ISSN 2312–4547. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". 2014. Вип. 6, № 8. С. 137–149

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

**УДК 517.9**

# ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ З ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Т. А. Божанова

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050.E-mail: tamara-bozhanova@ukr.net*

**Розглянуто задачу оптимального керування транспортним потоком з фазовими обмеженнями на мережі, в якій для опису динаміки транспортного потоку запропоновано гідродинамічний закон збереження. Покладено, що функції керування задані на ребрах мережі та впливають на значення початкової щільності. Залучено спосіб релаксації фазових обмежень та встановлено умови, за яких розв'язки параметризованих задач є допустимі для вихідної задачі оптимального керування.**

**Ключові слова:** оптимальне керування, фазові обмеження, векторна оптимізація на мережі.

## 1. Вступ

У даній роботі розглядаємо задачу оптимального керування зі скалярним показником якості та за наявності фазових обмежень:

$$J(u,\rho) \to \max, \text{ якщо } u \in \widetilde{U}_{ad}, \rho \in \mathfrak{R}_{ad},$$

де $\rho = \rho(u)$ є ентропійний розв'язок нелінійного неоднорідного закону збереження:

$$\rho_t + f(\rho)_x = g(t,x,\rho,u^1), \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$\rho(0,x) = u^0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Тут $J$ — цільовий функціонал; $u = (u^0, u^1)$ — функції керування; $\widetilde{U}_{ad}$ — множина допустимих керувань; $\mathfrak{R}_{ad}$ — фазові обмеження, введені на функцію $\rho$. В основі даної задачі лежить макроскопічна модель транспортного потоку на мережі, яка спонукає до розгляду системи нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку, кожне з яких описує динаміку потоку на відповідному ребрі мережі. Дослідженню такої моделі присвячено багато літератури (див. [3, 5–7]), зокрема в роботах M. Garavello та B. Piccoli (див. [4]) для коректної постановки задачі на мережі введено та обгрунтовано умови узгодження потоків у вузлах мережі, які й були залучені у даній статті.

Як відомо, для означеного класу задач з фазовими обмеженнями проблема перевірки їх регулярності, особливо для об'єктів, заданих на транспортних мережах, на сьогоднішній день залишається відкритою. Тому у даній роботі запропоновано спосіб релаксації фазових обмежень, який полягає у заміні вихідної задачі оптимального керування певною задачею векторної оптимізації без фазових обмежень. На цьому шляху було отримано умови, за яких розв'язки релаксаційних задач є допустимі для вихідної задачі оптимального керування.

## 2. Основні позначення та факти

У цьому параграфі наведемо означення транспортної мережі, основні напрями побудови макроскопічної моделі транспортного потоку на мережі та ключові поняття й означення, які будуть необхідні у подальшому.

### 2.1. Макроскопічна модель транспортного потоку на мережі

Нехай $\Theta$ — це відкрита опукла підмножина простору $R^2$ і $\mathfrak{F}$ — плоский граф на $R^2$.

**Означення 2.1.** Будемо казати, що множина $\Omega = \Theta \cap \mathfrak{F}$ є мережею доріг, якщо її можна подати у вигляді пари $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, де $\mathcal{I}$ — це скінченна сукупність ребер, які відповідають дорогам мережі та є відрізками $I_i = [a_i, b_i]$ в $R$, $i = 1, \dots, N$; $\mathcal{J}$ — скінченна кількість вершин, які відповідають вузлам даної мережі. При цьому кожна вершина $J$ є об'єднанням двох непорожніх підмножин $Inc\,(J)$ та $Out\,(J)$ таких, що:

1) кожна вершина $J \in \mathcal{I}$ є внутрішньою точкою $\Omega$;
2) для $\forall J \neq J' \in \mathcal{J}$ та $Inc\,(J) \bigcap Inc\,(J') = \emptyset$ маємо: $Out\,(J) \bigcap Out(J') = \emptyset$;
3) якщо $i \notin \cup_{J \subset \mathcal{J}} Inc\,(J)$, тоді $b_i$ відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вихідна дорога з мережі), і якщо $i \notin \cup_{J \subset \mathcal{J}} Out(J)$, тоді $a_i$ відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вхідна в мережу дорога). Крім того, ці два випадки взаємно виключні.

Нехай $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ — транспортна мережа, що налічує строго $N$ доріг. Для будь-якого $i \in \{1, \dots, N\}$ дорога $i$ відповідає відрізку $[a_i, b_i]$. Позначимо через $\rho_i = \rho_i(t, x)$ щільність машин на дорозі $i$ в точці $x \in [a_i, b_i]$, $t \in [0, T]$; при цьому максимально можливу щільність на дорозі $i$, що відповідає появі затору на даній ділянці мережі, позначимо як $\rho_{max,i}$.

Припустимо, що дороги даної мережі відповідають ребрам графа $\mathfrak{F}$, обмеженого областю $\Omega$, а вузли, які з'єднують дороги, — вершинам цього графа. Кількість машин, що проїжджає за одиницю часу, будемо називати транспортним потоком і позначати $f(\rho) = \rho v$, де $v(\rho)$ — швидкість машин. Відповідно до [4] припустимо, що існують функції потоку $f_i$ такі, що для кожної дороги $i \in \{1, \dots, N\}$ виконуються такі умови:

$$\begin{cases} f_i \text{ є фукнціями тільки } \rho_i, \\ f_i \text{ неперервно-диференційовні на } [0,\ \rho_{max,\,i}], \\ f_i = f_i(\rho_{max,\,i}) = 0, \\ f_i \text{ — строго вгнуті функції}, \\ \exists\ \sigma \in (0, \rho_{max,i}) : f_i'(\sigma_i) = 0 \text{ та } (\rho - \sigma_i) f_i'(\rho) < 0,\ \forall\ \rho \neq \sigma_i. \end{cases} \tag{2.1}$$

