

УДК 517.9

**ПОРЯДОК СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ СЕТОЧНЫХ
РЕШЕНИЙ К ОБОБЩЁННОМУ ЭНТРОПИЙНОМУ
РЕШЕНИЮ СКАЛЯРНОГО ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ**

Р. В. Ерина, И. Е. Платонова

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49050. E-mail: ruslanazgurskaya@mail.ru*

На примере скалярного закона сохранения для квазилинейного уравнения Хопфа изучена слабая сходимость сеточных решений, полученных по методу против потока первого порядка и Лакса–Фридрихса второго порядка по пространственной переменной, к точному обобщённому энтропийному решению. Оценка сходимости выполнена с помощью линейного функционала, входящего в определение обобщённого энтропийного решения по Кружкову, для последовательностей решений на сетках, с уменьшающимися вдвое шагами. Показано, что порядок слабой сходимости сеточных решений не выше первого, независимо от порядка вычислительного метода.

Ключевые слова: энтропийное решение по Кружкову, линейный функционал.

1. Введение

Задача Коши для квазилинейного уравнения в полосе $\mathcal{S}(T) = \mathbb{R} \times (0, T]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x, t) \in \mathcal{S}(T), \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

допускает гладкое решение только в малом, из-за явления опрокидывания (градиентной катастрофы) [1–4]. Задача Коши для закона сохранения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, & (x, t) \in \mathcal{S}(T), \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $f'(u) = a(u)$, допускает обобщённое решение в целом, которое можно определить разными способами [1–6].

Определение 1.1. Ограниченная функция $u(x, t) \in \mathcal{L}_{1,loc}(\mathcal{S}(T))$ называется обобщённым по Соболеву решением задачи (1.2), если $\forall \phi(x, t) \in \mathcal{C}^{\circ(1,1)}(\mathcal{S}(T))$ выполняется интегральное равенство:

$$\iint_{\mathcal{S}(T)} \left\{ u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dx dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u^0(x) \phi(x, 0) dx = 0. \quad (1.3)$$

Природа обобщённого решения заключается в появлении разрывов функции $u(x, t)$. Из определения (1.3) или интегральной формы закона сохранения

$$\oint_{\mathcal{C}} u dx - f(u) dt = 0, \quad (1.4)$$

где \mathcal{C} — кусочно-гладкая граница конечной области $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}(T)$, следует условие на разрыве $x = x(t)$ (уравнение Ренкина–Гюгонио):

$$D(u(x(t) + 0, t) - u(x(t) - 0, t)) = f(u(x(t) + 0, t)) - f(u(x(t) - 0, t)), \quad (1.5)$$

где $D = x'(t)$ — скорость движения разрыва.

Обобщённое решение с разрывом, вообще говоря, неединственно, и допустимое обобщённое решение, называемое энтропийным, отбирается из условия выполнения энтропийного неравенства [1–7]

$$\iint_{\mathcal{S}(T)} \left\{ U(u) \frac{\partial \phi}{\partial t} + F(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dx dt \geq 0, \quad (1.6)$$

где $U(u)$ — энтропия, $F(u)$ — энтропийный поток. Энтропийное условие (1.6) встроено в определение обобщённого решения Кружковым [8, 9].

Определение 1.2. Ограниченная функция $u(x, t) \in \mathcal{L}_{1,loc}(\mathcal{S}(T))$ называется обобщённым по Кружкову энтропийным решением задачи (1.2), если:

1) $\forall c \in \mathbb{R}$ и $\forall \phi(x, t) \in \mathcal{C}^{(1,1)}(\mathcal{S}(T))$, $\phi(x, t) \geq 0$, выполняется интегральное неравенство:

$$\iint_{\mathcal{S}(T)} \left\{ |u - c| \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{sign}(u - c) (f(u) - f(c)) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dx dt \geq 0; \quad (1.7)$$

$$2) \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b: \quad \lim_{t \rightarrow 0+0} \int_a^b |u(x, t) - u^0(x)| dx = 0.$$

Отметим, во-первых, что обобщённое по Кружкову энтропийное решение единственно и существует для $\forall u^0(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$; во-вторых, обобщённое энтропийное решение по Кружкову есть обобщённое решение по Соболеву.

Явная аппроксимация закона сохранения (1.4) проводится на ячейке \mathcal{Q}_k^n сетки (рис. 1), введённой в конечной подобласти полосы $\mathcal{S}(T)$:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + \frac{g_{k+\frac{1}{2}}^n - g_{k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0, \quad (1.8)$$

где все величины вводятся с помощью интегральных операторов:

$$\begin{cases} u_k^{n+\alpha} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+\alpha}) dx, & \alpha = 0, 1, \\ g_{k\mp\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{k\mp\frac{1}{2}}, t)) dt. \end{cases} \quad (1.9)$$

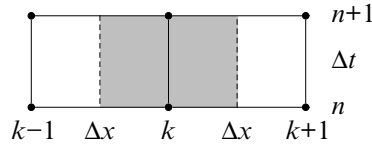


Рис. 1. Ячейка Q_k^n сетки (показана серым цветом)

В явном методе (1.8) первого или второго порядка аппроксимации по x

$$g_{k-\frac{1}{2}}^n = g(u_{k-1}^n, u_k^n), \quad g_{k+\frac{1}{2}}^n = g(u_k^n, u_{k+1}^n), \quad (1.10)$$

причём выполняется условие согласования: $g(u, u) = f(u)$.

Условия сходимости сеточного решения u_k^n к обобщённому энтропийному решению $u(x, t)$ указаны в теоремах Лакса – Вендрова [10] и Хартена [11].

