УДК 629.7.01

Ю. А. Ромасько

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Рассмотрена математическая модель динамики беспилотного летательного аппарата в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений. Также изложены общие принципы её построения. На языке программирования С++ написана программа, выполняющая интегрирование входящих в систему уравнений. По результатам интегрирования сделаны выводы об адекватности модели реальному динамическому объекту.

Ключевые слова: математическая модель, система дифференциальных уравнений, БПЛА, интегрирование, язык программирования С++.

Розглянуто математичну модель динаміки безпілотного літального апарата у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь. Також викладено загальні принципи її побудови. Мовою програмування С++ написано програму, що виконує інтегрування рівнянь, які входять до системи. За результатами інтегрування зроблено висновки про адекватність моделі реальному динамічному об'єкту.

Ключові слова: математична модель, система диференційних рівнянь, БПЛА, інтегрування, мова програмування С++.

A mathematical model of the dynamics of an unmanned aerial vehicle in the form of a system of nonlinear differential equations is considered. It also outlines the general principles of its construction. In the C ++ programming language, a program is written that integrates the equations entering into the system. Based on the integration results, conclusions were drawn about the model's adequacy to the real dynamic object.

Keywords: mathematical model, system of differential equations, UAV, integration, C++ programming language.

Рассматривается задача построения математической модели движения беспилотного летательного аппарата (БПЛА) в виде системы дифференциальных уравнений, а также её численное интегрирование методом Рунге – Кутта. Предполагается на основе анализа полученных результатов сделать вывод об адекватности построенной модели и пригодности её для дальнейших исследований.

В настоящее время БПЛА находят всё более широкое применение во многих отраслях человеческой деятельности. На сегодняшний день трудно представить себе отрасль, в которой решение конкретных задач осуществлялось бы без их помощи.

Разработка и проектирование конкретных образцов БПЛА невозможны без построения различного рода моделей, использование которых позволяет выявить и проанализировать возможные ошибки, погрешности, а также даёт возможность проявиться интересным и характерным особенностям объекта. А это, тем самым, позволяет сэкономить средства на изготовление и испытания аппарата.

Математическую модель для любого вида движения (боковое, продольное) и любого режима полёта можно получить, основываясь на полной исходной системе нелинейных дифференциальных уравнений [2], которая в общем случае включает:

1) три уравнения динамики центра масс БПЛА;
2) три уравнения динамики углового движения БПЛА;
3) три уравнения кинематики углового движения БПЛА;
4) три уравнения кинематики центра масс БПЛА.

Таким образом, математическая модель БПЛА, как динамического объекта, представляет собой систему дифференциальных уравнений, в общем случае включающую в себя двенадцать неизвестных функций времени. В частности, это проекции угловых и линейных скоростей центра масс на оси координат, проекции углов отклонения и прочие параметры, характеризующие динамику БПЛА. Решение (интегрирование) этих уравнений позволит осуществить математическое моделирование движения аппарата. Современные средства вычислительной техники позволяют решить поставленную задачу разнообразными способами.

Кроме перечисленных выше уравнений, в полную исходную систему могут входить дополнительные уравнения, описывающие взаимосвязь между углами в различных системах координат. Кроме основных нелинейностей, в уравнения входят локальные нелинейности, к которым относятся выражения для аэродинамических сил и моментов, выражения для сил тяги двигателей, ускорение гравитационного поля и его зависимость от высоты, выражения для плотности воздуха.