Як випливає з наведених вище умов, транспортний потік є додатний за значень щільності $0 < \rho_i < \rho_{max,\,i}$. Тут $\sigma_i$ — оптимальна щільність, за якої транспортний потік досягає свого максимуму. Більше того, за цих умов напрям потоку на кожній дорозі даної мережі є заданий. Таким чином, для довільного $i \in \{1, \dots, N\}$ макроскопічна модель транспортного потоку на дорозі $i$ може бути виражена таким нелінійним законом збереження (див. [7]):

$$\partial_t \rho_i(t,\ x) + \partial_x f_i(\rho_i(t, x)) = 0,\ \ \forall\ x \in (a_i,\ b_i),\ \forall\ t \in (0, T], \tag{2.2}$$

$$\rho_i(0,\ x) = \bar{\rho}_i(x), \quad \forall\ x \in [a_i,\ b_i] \tag{2.3}$$

із функцією потоку

$$f_i(\rho) = \rho \upsilon_i(\rho),$$

де швидкість $\upsilon_i$ — непереревно-диференційовна спадна функція.

**Означення 2.2.** Нехай $\rho_0 \in L^1_{loc}(R; R^n)$ і $T > 0$. Функцію $\rho : [0, T] \times R \to R^n$ будемо називати слабким розв'язком задачі Коші (2.2)–(2.3), якщо $\rho$ є неперервною функцією з $[0, T]$ в $L^1_{loc}$ та $\forall \psi \in C^1$ з компактним носієм на множині $(-\infty, T) \times R$ виконується умова

$$\int_0^T \int_R \{\rho \cdot \psi_t + f(\rho) \cdot \psi_x\}\, dxdt + \int_R \rho_0(x) \cdot \psi(0, x) dx = 0. \tag{2.4}$$

Розглянемо вузол $J$ з $n$ вхідними дорогами $I_1, \dots, I_n$ з кінцем $b_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) у вузлі та $m$ вихідними дорогами $I_{n+1}, \dots, I_{n+m}$ з кінцем $a_i$ ($i \in \{n+1, \dots, n+m\}$) у вузлі. Тоді, щоб гарантувати збереження кількості машин, які проїжджають через вузол $J$, введемо умову

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(t,\ b_i)) = \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(\rho_i(t,\ a_i))\ \ \forall\ t \in [0, T]\ \ \forall\ J. \tag{2.5}$$

Проте виконання цієї умови не достатньо для визначення єдиного розв'язку системи (2.2)–(2.3) на мережі. Тому доцільно залучити підхід праці [4], який полягає у тому, щоб у кожному вузлі мережі розглядати так звану матрицю розподілу руху $A(J) \in R^{n+m}$ таку, що

$$A(J) = [\alpha_{ji}(J)],\ \ j \in \{n+1, \dots, n+m\},\ \ i \in \{1, \dots, n\}, \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \alpha_{ji}(J) \neq \alpha_{ji'}(J), \ \ \forall\, i \neq i',\ 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) = 1 \text{ для кожного } i \in \{1,\dots,n\}\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

Водночас для відокремлення коректного з фізичного погляду розв'язку функції щільності $\rho_i$ мають задовольняти ентропійну умову Кружкова [2].

**Означення 2.3.** Будемо казати, що слабкий розв'язок $\rho = \rho(t,x)$ задачі Коші (2.2)–(2.3) задовольняє ентропійну допустиму умову Кружкова, якщо

$$\int_0^T \int_R \{|\rho - k|\varphi_t + sgn(\rho - k)(f(\rho) - f(k))\varphi_x\}\, dxdt \geq 0 \tag{2.8}$$

для кожного $k \in R$ та кожної неперервно-диференційовної додатної функції $\varphi$ з компактним носієм на множині $[0,T) \times R$.

## 2.2. Деякі положення про частково впорядкований простір $L^1(\Omega)$

Нехай $L^1(\Omega)$ — цільовий простір, $\tau$ — слабка топологія в $L^1(\Omega)$. Для підмножини $S \in L^1(\Omega)$ позначимо через $\mathrm{int}_\tau S$ та $\mathrm{cl}_\tau S$ відповідно її внутрішність та замикання відносно слабкої топології простору $L^1(\Omega)$. Будемо припускати, що $L^1(\Omega)$ є частково впорядкованим конусом додатних елементів $\Lambda$, який визначено таким чином:

$$\Lambda = \left\{ f \in L^1(\Omega); f(x) \geq 0 \text{ майже скрізь на } \Omega \right\}. \tag{2.9}$$

**Означення 2.4.** Елемент $y^* \in S \subset L^1(\Omega)$ будемо називати максимальним елементом множини $S$, якщо не існує $y \in S$ такого, що $y \geq_\Lambda y^*$, $y \neq y^*$, тобто

$$S \cap (y^* + \Lambda) = y^*.$$

Позначимо через $\mathrm{Max}_\Lambda(S)$ сукупність усіх максимальних елементів множини $S$. Введемо до розгляду два додаткові елементи $-\infty_\Lambda$ і $+\infty_\Lambda$ у $L^1(\Omega)$. Припустимо, що ці елементи задовольняють такі умови:

$$1)\ -\infty_\Lambda \leq y \leq\ +\infty_\Lambda,\ \forall\, y \in L^1(\Omega_T); \quad 2)\ +\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0.$$