В работе [12] было обращено внимание на различие между порядками сильной сходимости сеточного решения u_k^n к гладкому решению $u(x, t)$ и слабой сходимости u_k^n к обобщённому решению $u(x, t)$. Порядок сильной сходимости (аппроксимации) вычисляется разложением потоков (1.10) в ряды относительно узла (x_k, t^n) , порядок слабой сходимости — подстановкой сеточного решения в определение обобщённого решения.

В работах [13] и [14] оценка слабой сходимости, основанная на определении обобщённого решения по Соболеву, выполнена соответственно для пространственно одномерных уравнений мелкой воды и метода [11] и пространственно одномерных уравнений газовой динамики и метода [15].

В данной работе поставлена и решена задача об оценке слабой сходимости сеточных решений, полученных по методам первого и второго порядков аппроксимации для скалярного закона сохранения, с помощью функционала, входящего в определение обобщённого решения по Кружкову. В разд. 2 приведены постановка задачи Коши для скалярного закона сохранения, допускающего точное решение, и обоснование того, что последнее есть энтропийное решение по Кружкову. В разд. 3 поставлена и решена сеточная задача Коши для задачи Коши из разд. 2. В разд. 4 описано вычисление порядка слабой сходимости последовательности сеточных решений и приведены соответствующие результаты. В разд. 5 изложены основные выводы работы.

2. Точное решение задачи Коши для закона сохранения

Рассмотрим задачу Коши (1.1) для уравнения Хопфа с непрерывным кусочно-гладким начальным условием [1]:

$$u^0(x) = \begin{cases} u_L = 1, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_R = 0, & 1 < x. \end{cases} \quad (2.1)$$

Задача (1.1), (2.1) допускает характеристическую постановку, из которой решение $u(x, t)$ получается в явном виде, как следствие постоянства функции $u(x, t)$ вдоль характеристик (рис. 2–3):

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1, & t < 1, \\ \frac{x-1}{t-1}, & 1 \leq x \leq t, & 1 < t, \\ 0, & 1 \leq x. \end{cases} \quad (2.2)$$

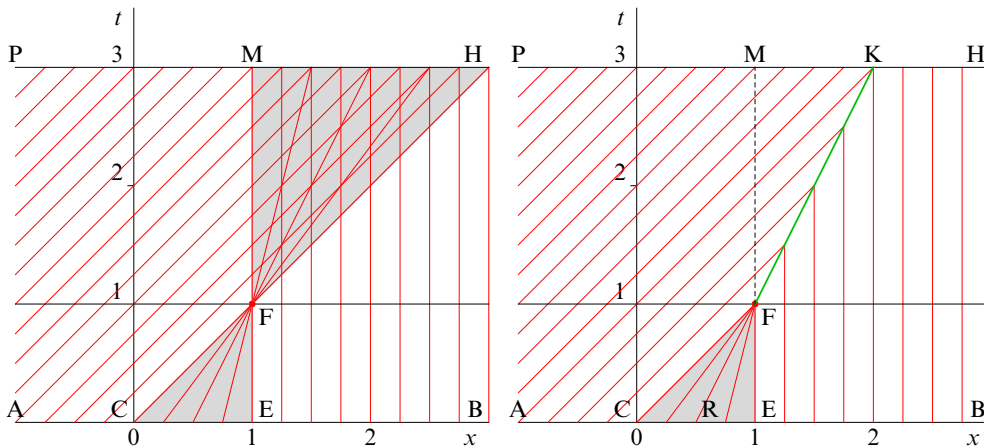


Рис. 2. Характеристики в полосе $\mathcal{S}(3)$ для задач Коши: (1.1), (2.1) (слева) и (1.2), (2.1) (справа)

Функция (2.2) обладает следующими очевидными свойствами: 1) недифференцируема на отрезках $C(F)H$ и $E(F)M$ соответствующих характеристик, выходящих из точек C и E (рис. 2) недифференцируема функция $u^0(x)$; 2) многозначна при $t > 1$ (после опрокидывания решения).

Переход от задачи Коши (1.1), (2.1) к задаче Коши (1.2), (2.1) для соответствующего закона сохранения позволяет получить для последней однозначное решение (рис. 2–4):

$$u(x, t) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} 1, & x \leq t \\ 1 - x/t, & t \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 \leq x \end{array} \right\}, & t \leq 1, \\ \left. \begin{array}{l} 1, & x < 1 + D(t - 1) \\ 0, & x > 1 + D(t - 1) \end{array} \right\}, & 1 < t. \end{cases} \quad (2.3)$$

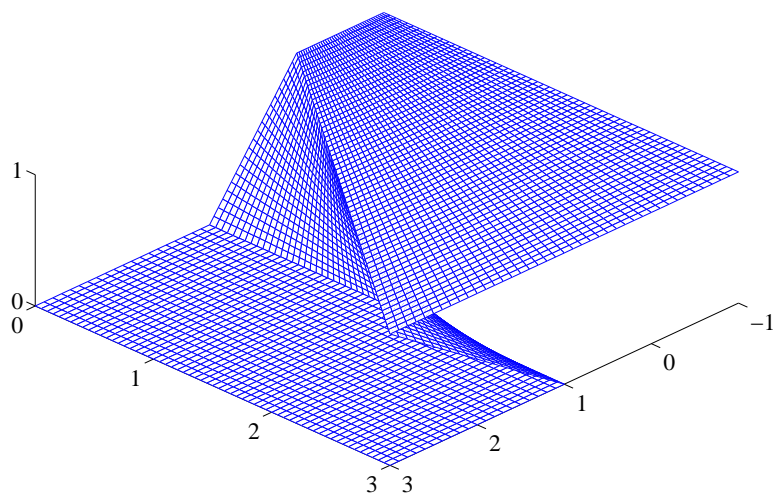


Рис. 3. Точное решение (2.2) характеристической задачи Коши (1.1), (2.1) в полосе $\mathcal{S}(3)$

