ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2012. Вип. 4. С. 139–146

УДК 517.9:519.6

ГРАНИЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Н. Н. Ясько

Днепропетровский национальный университет, кафедра компьютерных технологий, пр. К.Маркса, 35, ДНУ, 49010, Днепропетровск,
E-mail: yasko@olymp.dp.ua

Для произвольных векторных полей, удовлетворяющих условию соленоидальности, получено граничное интегральное представление в виде ряда, каждый член которого представляет собой поверхностный интеграл по границе области, содержащий значения поля и его роторов различного порядка. Выведены новые граничные интегральные уравнения для ряда линейных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: фундаментальное решение, дивергенция, ротор, граничный интеграл.

1. Введение

Векторное поле является соленоидальным, если в любой точке его дивергенция равна нулю. Многие физические явления, в частности, в электромагнитной теории, ядерной физике и гидродинамике, описываются соленоидальными векторными полями. Одним из эффективных подходов к решению задач с такими полями является применение так называемых бессеточных (meshless) [1] методов, в частности, методов граничных элементов [3,4]. Чаще всего эти методы применяются в случае скалярных и векторных полей, которые удовлетворяют линейным уравнениям в частных производных второго или более высоких порядков.

При построении таких методов обычно используются интегральные представления решений соотвествующих уравнений. Такие граничные интегральные представления хорошо известны для уравнения Лапласа, Гельмгольца [2], Максвелла, т. е. в основном для линейных уравнений. Применение данных методов к нелинейным задачам ограничивается обычно тем обстоятельством, что интегральные представления решений таких задач обычно не известны или их невозможно получить существующими методами.

В данной работе предпринята попытка получить интегральное представление для произвольного соленоидального бесконечно дифференцируемого векторного поля, определенного в некоторой области трехмерного эвклидового пространства, через значения его и его производных на границе области.

2. Постановка задачи и основные обозначения

Пусть в области D, ограниченной кусочно-гладкой границей (поверхностью) S, задано векторное поле $\mathbf{V}_1 = \{V_{1x}, V_{1y}, V_{1z}\}$, причем функции V_{1x}, V_{1y}, V_{1z} имеют в области D непрерывные частные производные любого порядка.

Для того, чтобы векторное поле було соленоидальным, оно должно удовлетворять условию

$$\nabla\cdot\mathbf{V}_1 = 0. \tag{2.1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{V}_2 = \nabla\times\mathbf{V}_1, \tag{2.2}$$

т. е. $\mathbf{V}_2$ является ротором векторного поля $\mathbf{V}_1$. Это определение можно расширить, введя ротор векторного поля $\mathbf{V}_i$ произвольного порядка

$$\mathbf{V}_{i+1} = \nabla\times\mathbf{V}_i = 0, \qquad i = 1, 2, ...N. \tag{2.3}$$

Рассмотрим семейство функций F_i, которые удовлетворяют уравнениям

$$\Delta^i F_i + \delta(P - M) = 0, \qquad i = 1, 2, ...N, \tag{2.4}$$

где Δ – оператор Лапласа, $M(x_0, y_0, z_0) \in D$ некоторая фиксированная точка, $P(x, y, z)$ – текущая точка, а $\delta(P-M)$ — дельта-функция Дирака. В качестве функций F_i можно выбрать

$$F_i = \frac{1}{4\pi}\frac{r^{2i-3}}{(2i-2)!}, \qquad i = 1, 2, ...N, \tag{2.5}$$

где r есть расстояние между точками P и M. При $i = 1$ функция F_1 является фундаментальным решением трехмерного уравнения Лапласа, функция F_2 является фундаментальным решением трехмерного бигармонического уравнения и т. д.

Целью данной работы является представление вектора $\mathbf{V}_1$ в любой точке области D через его значения на границе S.

3. Метод взвешенных невязок

В работе [6] отмечалось, что большинство численных методов для решения дифференциальных уравнений могут быть получены путем применения соответствующих весовых функций в методе взвешенных невязок. В частности, применение метода взвешенных невязок для получения граничных интегральных уравнений было продемонстрировано в [3, 4].

В данном случае основное соотношение метода взвешенных невязок для поля, удовлетворяющего уравнению (2.1), в векторной форме может быть записано следующим образом:

$$\int\limits_D \nabla\cdot\mathbf{V}_1\, \nabla F_1\; dD = 0, \tag{3.1}$$

где ∇F_1 представляет собой весовую функцию.