Позначимо через $Y^*$ частково розширений простір Банаха: $Y^* = L^1(\Omega_T) \cup \{-\infty_\Lambda\}$, припускаючи, що

$$\|-\infty_\Lambda\|_{L^1(\Omega_T)} = +\infty \ \text{ і } \ y + \lambda(-\infty_\Lambda) = -\infty,\ \forall\, y \in L^1(\Omega_T),\ \forall\, \lambda \in R_+.$$

**Означення 2.5.** Будемо казати, що множина $E$ є ефективний супремум множини $S \subset L^1(\Omega_T)$ відносно слабкої $\tau$-топології простору $L^1(\Omega_T)$ за конусом $\Lambda$ (або скорочено $(\Lambda,\tau)$-супремум), якщо $E$ є сукупністю усіх максимальних елементів множини $cl_\tau S$ у випадку, коли ця множина непорожня і $E$ дорівнює $+\infty_\Lambda$ у супротивному випадку.

У подальшому $(\Lambda,\ \tau)$-супремум для множини $E$ будемо позначати як $Sup^{\Lambda,\tau} S$. Таким чином, з огляду на попереднє означення, маємо:

$$Sup^{\Lambda,\tau} S := \begin{cases} Max_\Lambda(cl_\tau S), & Max_\Lambda(cl_\tau S) \neq \emptyset, \\ +\infty_\Lambda, & Max_\Lambda(cl_\tau S) = \emptyset. \end{cases}$$

Нехай $X_\partial$ — непорожня підмножина банахового простору $X$ і нехай задано деяке відображення $I : X_\partial \to L^1(\Omega_T)$, яке можна пов'язати з його розширенням $\hat{I} : X \to Y^*$ на весь простір $X$, де

$$\hat{I} = \begin{cases} I(x), & x \in X_\partial, \\ -\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases} \tag{2.10}$$

Будемо казати, що відображення $I : X_\partial \to Y^*$ є обмежене зверху, якщо існує елемент $z \in L^1(\Omega_T)$ такий, що $z \geq_\Lambda I(x)$ для всіх $x \in X_\partial$.

**Означення 2.6.** Підмножину $A \in L^1(\Omega_T)$ будемо називати ефективним супремумом відображення

$$I : X_\partial \to L^1(\Omega_T)$$

відносно слабкої топології простору $L^1(\Omega_T)$ і позначати $Sup^{\Lambda,\tau}_{x\in X_\partial} I(x)$, якщо $A$ є $(\Lambda,\tau)$-супремумом образу $I(X_\partial)$ із $X_\partial$ на $L^1(\Omega_T)$, тобто

$$Sup^{\Lambda,\tau}_{x\in X_\partial} I(x) = Sup^{\Lambda,\tau} \{I(x) :\ \forall\, x \in X_\partial\}.$$

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ послідовність у просторі $L^1(\Omega_T)$. Позначимо через $L^\tau\{y_k\}$ множину всіх точок замикання відносно слабкої топології простору $L^1(\Omega_T)$, тобто $y \in L^\tau\{y_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{y_{k_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $y_{k_i} \rightharpoonup y$ у $L^1(\Omega_T)$ за $i \to \infty$. Якщо ця множина необмежена зверху, тобто $Sup^{\Lambda,\tau} L^\tau\{y_k\} = +\infty_\Lambda$, то припускаємо, що $\{+\infty_\Lambda\} \in L^\tau\{y_k\}$. Зафіксуємо елемент $x_0 \in X_\partial$. Тоді для довільного відображення $I : X_\partial \to L^1(\Omega_T)$ введемо до розгляду множини

$$L^{\sigma\times\tau}(I, x_0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in\ \mathfrak{M}_\sigma(x_0)} L^\tau\left\{\hat{I}(x_k)\right\}, \tag{2.11}$$

$$L^{\sigma\times\tau}_{max}(I, x_0) := L^{\sigma\times\tau}(I, x_0) \cap Sup^{\Lambda,\tau}_{x\in X_\partial} I(x), \tag{2.12}$$

де $\mathfrak{M}_\sigma(x_0)$ — це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, що $x_k \to x_0$ відносно $\sigma$-топології простору $X$.

**Означення 2.7.** Будемо казати, шо множина $A \subset L^1(\Omega_T) \cup \{\pm\infty_\Lambda\}$ є $\Lambda$-нижньою секвенційною межею відображення $I : X_\partial \to L^1(\Omega_T)$ у точці $x_0 \in X_\partial$ відносно топології добутку $\sigma \times \tau$ простору $X \times L^1(\Omega_T)$, і використовувати позначення $A = \limsup^{\Lambda,\tau}_{x\xrightarrow{\sigma}x_0} I(x)$, якщо

$$\limsup^{\Lambda,\tau}_{x\xrightarrow{\sigma}x_0} I(x) := \begin{cases} L^{\sigma\times\tau}_{max}(I,\ x_0), & L^{\sigma\times\tau}_{max}(I, x_0) \neq \emptyset, \\ Sup^{\Lambda,\tau} L^{\sigma\times\tau}(I, x_0), & L^{\sigma\times\tau}_{max}(I, x_0) = \emptyset. \end{cases} \tag{2.13}$$

**Означення 2.8.** Будемо казати, що відображення $f : X_\partial \to Y$ є $(\Lambda, \sigma \times \tau)$-напівнеперервним зверху ($(\Lambda, \sigma \times \tau)$-нн. зв.) у точці $x_0 \in X_\partial$, якщо

$$f(x_0) \in \limsup^{\Lambda,\ \tau}_{\substack{\sigma \\ x \to x_0}} \hat{f}(x).$$

Відображення $f$ є $(\Lambda, \sigma \times \tau)$-нн. зв., якщо $f$ є $(\Lambda, \sigma \times \tau)$-нн. зв. у кожній точці множини $X_\partial$.