При $t \leq 1$ решение (2.3) совпадает с решением (2.2), а при $t > 1$ продолжается как решение задачи Римана для закона сохранения с разрывным начальным условием

$$u^0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 1, \\ u_R, & 1 < x. \end{cases} \quad (2.4)$$

и введением прямолинейного разрыва ФК, выходящего из точки $F(1, 1)$ со скоростью (наклоном к оси t), вычисленной из уравнения Ренкина–Гюгонио (1.5):

$$D = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{1}{2} \frac{u_R^2 - u_L^2}{u_R - u_L} = \frac{1}{2} (u_L + u_R) = \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

Утверждение. Функция (2.3) есть обобщённое энтропийное решение задачи Коши (1.2), (2.1) по Кружкову.

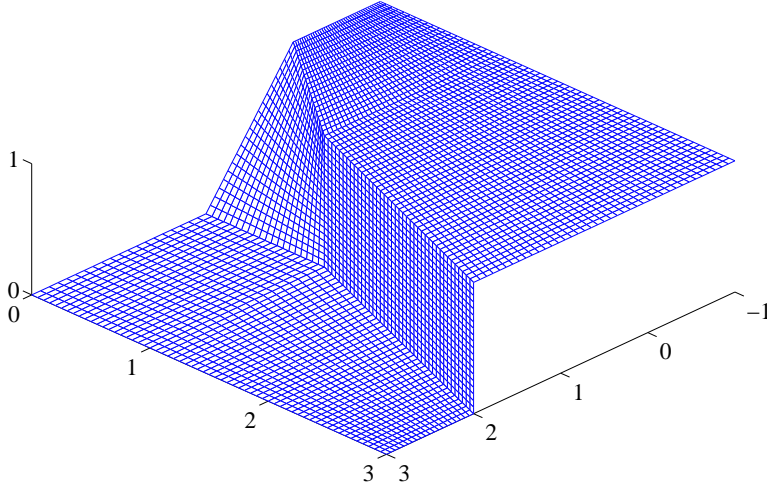


Рис. 4. Точное обобщённое решение (2.3) задачи Коши (1.2), (2.1) в полосе $\mathcal{S}(3)$

Доказательство. Введём область $\mathcal{D} = \text{ABHP} \subset \mathcal{S}(3)$ (рис. 2), пробные функции $\phi(x, t) \in \mathcal{C}^{\hat{2}(1,1)}(\mathcal{D})$: $\phi \geq 0$, и вспомогательные постоянные:

$$\begin{cases} c_- = \inf_{\mathcal{S}(T)} u(x, t) = \min_{\overline{\mathcal{D}}} u(x, t), \\ c_+ = \sup_{\mathcal{S}(T)} u(x, t) = \max_{\overline{\mathcal{D}}} u(x, t). \end{cases} \quad (2.6)$$

1. Пусть в определении (1.7): $c \leq c_-$ или $c \geq c_+$, тогда в произвольной подобласти $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ существования классического решения определение (1.7) сводится к выполнению неравенств

$$\pm \iint_{\mathcal{D}'} \left\{ (u - c) \frac{\partial \phi}{\partial t} + (f(u) - f(c)) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dx dt \geq 0, \quad (2.7)$$

левые части которых допускают следующее преобразование:

$$\begin{aligned} & \pm \iint_{\mathcal{D}'} \left\{ \frac{\partial \phi(u - c)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(f(u) - f(c))}{\partial x} - \underbrace{\phi \frac{\partial(u - c)}{\partial t} - \phi \frac{\partial(f(u) - f(c))}{\partial x}}_{\equiv 0} \right\} dx dt = \\ & \pm \oint_{\partial \mathcal{D}'} -\phi(u - c) dx + \phi(f(u) - f(c)) dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введём разбиение области \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_L + \mathcal{D}_W + \mathcal{D}_R, \quad (2.9)$$

где $\mathcal{D}_L = \text{АСФКР}$: $u = u_L$; $\mathcal{D}_R = \text{ЕВНКР}$: $u = u_R$; $\mathcal{D}_W = \Delta\text{СЕФ}$ (рис. 2), для которого запишем определение (2.7):

$$I_K[u](\mathcal{D}) = I_K[u](\mathcal{D}_L) + I_K[u](\mathcal{D}_W) + I_K[u](\mathcal{D}_R) \geq 0, \quad (2.10)$$

каждое из слагаемых которого есть линейный функционал

$$I_K[u](\mathcal{D}') := \iint_{\mathcal{D}'} \left\{ |u - c| \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{sign}(u - c) (f(u) - f(c)) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dx dt, \quad (2.11)$$

вычисляемый согласно (2.8), тогда:

$$I_K[u](\mathcal{D}) \stackrel{(2.10)}{=} \pm \oint_{\text{АСФКР}} \pm \oint_{\text{СРЕФ}} \pm \oint_{\text{ЕВНКР}}. \quad (2.12)$$