Согласно [1] и [5], уравнения динамики центра масс БПЛА имеют вид, известный из курса динамики твёрдого тела:

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_x}{dt}+\omega_x V_z-\omega_z V_y=\frac{1}{m}\sum F_x,\\
&\frac{dV_y}{dt}+\omega_y V_x-\omega_x V_z=\frac{1}{m}\sum F_y,\\
&\frac{dV_z}{dt}+\omega_x V_y-\omega_y V_x=\frac{1}{m}\sum F_z,
\end{aligned} \tag{1}$$

а уравнения динамики углового движения соответственно

$$\begin{aligned}
&\frac{d\omega_x}{dt}+\frac{1}{I_x}(I_z-I_y)\omega_z\omega_y=\frac{1}{I_x}\sum M_x,\\
&\frac{d\omega_y}{dt}+\frac{1}{I_y}(I_x-I_z)\omega_x\omega_z=\frac{1}{I_y}\sum M_y,\\
&\frac{d\omega_z}{dt}+\frac{1}{I_z}(I_y-I_x)\omega_y\omega_x=\frac{1}{I_z}\sum M_z,
\end{aligned} \tag{2}$$

где m – масса летательного аппарата; V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости центра масс летательного аппарата на подвижные оси; ω_x, ω_y, ω_z, – проекции вектора угловой скорости на подвижные оси; ΣF_x, ΣF_y, ΣF_z – суммы проекций всех сил, действующих на летательный аппарат, на подвижные оси; I_x, I_y, I_z – главные центральные моменты инерции летательного аппарата; ΣM_x, ΣM_y, ΣM_z –

суммы проекций моментов всех сил (относительно центра масс), действующих на летательный аппарат, на те же оси

Под подвижными осями понимаются оси системы координат, связанной с БПЛА.

Входящие в правую часть уравнений (1) и (2) суммы сил и моментов можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = F_{ax} + F_{gx} + F_{px}, \\ &\sum F_y = F_{ay} + F_{gy} + F_{py}, \\ &\sum F_z = F_{az} + F_{gz} + F_{pz}, \\ &\sum M_x = M_{ax} + M_{gx} + M_{px}, \\ &\sum M_y = M_{ay} + M_{gy} + M_{py} \\ &\sum M_z = M_{az} + M_{gz} + M_{pz}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где F_{ax}, F_{ay}, F_{az}, M_{ax}, M_{ay}, M_{az} – проекции аэродинамической силы и момента; F_{gx}, F_{gy}, F_{gz}, M_{gx}, M_{gy}, M_{gz} – проекции силы тяжести и её момента; F_{px}, F_{py}, F_{pz}, M_{px}, M_{py}, M_{pz} – проекции силы тяги двигателя и её момент относительно начала подвижной системы координат.

Уравнения кинематики углового движения БПЛА, согласно [2]:

$$\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} - (\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma)\sec\vartheta = 0, \\ &\frac{d\vartheta}{dt} - \omega_y \sin\gamma - \omega_z \cos\gamma = 0, \\ &\frac{d\gamma}{dt} - \omega_x + tg\vartheta(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma) = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

где ψ, ϑ, γ – соответственно углы рыскания, тангажа и крена.

Уравнения кинематики центра масс БПЛА, согласно [2]:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_g}{dt} - [V_x \cos\psi \cos\vartheta + V_y(\sin\psi \sin\gamma - \sin\vartheta \cos\psi \cos\gamma) +, \\ &+ V_z(\sin\vartheta \cos\psi \sin\gamma - \sin\psi \cos\gamma)] = 0, \\ &\frac{dy_g}{dt} - (V_x \sin\vartheta + V_y \cos\psi \cos\gamma + V_z \cos\vartheta \sin\gamma) = 0, \\ &\frac{dz_g}{dt} - [-V_x \cos\vartheta \sin\psi + V_y(\cos\psi \sin\gamma - \sin\vartheta \sin\psi \cos\gamma) + \\ &+ V_z(\cos\psi \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\psi \sin\gamma)] = 0, \end{aligned} \qquad (5)$$

где x_g, y_g, z_g – координаты центра масс БПЛА в земной (неподвижной) системе координат.

Объединяя уравнения (1)–(5), получим математическую модель движения БПЛА, абстрагированную от его аэродинамических характеристик.