## 3. Постановка задачі оптимального керування

Нехай $\Omega = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$ — транспортна мережа. Розглянемо таку задачу оптимального керування на мережі $\Omega$:

$$\begin{cases} J(u, \rho) \to \max, \\ \text{якщо } \ u \in \mathcal{U}_{ad}, \ \ \rho \in \mathcal{R}_{ad}, \end{cases} \tag{3.1}$$

де $J$ — цільовий функціонал; $u = (u^0, u^1)$ — функції керування; $\mathcal{U}_{ad} = \{u = (u^0, u^1) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega_T)^m : \|u^0\|_{BV(\Omega)} + \|u^1\|_{BV(\Omega_T)} \le \gamma\}$ — множина допустимих керувань; $\mathcal{R}_{ad} = \{\rho \in C([0, T]; L^1_{loc}(\Omega)) : l(\rho(t, x)) \le 0$ м. с. на $\Omega_T\}$ — множина допустимих значень, тут $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервний оператор, $\Omega_T := \Omega_{1,T} \times \ldots \times \Omega_{N,T}$; функція $\rho = \rho(u)$ задовольняє умови:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \phi + f_i(\rho_i) \partial_x \phi) \, dxdt = \\ \displaystyle= \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} g_i(t, x, \rho_i, u_i^1) \, dxdt, \\ \forall \phi \in C_0^\infty((0, T) \times (a_i, b_i)), \forall I_i \in \mathcal{I}, \forall i = \overline{1, N}; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} \Big( |\rho_i - c| \partial_t \tilde{\phi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - c)(f_i(\rho_i) - f_i(c)) \partial_x \tilde{\phi} \Big) \, dxdt \le \\ \displaystyle\le \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} \operatorname{sgn}(\rho_i - c) g_i(t, x, \rho_i, u_i^1) \, dxdt, \\ \forall c \in \mathbb{R}, \forall \tilde{\phi} \in C_0^\infty((0, T) \times (a_i, b_i)), \forall \tilde{\phi} \ge 0, \forall i = \overline{1, N}; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\rho_i(0, x) = u_i^0(x), \ x \in (a_i, b_i) \ \ \forall i = \overline{1, N}; \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \displaystyle f_j(\rho_j(\cdot, a_j^+)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-)), \\ \forall J \in \mathcal{J}, \forall j = n+1, \ldots, n+m; \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \displaystyle L(J, u^k, \rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-)) \text{ досягає максимального} \\ \text{значення на парі } (u^k, \rho) \text{ за обмежень (3.2)–(3.5).} \end{cases} \tag{3.6}$$

Припустимо, що

$$f = (f_1, \dots, f_N) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \text{ є локально ліпшицевою функцією} \tag{3.7}$$

та $g \in L^\infty(\Omega_T; C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R} \times \Omega))$, і для всіх $M_u > 0$ існують константи $C_1, C_2 > 0$ такі, що

$$g(t, x, \rho, u^1)(\rho) \leq C_1 + C_2|\rho|, \ \forall (t, x, \rho, u^1) \in \Omega_T \times \mathbb{R} \times [-M_u, M_u]^m. \tag{3.8}$$

При цьому під ентропійним допустимим розв'язком задачі (3.2)–(3.4) будемо розуміти таке (див. [2, 4]).

**Означення 3.1.** Для заданих $u = (u^0, u^1) \in \mathcal{U}_{ad}$ функцію $\rho \in L^\infty(\Omega_T)$ називають ентропійним розв'язком задачі (3.1)–(3.4), якщо для будь-яких $c \in \mathbb{R}$ та

$$\eta(\lambda) := |\lambda - c|, \ \ q_i(\lambda) := \operatorname{sgn}(\lambda - c)(f_i(\lambda) - f_i(c)), \ \forall i = 1, \dots, N \tag{3.9}$$

виконується ентропійна нерівність

$$(\eta(\rho))_t + (q(\rho))_x \leq \operatorname{sgn}(\rho - c) g(t, x, \rho, u^1) \text{ на } \Omega_T \tag{3.10}$$

та

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \int_0^t \|\rho(\tau, \cdot) - u^0\|_{L^1(\Omega)} d\tau = 0. \tag{3.11}$$

**Означення 3.2.** Будемо казати, що пара

$$(u, \rho) \in [L^1(\Omega) \times L^1(\Omega_T)] \times [C([0,T]; L^1(\Omega)) \times L^\infty(\Omega_T) \times L^\infty([0,T]; BV(\Omega))]$$

є допустимим розв'язком задачі оптимального керування (3.1), якщо $u = (u^0, u^1) \in \mathcal{U}_{ad}$, $\rho \in \mathcal{R}_{ad}$, $J(u, \rho) < +\infty$ та $\rho = \rho(u)$ — відповідний ентропійний розв'язок задачі (3.2)–(3.5) у сенсі означення 3.1 та задовольняє умови (3.6)–(3.7).

Позначимо через $\Xi$ множину всіх допустимих пар задачі (3.1). Будемо казати, що пара $(u^0, \rho^0)$ є оптимальна для задачі (3.1), якщо

$$(u^0, \rho^0) \in \Xi \text{ та } \ J(u^0, \rho^0) = \sup_{(u,\rho) \in \Xi} J(u, \rho).$$

У подальшому будемо використовувати позначення $\mathbb{U} = L^1(\Omega) \times L^1(\Omega_T)$, $\mathbb{Y} = C([0,T]; L^1(\Omega))$ та припускати таке:

(I) Задача оптимального керування (3.1) є регулярна, якщо існує щонайменше одна пара $(u, \rho)$ така, що $(u, \rho) \in \Xi$.