Теперь учтём, что: 1) интегралы на отрезках АС, КР, РА, ЕВ, ВН, НК границы области \mathcal{D} равны нулю; 2) на отрезках СФ и ЕФ подынтегральные функции непрерывны, в силу непрерывности $u(x, t)$ и потока $f(u)$, откуда

$$\begin{aligned} I_K[u](\mathcal{D}) &\stackrel{(2.12)}{=} \pm \int_{\text{FK}} -\phi(x, t)(u_L - c) dx + \phi(x, t) (f(u_L) - f(c)) dt, \pm, \\ &\pm \int_{\text{KF}} -\phi(x, t)(u_R - c) dx + \phi(x, t) (f(u_R) - f(c)) dt \stackrel{(1.5)}{=} \\ &= \pm \int_0^1 \phi(x(t), t) (D[u] - [f(u)]) \Big|_{x(t)=1+\frac{t-1}{2}} dt = \\ &= \pm (D[u] - [f(u)]) \int_0^1 \phi(x(t), t) \Big|_{x(t)=1+\frac{t-1}{2}} dt \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поскольку на разрыве тождественно выполняется условие Ренкина – Гюгонио (1.5), то для случая $c \leq c_-$ или $c \geq c_+$ утверждение доказано.

2. Пусть теперь $c_- < c < c_+$. Поскольку в области \mathcal{D}_W разности $u - c$ и $f(u) - f(c)$ знакопеременные, вместо разбиения (2.9) введём другое:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_L + \mathcal{D}_W^+ + \mathcal{D}_W^- + \mathcal{D}_R, \quad (2.14)$$

где $\mathcal{D}_W^+ = \Delta\text{СРФ}$: $u(x, t) - c \geq 0$, $\mathcal{D}_W^- = \Delta\text{РЕФ}$: $u(x, t) - c \leq 0$. Тогда в областях \mathcal{D}_L , \mathcal{D}_W^+ и в областях \mathcal{D}_W^- , \mathcal{D}_R функционал (2.11) принимает вид

$$I_K[u](\mathcal{D}') \stackrel{(2.8)}{=} \pm \oint_{\partial\mathcal{D}'} -\phi(u - c) dx + \phi(f(u) - f(c)) dt. \quad (2.15)$$

Точно так же, как и при доказательстве утверждения в первом случае, рассмотрим структуру выражения

$$I_K[u](\mathcal{D}) = I_K[u](\mathcal{D}_L) + I_K[u](\mathcal{D}_W^+) + I_K[u](\mathcal{D}_W^-) + I_K[u](\mathcal{D}_R) \geq 0 \quad (2.16)$$

с учётом: 1) обращения пробных функций $\phi(x, t) \geq 0$ на границе области в нуль; 2) непрерывности подынтегральной функции в (2.11) на отрезке RF :

$$\begin{aligned}
I_K[u](\mathcal{D}) &= \int_F^K \left\{ -\phi(u - c) dx + \phi(f(u) - f(c)) dt \right\} \Big|_{u=u_R}^{u=u_L} = \\
&= 2 \int_K^F -\phi\left(\frac{u_L + u_R}{2} - c\right) dx + \phi\left(\frac{f(u_L) + f(u_R)}{2} - f(c)\right) dt = \\
&= 2 \left\{ \left(\frac{f(u_L) + f(u_R)}{2} - f(c)\right) - D\left(\frac{u_L + u_R}{2} - c\right) \right\} \int_0^1 \phi(x(t), t) \Big|_{x(t)=1+\frac{t-1}{2}} dt = \\
&= -c(c-1) \int_0^1 \phi(x(t), t) \Big|_{x(t)=1+\frac{t-1}{2}} dt \geq 0.
\end{aligned}$$

Отметим для дальнейшего, что $I_K(\mathcal{D}) \equiv (2.13)$ в случае $c \leq c_-$ или $c \geq c_+$, где постоянные c_{\mp} определены выражениями (2.6). \square

3. Сеточное решение задачи Коши для закона сохранения

Введём в области $\mathcal{D} = [-1, +3] \times [0, 3]$ (рис. 2) сетку \mathcal{S}_h с числом узлов по пространственной переменной N_x и временных слоёв N_t . Значение N_x будем задавать не непосредственно, а через число узлов n_x на отрезке $[0, 1]$ линейного изменения начального условия $u^0(x)$ (2.1), тогда $N_x = 4(n_x - 1) + 1$. Пространственный шаг сетки $\Delta x = 1/(n_x - 1) = 4/(N_x - 1)$. Обозначим через $h_0 = \Delta_0 x$ шаг сетки, соответствующий числу узлов $n_x = 11$. Число временных слоёв N_t определим из условия устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви [4, 16]: $\max_u |a(u)| \Delta t / \Delta x \leq 1$. Введём также обозначение $\Delta_0 t$ для временного шага, соответствующего пространственному шагу $\Delta_0 x$.

На основе шагов $\Delta_0 x$ и $\Delta_0 t$ введем последовательность сеток \mathcal{S}_{h_m} с шагами по пространственной и временной переменным:

$$h_m = \Delta_m x = \frac{\Delta_0 x}{2^m}, \quad \Delta_m t = \frac{\Delta_0 t}{2^m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

где m — параметр измельчения сетки.

Сеточные решения будем строить по методам против потока [3, 4, 16] и Лакса – Фридрихса [17], относящимся к классу TVD [11]. Некоторые из таких решений показаны на рис. 5, 6, 7, 8. Очевидна сходимость сеточных решений к точному обобщённому (2.3) (рис. 4) (к проекции точного решения на сетку), однако нас будет интересовать слабая сходимость.