Известно [6], что во время движения ЛА в атмосфере происходит силовое взаимодействие, в результате которого к каждому элементу поверхности аппарата прикладывается усилие от непрерывно распределённых нормальных и касательных напряжений. Это приводит к появлению аэродинамических сил и моментов, проекции которых входят в уравнения (3). Эти силы и моменты зависят, кроме всего прочего, от безразмерных коэффициентов c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z, называемых аэродинамическими коэффициентами. Значения и формулы для подсчёта аэродинамических коэффициентов определяются конкретной моделью ЛА.

Аэродинамические силы и моменты, в свою очередь, определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} &F_{ax} = c_x qS,\ M_{ax} = m_x qSL, \\ &F_{ay} = c_y qS,\ M_{ay} = m_y qSL, \\ &F_{az} = c_z qS,\ M_{az} = m_z qSL, \end{aligned} \tag{6}$$

где q – скоростной напор; S – характерная площадь ЛА; L – характерный размер ЛА.

В качестве объекта исследования рассмотрим модель Т-10 самолёта СУ-27 [3]. Аэродинамические коэффициенты данной модели определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} &c_x = 0.026 + \frac{0.09 + 0.068 arctg\dfrac{V_y}{V_x} + 0.0094\delta_{ст} + 0.001\delta_{пр}}{100}, \\ &c_y = \frac{0.09 + 0.068 arctg\dfrac{V_y}{V_x} + 0.0094\delta_{ст} + 0.001\delta_{пр}}{100}, \\ &c_z = 0.01 + 0.046\arcsin\frac{V_z}{\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}} + 0.015\delta_{пр}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &m_x = -0.0009\arcsin\frac{V_z}{\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}} - \frac{0.32}{2\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}}\omega_x -, \\ &-\frac{0.006}{2\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}}\omega_y - 0.01\delta_{эл} - 0.004\delta_{ст}, \\ &m_y = -0.0075\arcsin\frac{V_z}{\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}} - \frac{0.015}{2\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}}\omega_x - \\ &-\frac{0.18}{2\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}}\omega_y - 0.01\delta_{рн} - 0.0003\delta_{эл}, \\ &m_z = -0.0024 arctg\frac{V_y}{V_x} + 1.05\frac{1}{\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}}\omega_z + \frac{0.31}{2\sqrt{\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right)}}\omega_y + \\ &+0.01\delta_{ст}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta_{ст}$ – угол отклонения рулей высоты; $\delta_{пр}$ – угол отклонения предкрылков; $\delta_{эл}$ – угол отклонения элеронов; $\delta_{рн}$ – угол отклонения рулей направления.

Воспользовавшись [3], зададимся массогабаритными характеристиками БПЛА.

В частности:
m = 175 кг; S = 2,77 м^2; L = 0,5 м; q = 1,125 кг/(м·с^2);
I_x = 26,8 кг·м^2; I_y = 154,6 кг·м^2; I_z = 2,8 кг·м^2.

В качестве метода решения задачи интегрирования системы уравнений (математической модели) используем метод Рунге – Кутта четвёртого порядка точности. Этот метод лежит в основе большинства стандартных программ численного решения задачи Коши на ЭВМ [4].

На основе алгоритма вышеупомянутого метода была написана программа на языке программирования С++. По причине относительно большого объёма текст программы в данной статье приводить не будем. Проверку адекватности математической модели реальному динамическому объекту осуществим, промоделировав запуск объекта под разными углами к горизонту. Тяга двигателя отключена.

Результаты интегрирования уравнений из консоли языка С++ перенесём в программную среду MathCad, в которой и построим графики изменения координат x_g, y_g, z_g (приведены ниже).

Рис. 1 соответствует начальной скорости 50 м / с и углу 45 ^{o}.