З огляду на фазові обмеження, введені на щільність транспортного потоку, регулярність задачі оптимального керування, тобто існування щонайменше однієї допустимої пари $(u, \rho)$, є відкритою проблемою навіть у найпростіших випадках. Зважаючи на це, доцільно послабити умови, введені на допустимі розв'язки вихідної задачі, та припустити, що умова оптимальності для розв'язків $(u, \rho)$ виконується з деякою (можливо, малою) точністю. Беручи це до уваги, будемо виходити з припущення, що вихідна задача оптимального керування може не мати оптимального розв'язку.

## 4. Апроксимація задачі оптимального керування

Пов'яжемо з мережою $\Omega_T = \Omega_{1,T} \times \ldots \times \Omega_{N,T}$ цільовий простір $L^1(\Omega_T)$, і нехай $\tau$ — слабка топологія в $L^1(\Omega_T)$. Введемо такі умови:

(II) Нехай функціонал $J : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ у задачі (3.1) має вигляд

$$J(u, \rho) = \int_0^T \int_\Omega F(u, \rho) dx dt, \tag{4.1}$$

де відображення $F : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \longrightarrow L^1(\Omega_T)$ є $(\Lambda, \sigma \times \tau)$–нн.зв. на $\mathbb{U} \times \mathbb{Y}$ у сенсі означення 2.8. У подальшому через $\sigma$ будемо позначати сильну топологію на $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega_T)$.

(III) Існує пара функцій $\varphi, \psi \in L^1(\Omega_T)$ така, що для всіх $(u, \rho) \in \Xi$, для довільної множини $Q \subseteq \Omega$ справджується нерівність

$$\int_Q |\psi| \, dz \le \|F(u(\cdot,\cdot), y(\cdot,\cdot))\|_{L^1(Q)} \le \int_Q |\varphi| \, dz. \tag{4.2}$$

З огляду на вищесказане будемо розглядати таку сукупність задач векторної оптимізації:

$$\begin{aligned} &\text{Реалізувати } \ Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\Xi} \ \mathcal{F}_\varepsilon(u, \rho) = \\ &= Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\Xi} \left[ F(u, \rho) + \varepsilon^{-1} \left( |l(y)| + l(y) \right) \right], \end{aligned} \tag{4.3}$$

де множина допустимих розв'язків $\Xi$ означена так: $(u, \rho) \in \Xi$ тоді і тільки тоді, якщо

$$\begin{cases} u = (u^0, u^1) \in \mathcal{U}_{ad}, \\ \rho \in C([0,T]; L^1(\Omega)) \times L^\infty(\Omega_T) \times L^\infty([0,T]; BV(\Omega)), \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \rho = \rho(u) \text{ є ентропійний розв'язок задачі (3.2)–(3.5)} \\ \text{у сенсі означення (3.1) і задовольняє умови (3.6)–(3.7).} \end{cases} \tag{4.5}$$

*Зауваження* 4.1. Як зазначено у роботі [1], $\Xi \subset \overline{\Xi}$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $\overline{\Xi} \neq \emptyset$. Більше того, множина $\overline{\Xi}$ є секвенційно компактна відносно $\omega$-збіжності, де під $\omega$-збіжністю розуміємо таке: послідовність пар $\{(u_k, \rho_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Xi}$ є $\omega$-збіжна до пари $(u,\rho) \in [L^1(\Omega) \times L^1(\Omega_T)] \times C([0,T]; L^1(\Omega))$, якщо $u_k^0 \to u^0$ в $L^1(\Omega)$, $u_k^1 \to u^1$ в $L^1(\Omega_T)$ та $\rho_k \to \rho$ в $C([0,T]; L^1(\Omega))$.

**Означення 4.1.** Будемо казати, що пара $(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff}) \in \overline{\Xi}$ є $(\Lambda, \tau)$-ефективним розв'язком задачі векторної оптимізації (4.3), якщо $(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff})$ реалізує $(\Lambda,\tau)$-супремум відображення $\mathcal{F}_\varepsilon : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$, тобто

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff}) \in Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}}\, \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho) = Sup^{\Lambda,\tau}\left\{\mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho) : \forall (u,\rho) \in \overline{\Xi}\right\}.$$

Позначимо через

$$Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_\varepsilon; \tau; \Lambda) = \left\{(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff}) \in \overline{\Xi} : \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff}) \in Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}}\, \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho)\right\}$$

множину всіх $(\Lambda,\tau)$-ефективних розв'язків задачі (4.3).

Має місце така теорема (доведення див. у роботі [1]), яка торкається проблеми розв'язності задачі векторної оптимізації (4.3).

**Теорема 4.1.** *Припустимо, що гіпотези (I)-(III) виконуються та* $F : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$ *є* $(\Lambda, \omega\times\tau)$*-напівнеперервним зверху відображенням. Тоді задача векторної оптимізації (4.3)–(4.5) має непорожню підмножину* $(\Lambda,\tau)$*-ефективних розв'язків для кожного* $\varepsilon > 0$.