Задача состоит в том, чтобы в выражении (3.1) превратить интеграл по области D в интегралы по границе S, используя формулу Остроградского – Гаусса и производные от нее формулы для градиента скалярного и ротора векторного поля. Для этого подынтегральное выражение (3.1) преобразуем, используя формулы для дифференцирования произведения векторных полей [5]:

$$\nabla\times(\mathbf{V}_1\times\nabla F_1) = (\nabla F_1\nabla)\,\mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}_1\nabla)\,\nabla F_1 + \mathbf{V}_1\,\nabla\cdot(\nabla F_1) - \nabla\cdot\mathbf{V}_1\,\nabla F_1$$

и

$$\nabla(\mathbf{V}_1\cdot\nabla F_1) = (\nabla F_1\nabla)\,\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_1\nabla)\,\nabla F_1 + \nabla F_1\times(\nabla\times\mathbf{V}_1)$$

Если сложить эти два равенства, то подынтегральное выражение (3.1) можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{V}_1\,\nabla F_1 = 2\,(\nabla F_1\nabla)\,\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1\,\nabla\cdot(\nabla F_1) + \nabla F_1\times(\nabla\times\mathbf{V}_1) - \\ - \nabla\times(\mathbf{V}_1\times\nabla F_1) - \nabla(\mathbf{V}_1\cdot\nabla F_1).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Первый член в правой части можно преобразовать, используя выражение для дивергенции прямого тензорного произведения (диадика) двух векторов [7]:

$$\nabla(\nabla F_1\otimes\mathbf{V}_1) = (\nabla F_1\nabla)\,\mathbf{V}_1 + \nabla\cdot\mathbf{V}_1\,\nabla F_1,$$

а $\nabla\cdot(\nabla F_1) = \Delta\,F_1 = -\delta(P-M)$. Тогда уравнение (3.2) приобретет вид:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{V}_1\,\nabla F_1 = -2\,\nabla(\nabla F_1\otimes\mathbf{V}_1) - \mathbf{V}_1\,\delta(P-M) + \\ + \nabla\times(\mathbf{V}_1\times\nabla F_1) + \nabla(\mathbf{V}_1\cdot\nabla F_1) - \nabla F_1\times(\nabla\times\mathbf{V}_1).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Последний член в (3.3) с учетом того, что $\mathbf{V}_2 = \nabla\times\mathbf{V}_1$, может быть выражен с учетом принятых обозначений следующим образом:

$$\nabla F_1\times(\nabla\times\mathbf{V}_1) = \nabla\times(F_1\,\mathbf{V}_2) - F_1\,\nabla\times\mathbf{V}_2 = \nabla\times(F_1\,\mathbf{V}_2) - \mathbf{V}_3\,\nabla\cdot(\nabla F_2).$$

Тогда (3.3) примет вид:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{V}_1\,\nabla F_1 = -2\,\nabla(\nabla F_1\otimes\mathbf{V}_1) - \mathbf{V}_1\,\delta(P-M) + \nabla\times(\mathbf{V}_1\times\nabla F_1) + \\ + \nabla(\mathbf{V}_1\cdot\nabla F_1) - \nabla\times(F_1\,\mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3\,\nabla\cdot(\nabla F_2).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Поставим в основное соотношение метода взвешенных невязок (3.1) преобразованное подынтегральное выражение (3.4), а затем применим формулу Остроградского – Гаусса и производные из нее формулы для приведения интегралов по области D к интегралам по границе S:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1(M) = \int\limits_S [-2(\nabla F_1\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}_1\times\nabla F_1)\times\mathbf{n} + (\mathbf{V}_1\cdot\nabla F_1)\,\mathbf{n} + F_1\,\mathbf{V}_2\times\mathbf{n}]\,dS + \\ + \int\limits_D \mathbf{V}_3\,\nabla\cdot(\nabla F_2)\,dD,\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе области.

