функцій $f(x,u)$, $h(x)$ стоять функції $f_n(x,u)$, $h_n(x)$ відповідно, що мають такі властивості: $\forall\, n \geq 1$ f_n задовольняє умови (2.2) з константами, що не залежать від n і для довільних $A > 0$, $\theta \in L^2(\Omega)$

$$\left.\begin{array}{c} \sup\limits_{|v| \leq A} ess \sup\limits_{x \in \Omega} |f_n(x,v) - f(x,v)| \to 0, \ n \to \infty, \\ \displaystyle\int_\Omega (h_n(x) - h(x))\theta(x)dx \to 0, \ n \to \infty. \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

Тоді з теореми 1 для довільних $n \geq 0$, $u_0^n \in L^2(\Omega)$ задача $(2.1)_n$ має принаймні один розв'язок у класі W.

Наступний результат є аналогом теореми про неперервну залежність від початкових даних і дозволить здійснювати граничний перехід в апроксимативних задачах.

Теорема 2. *[3],[4] Нехай $\{u^n\} \subset W$ — послідовність розв'язків задач* $(2.1)_n$, *причому $u^n(0) \to u_0$ слабо в $L^2(\Omega)$. Нехай задана послідовність $\{t_n\} \subset [0,T]$ така, що $t_n \to t_0 \in [0,T]$. Тоді існує $u \in W$ — розв'язок (2.1) такий, що $u(0) = u_0$ і принаймні по підпослідовності $u^n(t_n) \to u(t_0)$ слабо в $L^2(\Omega)$. Якщо $t_0 \in (0,T)$, то по підпослідовності $u^n(t_n) \to u(t_0)$ сильно в $L^2(\Omega)$. Якщо ж $u^n(0) \to u_0$ сильно в $L^2(\Omega)$, то для $t_n \searrow 0$ по підпослідовності $u^n(t_n) \to u_0$ сильно в $L^2(\Omega)$.*

3. Основний результат

Перед формулюванням основного результату наведемо допоміжну лему, що дозволить стверджувати властивість (2.6).

Лема 1. *Нехай для задачі виконані умови (2.2), $f(x,\cdot) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ для м. в. $x \in \Omega$,*

$$f'_u(x,u) \geq -C, \tag{3.1}$$

$$-f(x,0) + h(x) \geq 0 \text{ для м. в. } x \in \Omega. \tag{3.2}$$

Тоді для довільних $u_0 \in H$ існує єдиний розв'язок $u = u(x,t)$ задачі (2.1) з $u(0) = u_0$, для якого $u(t) \in H$ $\forall\, t \in [0,T]$.

Теорема 3. *Нехай виконані умови (2.2) і наступні:*

$$\begin{gathered}\forall\ \epsilon>0\ \forall\ A>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ u,v,\ \ |u|\le A,\ \ |u-v|<\delta\\ ess\sup_{x\in\Omega}|f(x,u)-f(x,v)|<\epsilon,\end{gathered}\tag{3.3}$$

$$-f(x,0)+h(x)\ge 0\ \textit{для}\ \ \textit{м. в.}\ x\in\Omega.\tag{3.4}$$

Тоді для довільних $u_0\in H$ існує принаймні один розв'язок $u=u(x,t)$ задачі (2.1), $u(0)=u_0$, для якого $u(t)\in H\ \forall\ t\in[0,T]$.

Доведення. Для цього для кожного $k\ge 1$ покладемо

$$f_k(x,u)=\begin{cases} f(x,u), & |u|\le k,\\ f(x,k)(\frac{u}{k})^{p-1}, & u>k,\\ f(x,-k)(-\frac{u}{k})^{p-1}, & u<-k.\end{cases}$$

Тоді f_k — функція Каратеодорі, і $\forall\ A>0$

$$\sup_{|u|\le A}\ ess\sup_{x\in\Omega}|f_k(x,u)-f(x,u)|\to 0,\ \ k\to\infty.$$

Нехай $\rho_\epsilon\ge 0$ — стандартна регуляризуюча послідовність. Означимо функції

$$f_k^\epsilon(x,u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_\epsilon(s)f_k(x,u-s)ds.$$