У подальшому із задачею (4.3) будемо пов'язувати таку скалярну оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_\varepsilon^\lambda = \langle \lambda, \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho)\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)} \to \sup \\ \text{відносно } (u,\rho) \in \overline{\Xi} \subset \mathbb{U}\times\mathbb{Y}, \end{cases} \tag{4.6}$$

де $\lambda$ — елемент дуального конуса $K = \Lambda^*$, звідси

$$\Lambda^* = \left\{\lambda \in L^\infty(\Omega_T) : <\lambda, f>_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)} = \int_0^T \int_\Omega \lambda f\, dxdt \geq 0,\ \forall f \in \Lambda\right\}.$$

Оскільки множина $\overline{\Xi}$ є секвенційно $\omega$-компактна, то введена скалярна задача (4.6) має непорожню множину розв'язків, якщо $\mathcal{F}_\varepsilon^\lambda(\cdot) : \overline{\Xi} \to \overline{\mathbb{R}}$ є власною $\omega$-напівнеперервною зверху функцією. Однак характерною особливістю задачі векторної оптимізації (4.3) є той факт, що з будь-яким $(\Lambda, \omega\times\tau)$-напівнеперервним зверху відображенням $\mathcal{F}_\varepsilon : \overline{\Xi} \to L^(\Omega_T)$, яке не є ні напівнеперервне зверху, ні квазі-нн. зв., завжди можна пов'язати скалярну задачу (4.6), для якої відповідний функціонал вартості $\mathcal{F}_\varepsilon^\lambda(\cdot) : \overline{\Xi} \to \overline{\mathbb{R}}$ не є $\omega$-напівнеперервний зверху на $\overline{\Xi}$. Дійсно, нехай $(u^0, \rho^0)$ така пара з множини

$\overline{\Xi}$, на якій відображення $\mathcal{F}_\varepsilon$ не є квазі-нн. зв., тоді існує щонайменше один елемент $a^* \in \mathrm{cl}_\tau(\mathcal{F}_\varepsilon(\overline{\Xi}))$ такий, що

$$a^* \in \limsup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\overset{\omega}{\to}(u^0,\rho^0)} \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho),$$
$$\mathcal{F}_\varepsilon(u^0,\rho^0) \in \limsup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\overset{\omega}{\to}(u^0,\rho^0)} \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho), \text{ та } a^* \not< \mathcal{F}_\varepsilon(u^0,\rho^0). \tag{4.7}$$

Нехай $\{(u_k,\rho_k)\}_{k=1}^\infty \subset \overline{\Xi}$ така послідовність, що

$$(u_k,\rho_k) \overset{\omega}{\to} (u^0,\rho^0) \text{ в } \mathbb{U}\times\mathbb{Y} \quad \text{та } \mathcal{F}_\varepsilon(u^k,\rho^k) \overset{\tau}{\to} a^* \text{ в } L^1(\Omega_T).$$

Оскільки $a^* \not< \mathcal{F}_\varepsilon(u^0,\rho^0)$, то звідси випливає, що $\mathcal{F}_\varepsilon(u^0,\rho^0) - a^* \notin \Lambda$, і тому існує вектор $\lambda^* \in K$ такий, що

$$\langle \lambda^*, \mathcal{F}_\varepsilon(u^0,\rho^0) - a^*\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)} < 0.$$

І як наслідок отримуємо, що

$$\limsup_{k\to\infty} \mathcal{F}_\varepsilon^{\lambda^*}(u_k,\rho_k) = \lim_{k\to\infty}\langle\lambda^*, \mathcal{F}_\varepsilon(u_k,\rho_k)\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)} =$$
$$= \langle\lambda^*, a^*\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)} > \langle\lambda^*, \mathcal{F}_\varepsilon(u^0,\rho^0)\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)} = \mathcal{F}_\varepsilon^{\lambda^*}(u^0,\rho^0).$$

Таким чином, $\mathcal{F}_\varepsilon^{\lambda^*}$ не є $\omega$-нн. зв. на парі $(u^0,\rho^0)$. Більше того, для $(\Lambda,\omega\times\tau)$-нн. зв. відображень $\mathcal{F}_\varepsilon : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$ має місце випадок, коли жодна зі скалярних функцій $\mathcal{F}_\varepsilon^{\lambda^*}(u,\rho) = \langle\lambda, \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho)\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)}$ не є $\omega$-нн. зв. для будь-якого $\lambda \in K^\sharp$, де $K^\sharp$ — множина всіх квазівнутрішніх точок конуса $K$, тобто $\lambda \in K^\sharp$, якщо $\lambda \in K$ і

$$\langle\lambda, b\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)} > 0 \quad \text{для всіх } b \in \Lambda \setminus \{0\}.$$

Поклавши $\lambda(t,x) = 1$ майже скрізь на $\Omega_T$ і $\varepsilon = 0$, доходимо такого висновку: цільовий функціонал $J : \mathcal{U}_{ad}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ для задачі (3.1) може не бути $\omega$-нн. зв., навіть якщо $F : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$ є $(\Lambda, \omega\times\tau)$-нн. зв. відображенням.

Сформулюємо та доведемо головну властивість скалярної оптимізаційної задачі (4.6).