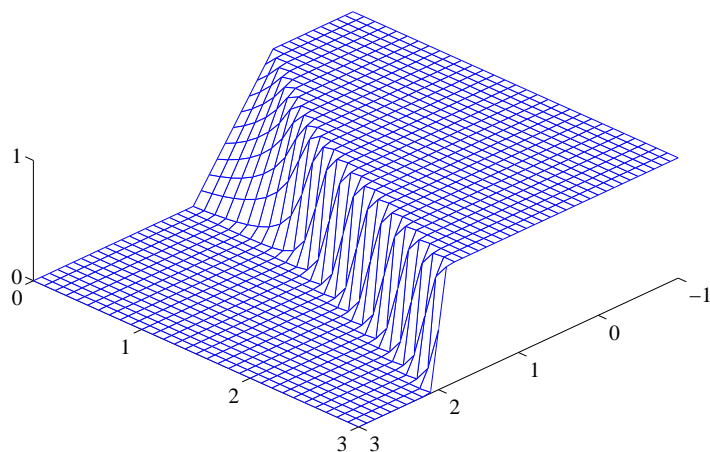


Рис. 5. Сеточное решение задачи Коши (1.2), (2.1) по методу против потока, $m = 0$

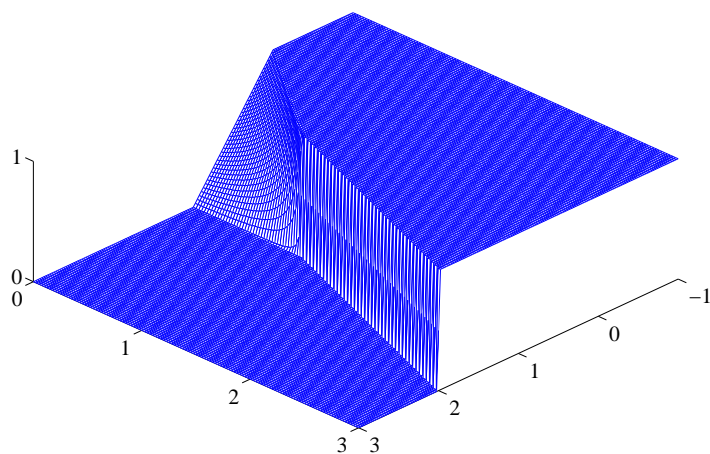


Рис. 6. Сеточное решение задачи Коши (1.2), (2.1) по методу против потока, $m = 5$. Показана только каждая 8-ая линия первого и второго семейств на поверхности

4. Слабая сходимость сеточных решений к точному

Рассмотрим слабую сходимость сеточных решений, полученных по методам против потока и Лакса – Фридрихса, к точному обобщённому энтропийному решению (2.3) задачи Коши (1.2), (2.1) для закона сохранения в полосе $\mathcal{S}(3)$. Составляющие части исследования слабой сходимости следующие:

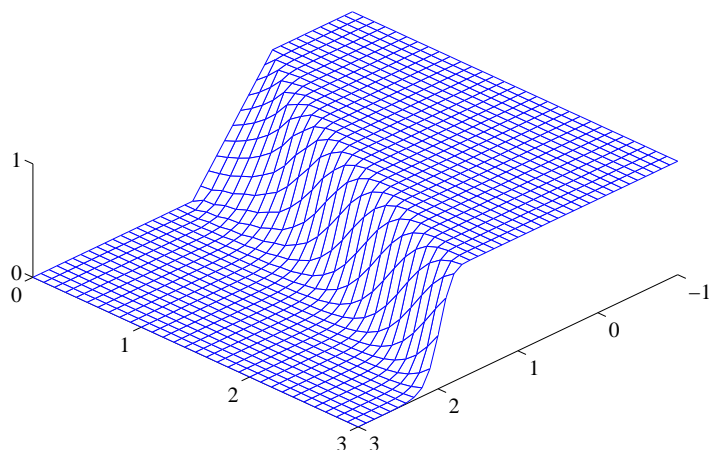


Рис. 7. Сеточное решение задачи Коши (1.2), (2.1) по методу Лакса – Фридрихса, $m = 0$

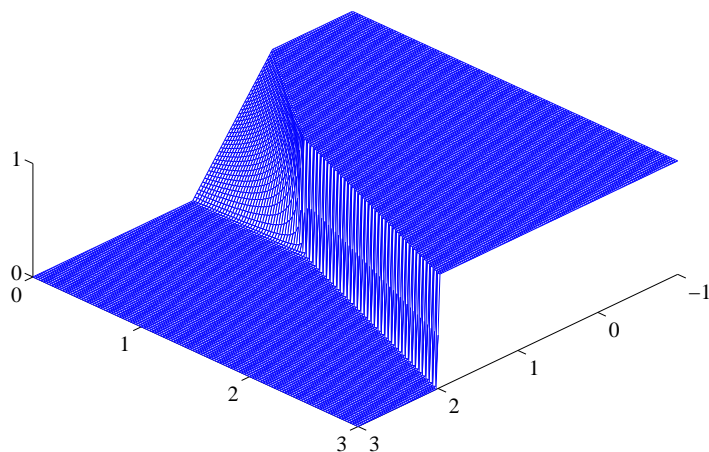


Рис. 8. Сеточное решение задачи Коши (1.2), (2.1) по методу Лакса – Фридрихса, $m = 5$. Показана только каждая 8-ая линия первого и второго семейств на поверхности

1) теорема Лакса – Вендрова [10] о слабой сходимости по Соболеву сеточных решений, полученных по явному вычислительному методу (1.8), согласованному с законом сохранения;

2) теорема Хартена [11] о выполнении условия (1.6) с энтропийной парой Кружкова $U = |u - c|$, $F(u) = \text{sign}(u - c) ((f(u) - f(c)))$, для сеточных решений, полученных по методу TVD;