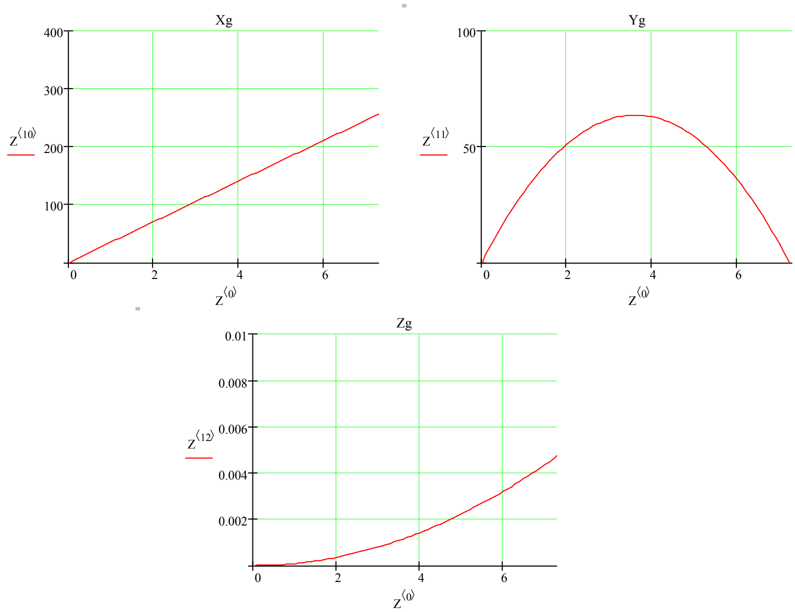

Рис. 1

Рис. 2 соответствует начальной скорости 50 м / с и углу 30 ^{o}.

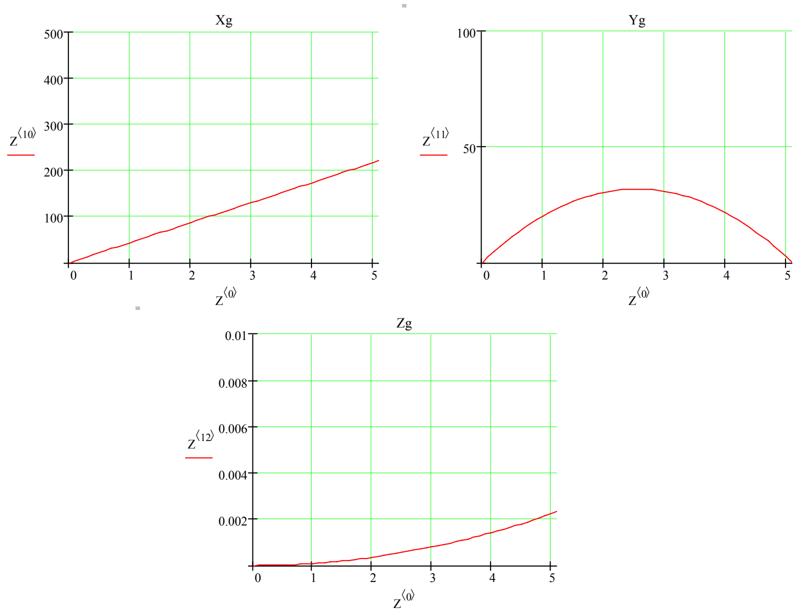

Рис. 2

Рис. 3 соответствует начальной скорости 50 м / с и углу 60 ^{o}.