**Теорема 4.2.** *Нехай виконуються умови (3.7)–(3.8), існує пара $(u^0,\rho^0) \in \overline{\Xi}$ і елемент $\lambda \in K^\sharp$ такі, що*

$$(u^0,\rho^0) \in \mathrm{Argmax}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}}\langle\lambda, \mathcal{F}_\varepsilon^\lambda(u,\rho)\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)}.$$

*Тоді $(u^0,\rho^0)$ є $(\Lambda,\tau)$-ефективним розв'язком задачі (4.3)–(4.5).*

*Доведення.* За початковими припущеннями маємо:

$$\mathcal{F}_\varepsilon^\lambda(u^0,\rho^0) - \mathcal{F}_\varepsilon^\lambda(u,\rho) = \tag{4.8}$$
$$= \langle\lambda, \mathcal{F}_\varepsilon(u^0,\rho^0) - \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho)\rangle_{L^\infty(\Omega_T);L^1(\Omega_T)} \geq 0, \quad \forall (u,\rho)\in\overline{\Xi}.$$

Нехай $z$ елемент з множини $\mathrm{cl}_\tau \mathcal{F}_\varepsilon(\overline{\Xi})$. Тоді існує послідовність $\{(u_k, \rho_k)\}_{k=1}^\infty$ з множини $\overline{\Xi}$ така, що

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u_k, y_k) \xrightarrow{\tau} z \;\text{ в }\; L^1(\Omega_T) \;\text{ за }\; k \to \infty.$$

Звідси, з огляду на (4.8), маємо

$$\langle \lambda, \mathcal{F}_\varepsilon(u^0, \rho^0) - \mathcal{F}_\varepsilon(u_k, \rho_k) \rangle_{L^\infty(\Omega_T); L^1(\Omega_T)} \geq 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Перейшовши до межі у (4.9), отримаємо

$$\langle \lambda, \mathcal{F}_\varepsilon(u^0, \rho^0) - z \rangle_{L^\infty(\Omega_T); L^1(\Omega_T)} \geq 0, \quad \forall z \in \mathrm{cl}_\tau \mathcal{F}_\varepsilon(\overline{\Xi}). \tag{4.10}$$

Припустимо тепер, що пара $(u^0, \rho^0) \notin Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_\varepsilon; \tau; \Lambda)$. Тоді існує елемент $h \in \mathrm{cl}_\tau \mathcal{F}_\varepsilon(\overline{\Xi})$ такий, що $h >_\Lambda \mathcal{F}_\varepsilon(u^0, \rho^0)$. Таким чином, $h - \mathcal{F}_\varepsilon(u^0, \rho^0) \in \Lambda \setminus \{0\}$. Тому, за означенням множини $K$, маємо

$$\langle h - \mathcal{F}_\varepsilon(u^0, \rho^0), \lambda \rangle_{L^\infty(\Omega_T); L^1(\Omega_T)} > 0,$$

а це суперечить умові (4.10). Отже, $(u^0, \rho^0) \in Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_\varepsilon; \tau; \Lambda)$. Теорему доведено. $\square$

Під час дослідження задачі оптимального керування були отримані такі суттєві результати.

**Твердження 4.1.** Якщо існує пара значень $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$ таких, що $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ та

$$Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}} \mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u, \rho) \cap Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}} \mathcal{F}_{\varepsilon_2}(u, \rho) \neq \emptyset, \tag{4.11}$$

то за припущень теореми 4.1 задача оптимального керування (3.1) є регулярна, тобто $\Xi \neq \emptyset$.

*Доведення.* Для спрощення припустимо, що $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Як показує теорема 4.1, для заданих $\varepsilon_1 > 0$ та $\varepsilon_2 > 0$ відповідні множини $(\Lambda, \tau)$-ефективних розв'язків $Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_1}; \tau; \Lambda)$ та $Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_2}; \tau; \Lambda)$ не є порожні. Припустимо тепер, що

$$Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_1}; \tau; \Lambda) \cap Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_2}; \tau; \Lambda) = \emptyset.$$

Водночас умова (4.11) гарантує існування пар

$$(u^0_{\varepsilon_1}, \rho^0_{\varepsilon_1}) \in Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_1}; \tau; \Lambda) \text{ та } (u^0_{\varepsilon_2}, \rho^0_{\varepsilon_2}) \in Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_2}; \tau; \Lambda)$$

таких, що

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u^0_{\varepsilon_1}, \rho^0_{\varepsilon_1}) = \mathcal{F}_{\varepsilon_2}(u^0_{\varepsilon_2}, \rho^0_{\varepsilon_2}). \tag{4.12}$$

Оскільки $(u^0_{\varepsilon_2}, \rho^0_{\varepsilon_2}) \notin Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_1}; \tau; \Lambda)$, то звідси випливає, що

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u^0_{\varepsilon_2}, \rho^0_{\varepsilon_2}) \not\geq_\Lambda \mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u^0_{\varepsilon_1}, \rho^0_{\varepsilon_1}). \tag{4.13}$$

З іншого боку, з огляду на структуру відображення $\mathcal{F}_\varepsilon : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$ та умову (4.12) маємо

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u^0_{\varepsilon_2}, \rho^0_{\varepsilon_2}) \leq_\Lambda \mathcal{F}_{\varepsilon_2}(u^0_{\varepsilon_2}, \rho^0_{\varepsilon_2}) = \mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u^0_{\varepsilon_1}, \rho^0_{\varepsilon_1}).$$

Тоді, залучаючи умову (4.13), приходимо до такого співвідношення:

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u^0_{\varepsilon_1}, \rho^0_{\varepsilon_1}) \not\geq_\Lambda \mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u^0_{\varepsilon_1}, \rho^0_{\varepsilon_1}).$$

Тому існує щонайменше одна пара $(u^*, \rho^*) \in \overline{\Xi}$ така, що

$$(u^*, \rho^*) \in Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_1}; \tau; \Lambda) \cap Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_2}; \tau; \Lambda).$$

Відтак з огляду на співвідношення (4.11), отримаємо:

$$F(u^*, \rho^*) + \varepsilon_1^{-1} \left(|l(\rho^*)| + l(\rho^*)\right) = \mathcal{F}_{\varepsilon_1}(u^*, \rho^*) =$$
$$= \mathcal{F}_{\varepsilon_2}(u^*, \rho^*) = F(u^*, \rho^*) + \varepsilon_2^{-1} \left(|l(\rho^*)| + l(\rho^*)\right) \text{ майже скрізь на } \Omega_T.$$