Воспользовавшись формулами для тройного векторного произведения, эту формулу можно несколько видоизменить, выделив отдельно касательные и нормальную компоненты $\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{V}_1(M) = \int_S [(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{n}) \times \nabla F_1 - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n}) \nabla F_1 + F_1 \mathbf{V}_2 \times \mathbf{n}]\, dS + \\ + \int_D \mathbf{V}_3 \nabla \cdot (\nabla F_2)\, dD. \tag{3.6}$$

В выражении (3.6) осталось преобразовать последний член, чтобы избавиться от интегрирования по области D. Используя примененный ранее подход, получим:

$$\mathbf{V}_3 \nabla \cdot (\nabla F_2) = \nabla \times (\mathbf{V}_3 \times \nabla F_2) - \nabla(\mathbf{V}_3 \cdot \nabla F_2) + 2 \nabla(\mathbf{V}_3 \otimes \nabla F_2) + \\ + \nabla \times (F_2 \mathbf{V}_4) - \mathbf{V}_5 \nabla \cdot (\nabla F_3).$$

Взглянув на последний член в предыдущей формуле, можно записать рекуррентное выражение:

$$\mathbf{V}_3 \nabla \cdot (\nabla F_2) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^i [\nabla \times (\mathbf{V}_{2i+1} \times \nabla F_{i+1}) - \nabla(\mathbf{V}_{2i+1} \cdot \nabla F_{i+1}) + \\ +2 \nabla(\mathbf{V}_{2i+1} \otimes \nabla F_{i+1}) + \nabla \times (F_{i+1} \mathbf{V}_{2i+2})] - (-1)^N \mathbf{V}_{2N+3} \nabla \cdot (\nabla F_{N+2})$$

Окончательно, подставляя (3.7) в (3.7) и переходя к бесконечному ряду, получим:

$$\mathbf{V}_1(M) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \int_S [(\mathbf{V}_{2i+1} \times \mathbf{n}) \times \nabla F_{i+1} - (\mathbf{V}_{2i+1} \cdot \mathbf{n}) \nabla F_{i+1} + \\ + F_{i+1} \mathbf{V}_{2i+2} \times \mathbf{n}]\, dS. \tag{3.7}$$

Это и есть граничное интегральное представление произвольного соленоидального бесконечно интегрируемого векторного поля. Здесь не исследуются подробно условия сходимости данного ряда, но все же следует отметить, что если все векторы $\mathbf{V}_i$ будут ограниченными в области D, то полученный ряд очевидно будет сходящимся ввиду наличия в знаменателе быстрорастущего множителя $(2i-2)!$.

4. Приложения полученной формулы

Во многих случаях искомые поля таковы, что очередное $\mathbf{V}_i$ тождественно равно нулю, и вместо бесконечного ряда в (3.7) получается конечное выражение. Рассмотрим приложение полученной формулы (3.7) к решению конкретных уравнений.

4.1. Потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости

В случае течения идельной несжимаемой жидкости $\mathbf{V}_2 = 0$ и формула (3.7) позволяет выразить скорость в точке M следующим образом:

$$\mathbf{V}_M = \int\limits_S (\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla_P F_{MP}\, dS_P - \int\limits_S (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\nabla_P F_{MP}\, dS_P, \tag{4.1}$$

где $F_{MP} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MP}}$.

Нетрудно заметить, что $\nabla_P F_{MP}$ — это скорость единичного источника, а $(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla_P F_{MP}$ это скорость, индуцируемая вихревым отрезком. Тогда формула (4.1) может быть выражена в виде теоремы.

Теорема 4.1. *Скорость потенциального потока идельной несжимаемой жидкости может быть выражена как суперпозиция источников и вихрей, расположенных на границе области, причем интенсивность источников равна нормальной компоненте скорости, а интенсивность вихрей равна касательной компоненте скорости.*

Данная формула уже использовалась в теории электромагнитных волн [8] и в процессе анализа течения вязкой жидкости [9]. Также она применялась для численных расчетов плоских течений со свободной поверхностью в работе [10].

Интересно сравнить данный результат с классической теорией потенциала для уравнения Лапласа [2]. В этом случае скорость имеет потенциал, который является гармонической функцией. Интегральное представление потенциала может быть выражено следующим образом:

$$\varphi_M = \int_S V_n\, F_{MP}\, dS_P - \int_S \varphi \frac{\partial F_{MP}}{\partial\, \mathbf{n}_P}\, dS_P. \tag{4.2}$$

Скорость может быть вычислена как градиент потенциала:

$$\mathbf{V}_M = \nabla \int_S V_n\, F_{MP}\, dS_P - \nabla \int_S \varphi \frac{\partial F_{MP}}{\partial\, \mathbf{n}_P}\, dS_P \tag{4.3}$$

или

$$\mathbf{V}_M = -\int_S V_n\, \nabla_P F_{MP}\, dS_P + \int_S \varphi(\nabla\, \mathbf{n}_P)\, \nabla_P F_{MP}\, dS_P. \tag{4.4}$$

Сравнивая выражения (4.1) и (4.4), придем к следующему равенству:

$$\int_S (\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla_P F_{MP}\, dS_P = \int_S \varphi(\nabla\, \mathbf{n}_P)\,\nabla_P F_{MP}\, dS_P. \tag{4.5}$$

Данное равенство может использоваться в качестве интегрального уравнения Фредгольма первого рода для вычисления касательных скоростей при известном потенциале, или, наоборот, вычисления потенциала при известных касательных компонентах скорости.