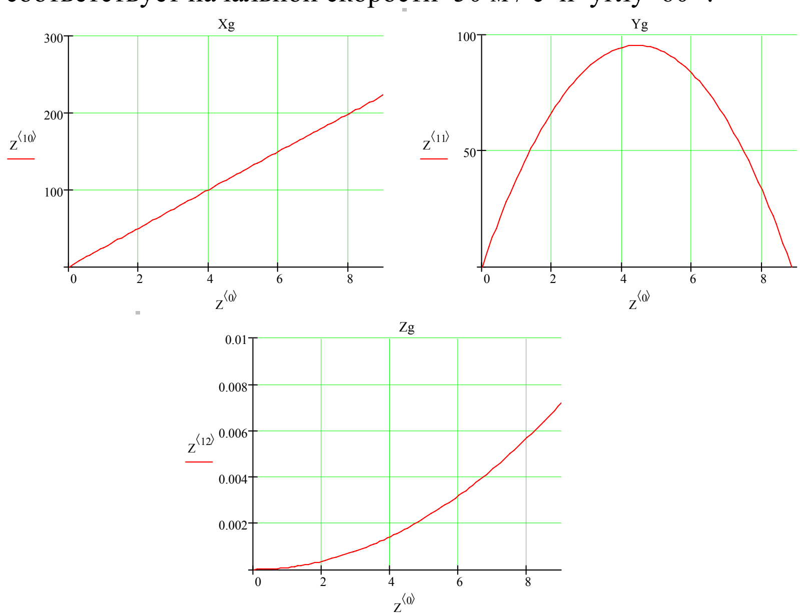

Рис. 3

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод о том, что в общем и целом поведение математической модели соответствует поведению реального динамического объекта: траектория носит параболический характер, а наибольшая дальность полёта наблюдается при угле запуска 45 ^{o}.

Таким образом, можно говорить о том, что построенная математическая модель БПЛА является адекватной. Более того, результатом проделанной работы является программный продукт, позволяющий осуществлять математическое моделирование динамики БПЛА. Будучи программным модулем, разработанный продукт может быть включён в состав какого-либо пакета прикладных программ с целью решения более широких задач, например, связанной задачи динамики и аэродинамики БПЛА.

Библиографические ссылки

1. **Афонин П. М.** Беспилотные летательные аппараты / П. М. Афонин, И. С. Голубев, Н. И. Колотков и др. – М. : Машиностроение, 1967. – 440 с.
2. **Бюшгенс Г. С.** Динамика самолёта. Пространственное движение / Г. С. Бюшгес, Р. В. Студнев. – М. : Машиностроение, 1983. – 320 с.
3. **Гордин А. Г.** Беспилотные летательные аппараты как объекты управления / А. Г. Гордин. – Х. : Гос. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2000. – 140 с.
4. **Калиткин Н. Н.** Численные методы : учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
5. **Лойцянский Л. Г.** Курс теоретической механики / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Гостехиздат, 1955. – Т. II. – 350 с.
6. **Приходько О. А.** Навчальний посібник до вивчення курсу «Розрахунок аеродинамічних характеристик» / О. А. Приходько. – Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2013. – 164 с.

Надійшла до редколегії 21.06.2017

УДК 629.78: (621.983)

Е. Г. Седачова[1], А. В. Кулик[2], Н. Н. Убизький[2]

[1] *Днепропетровский колледж ракетно-космического машиностроения*
[2] *Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

ПОВЫШЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

Дан анализ возможностей учета упрочнения и анизотропии свойств листовых материалов при математическом моделировании процессов пластического изменения формы при изготовлении несущих элементов конструкций ракетоносителей.

Ключевые слова: процессы пластического изменения формы; упрочнение, анизотропия свойств материалов, математическое моделирование; элементы конструкций; ракетоносители.

Наведено аналіз можливостей урахування зміцнення та анізотропії властивостей листових матеріалів при математичному моделюванні процесів пластичного змінення форми при виготовленні несучих елементів конструкцій ракетоносіїв.

Ключові слова: процеси пластичного змінення форми; зміцнення, анізотропія властивостей матеріалів, математичне моделювання, елементи конструкції, ракетоносії.

The analysis of possibilities of account of work-hardening and anisotropy of properties of sheet materials is given at the mathematical design of processes of plastic change of form at making of bearing elements of constructions of launch vehicles.

Keywords: processes of plastic change of form; work-hardening, anisotropy of properties of materials, mathematical design; elements of constructions; launch vehicles.