Звідси $(\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1}) \left(|l(\rho^*)| + l(\rho^*)\right) = 0$. Оскільки $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, то

$$|l(\rho^*(t,x))| + l(\rho^*(t,x)) = 0 \text{ для майже всіх } (t,x) \in \Omega_T.$$

Однак це співвідношення еквівалентне нерівності $l(\rho^*(t,x)) \leq 0$ майже скрізь на $\Omega_T$. Беручи до уваги, що $\rho^* = \rho(u^*) \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ як ентропійний розв'язок задачі Коші (3.2)–(3.5), робимо висновок, що $\rho^* \in \mathcal{R}_{ad}$, і тому $(u^*, \rho^*) \in \Xi$. Твердження доведено. □

**Твердження 4.2.** Якщо задача оптимального керування (3.1) має хоча б один оптимальний розв'язок $(u^0, \rho^0) \in \Xi$, то за припущень теореми 4.1 існує значення $\varepsilon_0 > 0$ таке, що

$$(u^0, \rho^0) \in Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_\varepsilon; \tau; \Lambda), \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{4.14}$$

*Доведення.* Припустимо протилежне, а саме: нехай існує монотонно спадна послідовність $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0 \text{ і } (u^0, \rho^0) \notin Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_{\varepsilon_k}; \tau; \Lambda).$$

Тоді існує послідовність пар $\left\{(u^*_k, \rho^*_k) \in \overline{\Xi}\right\}$ така, що

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_k}(u^*_k, \rho^*_k) >_\Lambda \mathcal{F}_{\varepsilon_k}(u^0, \rho^0) \equiv F(u^0, \rho^0), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Тому майже скрізь на $\Omega_T$, $\forall k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\varepsilon_k^{-1} \left(|l(\rho^*_k)| + l(\rho^*_k)\right) <_\Lambda F(u^*_k, \rho^*_k) - F(u^0, \rho^0). \tag{4.16}$$

Оскільки множина $\overline{\Xi} \subset \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{Y}$ є секвенційно $\omega$-компактна та відображення $F : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$ є $(\Lambda, \omega \times \tau)$-напівнеперервне зверху, то права частина нерівності (4.16) є рівномірно обмежена в $L^1(\Omega_T)$ для $k \in \mathbb{N}$. Отже, переходячи до межі у (4.15) за $k \to \infty$, приходимо до суперечності з обмеженістю різниці $F(u_k^*, \rho_k^*) - F(u^0, \rho^0)$, якщо тільки $(|l(\rho_k^*)| + l(\rho_k^*)) \neq 0$ на деякій підмножині з $\Omega_T$ з додатною мірою Лебега. Таким чином, ця суперечність означає, що існує номер $k_* \in \mathbb{N}$ такий, що $|l(\rho_k^*)| + l(\rho_k^*) = 0$ майже скрізь на $\Omega_T$ для всіх $k > k_*$. Звідси випливає, що $\rho_k \in \mathcal{R}_{ad}$ для всіх $k > k_*$. Тому нерівність (4.16) означає, що співвідношення $F(u_k^*, \rho_k^*) >_\Lambda F(u^0, \rho^0)$ виконується для всіх $k > k_*$, внаслідок чого приходимо до суперечності з початковим припущенням

$$J(u^0, \rho^0) := \int_0^T \int_\Omega F(u^0, \rho^0) dx dt < \int_0^T \int_\Omega F(u_k^*, \rho_k^*) dx dt, \quad \forall k > k_*.$$

Твердження доведено. □

## 5. Прикінцеві зауваження

У роботі було запропоновано новий підхід щодо регуляризації однієї скалярної задачі оптимального керування на транспортній мережі з фазовими обмеженнями. Цей підхід грунтується на введенні сукупності параметризованих задач векторної оптимізації та подальшої їх скаляризації. Отримано результати, які відіграють вагому роль під час дослідження такого типу задач оптимального керування, а саме: встановлено умови регулярності задачі оптимального керування та умови, за яких оптимальний розв'язок буде ефективним для $\varepsilon$-сукупності задач векторної оптимізації.

### Бібліографічні посилання

1. *Божанова Т. А.* Про одну задачу оптимального керування на транспортній мережі з фазовими обмеженнями/ Т. А. Божанова // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — Д.: Вид-во ДНУ. — 2013. — Вип. 5, № 8. — С. 130–142.
2. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными / С. Н. Кружков // Математический сборник. — 1970. — Т. 81(123), № 2. — С. 228–255.
3. *Bardos C.* First-order quasilinear equations with boundary conditions / C. Bardos, A. Y. Leroux, J. C. Nedeles //Communications in Partial Differential Equations. — 4(1979). — P. 1017–1034.
4. *Garavello M.* Traffic Flow on Networks / M. Garavello, B. Piccoli // AIMS Series on Appl. Math. — 2006. — Vol. 1. — P. 243.
5. *Holden H.* A mathematical model of traffic flow on a network of undirectional roads / H. Holden, N. H. Riserbo // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1995. — № 26. — P. 999–1017.
6. *Lebecque J.* First-order macroscopic traffic models for network in the context of dynamic assignment/ J. Lebecque, M. Khoshyaran //In Transportation Planning-State of the Art, M. Patriksson and K.A.P. Labbe, eds. — 2002. — P. 342–361.
7. *Lighthill M. L.* On kinetic waves/ M. L. Lighthill, J. B. Whitham // Proceedings of Royal Society of Edinburg. — 1983. — № 229(A). — P. 217–243.

*Надійшла до редколегії 18.01.2014*