Интегральное представление (4.1) также может быть использовано для получения граничных интегральных уравнений при решении краевых задач.

Так, в случае первой краевой задачи для уравнения Лапласа на границе задается потенциал (и соответственно могут быть определены касательные компоненты скорости). Тогда для определения нормальной компоненты скорости будем иметь интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\frac{1}{2}V_n - \int_S V_n \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{n}_M}\, dS_P = \int_S V_t \Big(\frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{t}_P}\, \mathbf{n}_P\, \mathbf{n}_M - \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{n}_P}\, \mathbf{t}_P\, \mathbf{n}_M \Big) - \\ - V_s \Big(\frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{n}_P}\, \mathbf{s}_P\, \mathbf{n}_M - \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{s}_P}\, \mathbf{n}_P\, \mathbf{n}_M \Big)\, dS_P, \qquad (4.6)$$

где $\mathbf{s}_P$ и $\mathbf{t}_P$ – единичные ортогональные векторы, лежащие в касательной плоскости.

В случае же второй краевой задачи имеем два интегральных уравнения Фредгольма второго рода для определения касательных компонент скорости V_s и V_t:

$$\frac{1}{2}V_s - \int_S V_t \Big(\frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{t}_P}\, \mathbf{n}_P\, \mathbf{s}_M - \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{n}_P}\, \mathbf{t}_P\, \mathbf{s}_M \Big) - \\ - V_s \Big(\frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{n}_P}\, \mathbf{s}_P\, \mathbf{s}_M - \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{s}_P}\, \mathbf{n}_P\, \mathbf{s}_M \Big)\, dS_P = \int_S V_n \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{s}_M}\, dS_P, \qquad (4.7)$$

$$\frac{1}{2}V_t - \int_S V_t \Big(\frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{t}_P}\, \mathbf{n}_P\, \mathbf{t}_M - \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{n}_P}\, \mathbf{t}_P\, \mathbf{t}_M \Big) - \\ - V_s \Big(\frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{n}_P}\, \mathbf{s}_P\, \mathbf{t}_M - \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{s}_P}\, \mathbf{n}_P\, \mathbf{t}_M \Big)\, dS_P = \int_S V_n \frac{\partial F_{MP}}{\partial \mathbf{t}_M}\, dS_P. \qquad (4.8)$$

Преимуществом такого подхода является то, что в обоих случаях задача сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода, что при численном решении приводит к хорошо обусловленным системам линейных уравнений, которые могут эффективно решаться итерационными методами, в частности, методами сопряженных градиентов [11].

В данной работе приведены примеры численного решения второй краевой задачи для уравнения Лапласа. В качестве примера было взято обтекание эллипсоида с разными полуосями

$$\Big(\frac{x}{1}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{5}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{0.1}\Big)^2 = 1.$$

В случае большой разницы полуосей такая задача традиционно считается трудной для решения численными методами. В данном случае при решении интегральных уравнений эллипсоид аппроксимировался N треугольными панелями, при решении интегральных уравнений (4.7) и (4.8) использовался метод коллокаций, коэффициенты системы линейных уравнений вычислялись аналитически, а для решения системы линейных уравнений использовался бисопряженный стабилизированный метод сопряженных градиентов [11].

Точность полученных результатов оценивалась путем проверки гипотезы Даламбера об отсутствии сопротивления. Во всех рассмотренных случаях эта величина не превышала по модулю 10^{-4}, что свидетельствовало о достаточно высокой точности. Результаты по затраченному времени и количеству итераций представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты расчета обтекания эллипсоида

N	Итерации	Время(сек.)	OpenMP с 3 потоками(сек.)
512	15	0.58	0.21
2048	18	12.7	4.5
3480	37	64.0	22.6

Следует особенно отметить, что, несмотря на двойное число уравнений при решении краевой задачи второго рода, число итераций оказывается сравнительно малым, а сам по себе алгоритм хорошо подходит для параллелизации, что демонстрирует последняя колонка в таблице 1.