3) линейный функционал, введённый на основе определения (1.7) обобщённого решения по Кружкову:

$$I_K[u] := \iint_{\mathcal{D}} \left\{ |u - c| \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{sign}(u - c) (f(u) - f(c)) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dx dt; \quad (4.1)$$

- 4) последовательности сеточных решений u_{h_m} на сетках \mathcal{S}_{h_m} (3.1);
 5) разновидности пробных функций $\phi(x, t) \geq 0$:

$$\phi_1(x, t) = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \sin \left(\frac{2\pi(x - x_k)}{\Delta x} + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \left\{ 1 + \sin \left(\frac{2\pi(t - t^n)}{\Delta t} - \frac{\pi}{2} \right) \right\}, \quad (4.2)$$

$$\phi_2(x, t) = \left\{ \frac{x - (x_k - \Delta x/2)}{\Delta x/2} \frac{x - (x_k + \Delta x/2)}{\Delta x/2} \right\}^{2m_x} \left\{ \frac{t - t^n}{\Delta t/2} \frac{t - t^{n+1}}{\Delta t/2} \right\}^{2m_t}, \quad (4.3)$$

где $m_x, m_t \in \mathbb{N}$, а $\phi_1(x, t)$ (4.2), $\phi_2(x, t)$ (4.3) показаны на рис. 9, 10.

Вычисление значений функционала $I_K[u]$ (4.1) проводится для сеточных решений u_{h_m} на пробных функциях $\phi_{1,2}(x, t)$ таким образом. Двойственные вычислительным ячейкам \mathcal{Q}_k^n (рис. 1) ячейки $\mathcal{G}_k^n := \{x_k^n, x_{k+1}^n, x_{k+1}^{n+1}, x_k^{n+1}\}$ выбираются в качестве носителей пробных функций $\phi_{1,2}(x, t)$. В каждой двойственной ячейке \mathcal{G}_k^n сеточное решение восполняется билинейной функцией вспомогательных переменных ξ и η :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta)|_{\mathcal{G}_k^n} &= a_{00} + a_{10}\xi + a_{01}\eta + a_{11}\xi\eta, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \\ a_{00} &= u_k^n, \\ a_{10} &= u_{k+1}^n - u_k^n, \\ a_{01} &= u_k^{n+1} - u_k^n, \\ a_{11} &= (u_{k+1}^{n+1} - u_k^{n+1}) - (u_{k+1}^n - u_k^n). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Далее в двойственных ячейках \mathcal{G}_k^n вводится вспомогательная сетка с числом узлов $M_x \times M_t$. В каждом узле этой сетки могут быть вычислены значения сеточного решения, восполненного согласно (4.4), значения производных пробных функций $\phi_{1,2}(x, t)$ по переменным x и t вычисляются с помощью разностных операторов. Таким образом, подынтегральное выражение функционала (4.1) полностью определено на вспомогательной сетке. Общее представление о подынтегральном выражении дают рис. 11 и 12. В частности, рис. 11 касается случая, когда подынтегральная функция в линейном функционале $I_{K,m}$ (2.11), применяется метод против потока, $m = 2$, $c = 0.5$, и

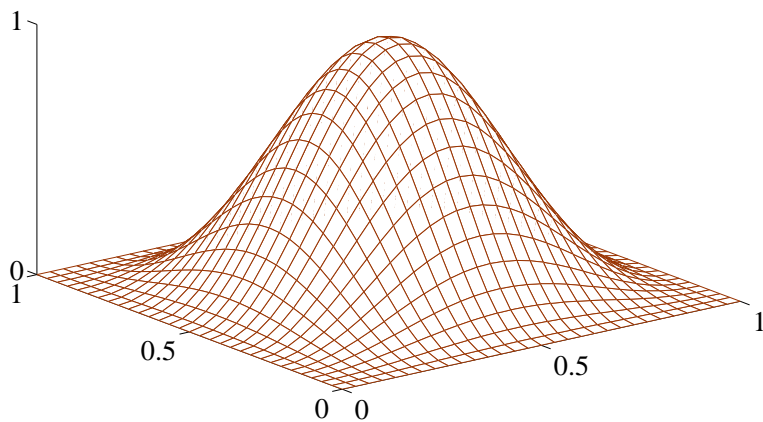


Рис. 9. Пробная функция $\phi_1(x, t)$ (4.2) в области $[0, 1] \times [0, 1]$

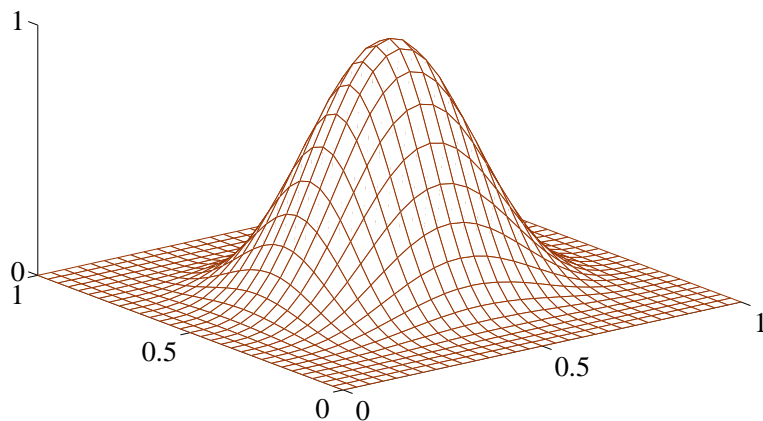


Рис. 10. Пробная функция $\phi_2(x, t)$ (4.3) в области $[0, 1] \times [0, 1]$: $m_x = 2$, $m_t = 3$

пробная функция $\phi_1(x, t)$. В то время как рис. 12 относится к случаю подынтегральной функции в линейном функционале $I_{K, m}$ (2.11), методу против потока, $m = 2$, $c = 0.5$, и пробной функции $\phi_2(x, t)$, $m_x = 1$, $m_t = 1$. Теперь для вычисления функционала (4.1) может быть применена любая квадратурная формула. Далее применяется двумерная формула средних прямоугольников

второго порядка точности относительно шагов вспомогательной сетки.