В силу умови (3.3) існує $\epsilon_k\in(0,1)$, $\epsilon_k\to 0$ таке, що $\forall\ u$, $|u|\le k$, $\forall\ s$, $|u-s|<\epsilon_k$

$$ess\sup_{x\in\Omega}|f_k(x,u)-f_k(x,s)|\le\frac{1}{k}.$$

Покладемо $f^k(x,u)=f_k^{\epsilon_k}(x,u)$. За побудовою $\forall\ k\ge 1\ f^k(x,\cdot)\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Тоді легко показати, що для всіх $k\ge k_0$, де k_0 залежить лише від констант задачі (2.1), справедливі наступні твердження:

$$\begin{gathered}\forall\ A>0\quad\sup_{|u|\le A}\ ess\sup_{x\in\Omega}|f^k(x,u)-f(x,u)|\to 0,\ \ k\to\infty,\\ \||f^k(x,u)|\le D_1(1+|u|^{p-1}),\qquad f^k(x,u)u\ge\beta|u|^p-D_2,\\ \frac{\partial f^k(x,u)}{\partial u}\ge -D_3(k),\end{gathered}\tag{3.5}$$

де $D_3(k)$ — невід'ємне число, своє для кожного $k\ge k_0$, а додатні константи D_1, $D_2\ge C_2$, β не залежать від k.

Тепер для кожного $k\ge 1$ маємо

$$f^k(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_{\epsilon_k}(s)f(x,-s)ds.$$

Покладемо

$$h^k(x):=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_{\epsilon_k}(s)(f(x,0)-f(x,-s)ds,$$

$$F^k(x,u) = f^k(x,u) + h^k(x).$$

Тоді

$$-F^k(x,0) + h(x) \geq 0.$$

Тепер при фіксованих $k > 1$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\triangle u(t,x) - F^k(x,u(t,x)) + h(x), \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \ u(0,x) = u_0(x) \in H. \end{cases} \tag{3.6}$$

Оскільки $|h^k(x)| \leq \frac{1}{k}$, то для F^k виконуються умови (3.5). Отже, задача (3.6) має єдиний розв'язок $u^k(x,t) \geq 0$ в класі W і в силу теореми 2 $\forall\ t \in [0,T]$ $u^k(t) \to u(t)$ в $L^2(\Omega)$, де $u(\cdot)$ — розв'язок (2.1), $u(0) = u_0$, для якого в силу замкненості H маємо $u(t) \in H$ $\forall\ t \in [0,T]$. Теорема доведена. □

Наведемо приклад, який ілюструє, що якщо в умовах теореми не вимагати єдиності розв'язку задачі Коші, то можуть існувати розв'язки, що не мають властивості (2.6). Для цього розглянемо задачу (2.1) з $a = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $T = 1$, $h(x) \equiv 0$,

$$f(x,u) = \begin{cases} -4u - 3(\sin 2x)^{1/3}u^{2/3}, \quad u \in [0,1], \\ (-4 - 3(\sin 2x)^{1/3})u + u(u^2-1), \quad u \notin [0,1]. \end{cases}$$

Тоді f — функція Каратеодорі і виконані умови (2.2), (3.3) і $f(x,0) = 0$, тобто виконуються всі умови теореми. Покладемо $u_0(x) = 0 \in H$. Тоді $u(t,x) \equiv 0$ — очевидний розв'язок (2.1) із класу H. Функція $u(t,x) = t^3 \sin 2x$ також розв'язок (2.1) на $(0,1)$. Проте, $\forall\ t \in (0,1)$ $u(t) \notin H$.

Бібліографічні посилання

1. *Temam R.* Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York : Springer, 1988. — 600 c.
2. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. — Providence : AMS, 2002. — 400 c.
3. *Kapustyan O. V., Valero J.* On the Kneser property for the complex Ginzburg-Landau equation and the Lotka-Volterra system with diffusion // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2009. — № 357. — С. 254–272.
4. *Kapustyan O. V., Melnik V. S., Valero J., Yasinsky V. V.* Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O. V. Kapustyan, V. S. Melnik, J. Valero, V. V. Yasinsky. — К. : Наукова думка, 2008. — 215 c.

Надійшла до редакції 01.09.2009