4.2. Течение идеальной несжимаемой жидкости с потенциальной завихренностью

Интересный результат может быть получен в случае, когда ротор векторного поля имеет потенциал χ. В этом случае должны выполняться уравнения $\nabla\times\mathbf{V} = \nabla\chi$ и условие соленоидальности (2.1).

Тогда из (4.1) получим:

$$V_M = \int\limits_S (\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}_P\, F_{MP}\, dS_P - \int\limits_S (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}_P F_{MP}\, dS_P - \int\limits_S (\mathbf{n}_P\,\chi\times\mathbf{n})\, F_{MP}\, dS_P. \quad (4.9)$$

Последний член в (4.9) можно преобразовать, чтобы избавиться от частных прозводных

$$V_M = \int\limits_S (\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}_P\, F_{MP}\, dS_P - \int\limits_S (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}_P F_{MP}\, dS_P + \int\limits_S \chi(\mathbf{n}_P\, F_{MP}\times\mathbf{n})\, dS_P. \quad (4.10)$$

4.3. Уравнение Стокса

Уравнения Стокса течения сильно вязкой жидкости могут быть записаны следующим образом: $\nabla p + \mu\,\nabla\times\nabla\times\mathbf{V} = 0$, $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$. Используя приведенные выше обозначения, в этом случае можно сделать вывод, что $\mathbf{V}_3 = \nabla\times\nabla\times\nabla\times\mathbf{V} = 0$ и, следовательно,

$$\mathbf{V} = \int\limits_S [(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\nabla F_1 - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\nabla F_1 + F_1(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{n} - \\ -\frac{1}{\mu}(\nabla p\times\mathbf{n})\times\nabla F_2 + \frac{1}{\mu}(\nabla p\cdot\mathbf{n})\,\nabla F_2]\; dS\,. \quad (4.11)$$

Учитывая также, что давление p в этом случае удовлетворяет уравнению Лапласа, для определения градиентов давления следует использовать выражение (4.1).

5. Заключение

Предложенный подход может быть использован при решении многих задач математической физики, которые описываются соленоидальными векторными полями. Применение выведенных формул позволяет получить новые граничные интегральные уравнения для известных линейных задач математической физики, а также может быть использовано при построении новых численных методов для нелинейных уравнений.

Библиографические ссылки

1. *Griebel M.* , Meshfree methods for partial differential equations/M. Griebel, M. A. Schweitzer. Springer, 2003, 479 pp.
2. *Tikhonov A. N.*, Equations of Mathematical Physics/ A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii. Dover Publications, 1990, 784 pp.
3. *Banerjee P. K.*, Boundary Element Methods in Engineering Science/ P. K. Banerjee, R. Butterfield. McGraw Hill, London and New York, 1981.
4. *Brebbia C. A.*, Boundary Element Method for Engineers/ C. A. Brebbia. Pentech Press/Halstead Press, London/New York, 1978.
5. *Budak B. M.*, Multiply Integrals, Field Theory and Series/ B. M. Budak, S. V. Fomin. Central Books Ltd., 1978, — 640 pp.
6. *Finlayson B. A.*, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles/ B. A. Finlayson. Academic Press, New York, 1972, — 412 pp.
7. *Arfken G.*, Mathematical Methods for Physicists G. Arfken, H. Weber. Academic Press, 2000, — 994 pp.
8. *Stratton A.*, Electromagnetic Theory/ A. Stratton. McGraw-Hill, New York, 1941. — 628 pp.
9. *Wu J. C.* Numerical solutions of viscous flow equations using integral representations/ J. C. Wu, M. M. Wahbah. Lecture Notes in Physics, 1976, Vol. 59 — p. 448–453.
10. *Yasko M.*, Vortex-Source Method for the Computation of the Free Boundary Problem/ M. Yasko. 15th IMACS World Congr. on Scientific Computation, Modelling and Appl. Mathematics, Berlin, August, 1997. Vol. III, Computational Physics, Biology and Chemistry. Ed. A. Sydov, Wissenschaft & Technik Verlag, (1997), — p. 65–70.
11. *Barrett R.*, Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods/ R. Barrett & all. SIAM, Philadelphia, 1994.

Надійшла до редколегії 21.12.2011