Для проверки сходимости вычислений вспомогательные сетки измельчались, то есть вычисления проводились для значений $M_x = 11, 21, 31, 41, 51$ и $M_t = 11, 21, 31, 41, 51$.

Значение постоянной c в выражении линейного функционала (4.1) выбиралось, как и при доказательстве утверждения (с. 43), из трёх интервалов: $c < 0 = \inf_{S(3)} u(x, t)$, $0 \leq c \leq 1$, $c > 1 = \sup_{S(3)} u(x, t)$.

Равенство значений функционала $I_K[u]$ (4.1) для $c = -1$ и $c = +2$ теоретическому значению $I_K(\mathcal{D}) \equiv (2.13)$ с точностью $10^{-7} - 10^{-14}$, в зависимости от значения параметра m и числа узлов вспомогательной сетки, рассматривается как косвенное подтверждение правильности вычислений.

Результаты исследования слабой сходимости решений к точному обобщённому решению (2.3) задачи Коши (1.2), (2.1) показаны на рис. 13 для $c = 0.5$.

Подгонка методом наименьших квадратов вычисленных значений функционала $I_K[u]$ (4.1), в зависимости от шага сетки h_m , линейной функцией наводит на мысль о том, что наблюдается слабая сходимость первого порядка по шагу сетки. Однако порядок сходимости можно оценить точнее, применив метод Рунге [18], согласно которому искомый порядок равен показателю степени в следующих приближённых равенствах:

$$\begin{cases} I_K[u] = I_{K, m-1} + C h_{m-1}^p = I_{K, m-1} + C 2^{+p} h_m^p, \\ I_K[u] = I_{K, m} + C h_m^p = I_{K, m} + C h_m^p, \\ I_K[u] = I_{K, m+1} + C h_{m+1}^p = I_{K, m+1} + C 2^{-p} h_m^p, \end{cases}$$

откуда получается локальная оценка показателя p , при переходе от сетки с параметром измельчения $m - 1$ к сетке с параметром m , а от последней — к сетке с параметром $m + 1$:

$$p(m) = \log_2 \frac{I_{K, m-1} - I_{K, m}}{I_{K, m} - I_{K, m+1}}. \quad (4.5)$$

Вычисленные значения показателя p (4.5) приведены в виде зависимостей $p(m)$ (рис. 13).

5. Основные выводы

Полученные результаты показывают, что порядок слабой сходимости сеточных решений задачи Коши для скалярного закона сохранения к точному обобщённому энтропийному решению в смысле Кружкова не выше первого относительно шага сетки, для вычислительных методов TVD против потока и Лакса – Фридрихса (соответственного первого и второго порядков аппроксимации).

Данная работа представляет предварительные результаты исследования слабой сходимости сеточных решений краевых задач для пространственно

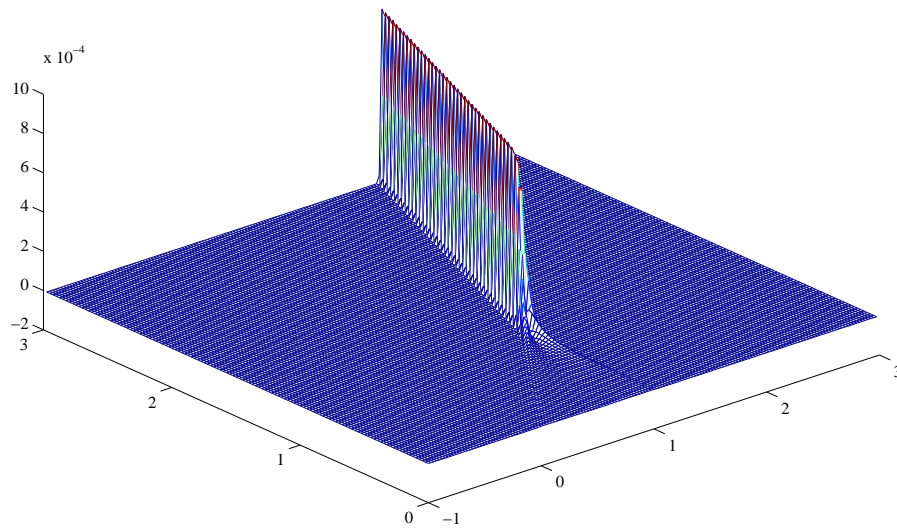


Рис. 11. Вид слева от разрыва в направлении его движения

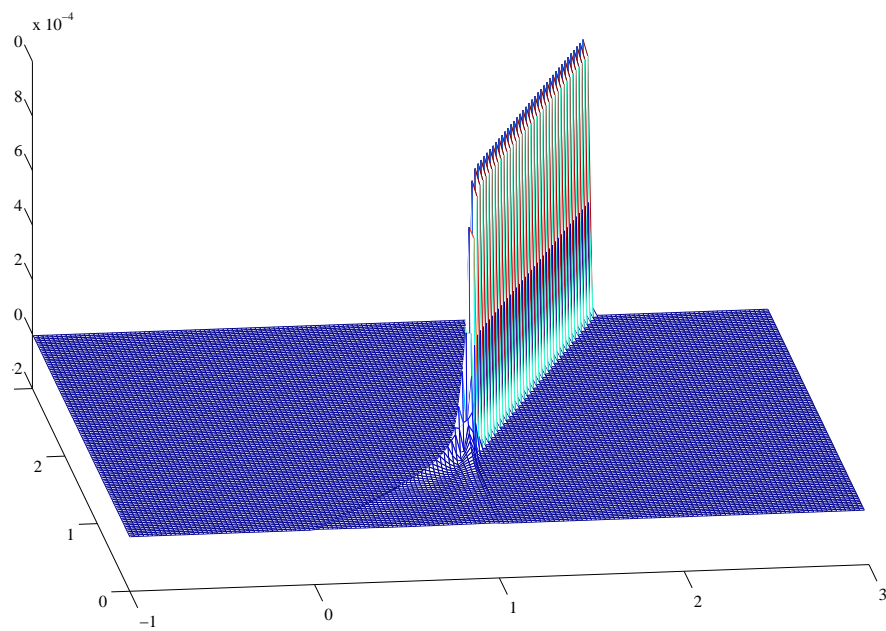


Рис. 12. Вид справа от разрыва в направлении его движения

одномерных и многомерных скалярных законов сохранения и систем законов сохранения.

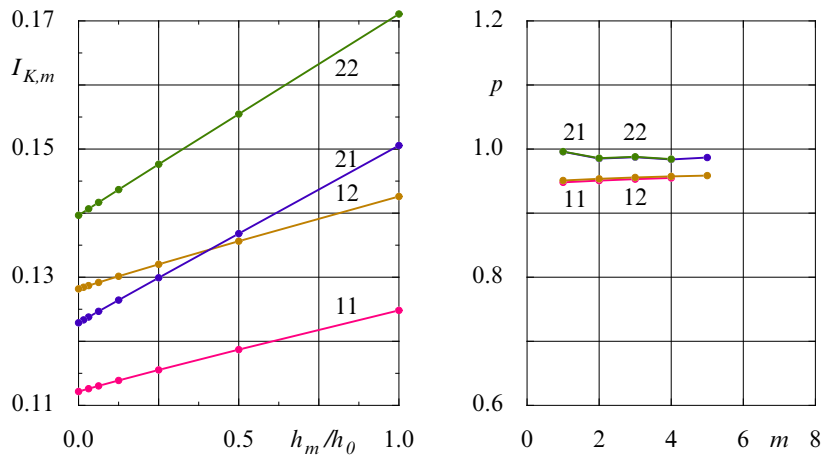


Рис. 13. Значение функционала $I_{K,m}$ (2.11) (слева) и порядок p слабой сходимости (справа) на сетке \mathcal{S}_{h_m} (3.1) для методов против потока (11, 12) и Лакса – Фридрихса (21, 22) на пробных функциях $\phi_1(x, t)$ (4.2) (11, 21) и $\phi_2(x, t)$ (4.3) (12, 22, $m_x = 1, m_t = 1$); $c = 0.5$

Библиографические ссылки

1. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук.* — 1957. — Т. 12, № 3. — С. 3–73.
2. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // *Успехи математических наук.* — 1959. — Т. 14, № 2. — С. 87–158.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. — 688 с.
4. Godlewski E., Raviart P.-A. Hyperbolic Systems of Conservation Laws. — Paris: Ellipses, 1991. — 252 p.
5. Годунов С. К. Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике // *Успехи математических наук.* — 1962. — Т. 17, № 3. — С. 147–158.
6. Lax P. D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws II // *Communications in Pure and Applied Mathematics.* 1957. — Vol. 10, No 1. — P. 537–566.
7. Олейник О. А. О единственности обобщенного решения задачи Коши для одной нелинейной системы уравнений, встречающейся в механике // *Успехи математических наук.* — 1957. — Т. 12, № 6. — С. 169–176.
8. Кружков С. Н. Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // *ДАН.* 1969. Т. 187, № 1. С. 29–255.
9. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // *Математический сборник.* 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255.
10. Lax P. D., Wendroff B. Systems of Conservation Laws // *Communications in Pure and Applied Mathematics.* — 1960. — Vol. 13, № 1. — P. 217–237.
11. Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *Journal of Computational Physics.* — 1983. — Vol. 49, № 3. — P. 357–393.

12. Годунов С. К. Воспоминания о разностных схемах. Доклад на Международном симпозиуме «Метод Годунова в газовой динамике», Мичиганский университет (США), май 1997. Новосибирск: Научная книга, 1997. 40 с.
13. Остапенко В. В. О слабой сходимости на разрывных решениях TVD-схемы Хартена второго порядка аппроксимации // *Вычислительные технологии*. — 1997. — Т. 2, № 5. — С. 57–65.
14. Годунов С. К., Манузина Ю. Д., Назарьева М. А. Экспериментальный анализ сходимости численного решения к обобщенному решению в газовой динамике // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2011. — Т. 51, № 1. — С. 96–103.
15. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Математический сборник*. 1959. — Т. 47, № 3. — С. 271–306.
16. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001. — 608 с.
17. Lax P. D. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computation // *Communications in Pure and Applied Mathematics*. — 1954. — Vol. 7, № 1. — P. 159–193.
18. Самарский А. А., Гулин А. А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 432 с.

Надійшла до редколегії 20.01.2014