УДК 517.5+517.97

НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ФУНКЦІЇ З КОМПАКТНИМ НОСІЄМ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ

Колодяжний В.М., д.ф.-м.н., професор, ХНАДУ

Анотація. *Розглянуті питання конструювання нескінченно диференційованих скінчених елементів, які дозволяють здійснювати розбивку суцільного тіла на окремі елементи, при цьому враховувати конфігурацію границь тіла та реалізувати розбивку вихідної області, елементами, що отримуються, з забезпеченням виконання умови розбиття одиниці.*

Ключові слова: *атомарні функції, метод скінченних елементів, метод R-функцій, розбиття одиниці.*

БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ, ОПИСЫВАЮЩИЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Колодяжный В.М., д.ф.-м.н., профессор, ХНАДУ

Аннотация. *Рассмотрены вопросы конструирования бесконечно дифференцируемых конечных элементов, которые позволяют осуществлять разбиение сплошного тела на отдельные элементы, при этом учитывать конфигурацию границ тела и реализовать разбиение исходной области, полученными конечными элементами, с обеспечением выполнения условия разбиения единицы.*

Ключевые слова: *атомарные функции, метод конечных элементов, метод R-функций, разбиение единицы.*

INFINITELY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS WITH COMPACT SUPPORT DESCRIBING THE FINITE ELEMENT

Kolodyazhny V.M., Dr. Sc., professor, KhNAHU

Annotation. *The questions of construction of infinitely differentiable finite elements that allow decomposition of solid bodies into individual elements, and the configuration of the body to consider the boundaries and realize the partition of the original area, obtained by finite elements, with the enforcement of the terms of the partition of unity.*

Keywords: *atomic functions, finite element method, the method of R-functions, partition of unity*

Вступ

Метод скінченних елементів (МСЕ) при числовому розв'язуванні задач математичної фізики, дискретизація вихідних задач в якому відбувається на основі варіаційних або проекційних методів на основі використання спеціальних скінчено вимірних підпросторів функцій, розглядається як один з ефективних методів наближеного розв'язання інженерних задач. Специфікою вказаних просторів є те, що вони мають базиси з локальними носіями. За звичаєм в якості базисних функцій в МСЕ розглядаються скінчено поліноміальні функції, які в кожному комірці побудованої сітки являються інтерполяційними поліномами Лагранжа або Ерміта. Конструктивна ідея МСЕ підноситься до задач будівельної механіки і теорії пружності, в яких практикувався метод розбиття пружного тіла на окремі елементи, що визначаються комірками сітки та взаємодіють між собою в вузлах сітки. Математичні засоби теорії атомарних функцій [1-3] відкривають можливості конструювання нескінченно диференційованих скінчених елементів, а також здійснювати таке розбиття суцільного тіла на окремі елементи, при яких враховується конфігурація границь тіла та реалізується розбиття вихідної області отриманими скінченими елементами з забезпеченням виконання так званої умови розбиття одиниці. Такі фінітні скінченні елементи класу C^{∞}, що реалізують принцип розбиття одиниці, можуть знайти застосування в різних галузях математики та додатках, як один з варіантів переходу від глобальних розглядань до локальних і навпаки.

Постановка задачі

З метою побудови функцій, які описують згадані вище в визначеному сенсі базисні системи криволінійних скінчених елементів, скористаємося ідеєю конструювання геометрично структурованих атомарних функцій (ГСАФ) [4], але з орієнтацією отримуваних скінчених елементів на подальше використання при побудові числових розв'язків математичних моделей, тобто крайових задач математичної фізики.

Одним з можливих напрямків практичного застосування даних скінчених елементів є їх застосування при дослідженні математичних моделей процесів формування відливка.

Нехай розглядається область Ω (зосередимося на розгляданні двовимірної області, але відмітимо, що випадок тривимірної області реалізується аналогічним чином), що обмежена границею $\partial\Omega$. Границя $\partial\Omega$ нехай розбита на дві ділянки $\partial\Omega_1$ (півкола) та $\partial\Omega_2$ (три сторони прямокутника). Вихідна область представлена рис. 1, на якому виділена більш темним фоном. Кожна ділянка границі $\partial\Omega$ нехай описується відповідними нормальними функціями $\omega_1^*(x,y)$ та $\omega_2^*(x,y)$, побудова яких відбувається за схемою опису елементів креслення на основі використання повної системи ***R***-операцій [5-6].

Для кожної нормалізованої функції $\omega_1^*(x,y)$ і $\omega_2^*(x,y)$ можна побудувати геометрично структуровані атомарні функції: $gut^1(x,y;\omega_1^*)$ і $gut^2(x,y;\omega_1^*)$. Побудуємо сімейство еквідистантних кривих відносно вихідної границі $\partial\Omega$ області Ω. Нехай ці криві зсунуті відносно одна одної на половину діаметру носія атомарної функції $up(x)$, яка використовується при побудові ГСАФ. Ці криві розглядаються як породжуючи для відповідних ГСАФ.

Для кожної з вказаних еквідистантних кривих існує рівняння, що описує її, що дозволяє побудувати ГСАФ, яка буле відповідати геометрії цих кривих. Можливі сліди носіїв відповідних ГСАФ приведені на рис. 2.

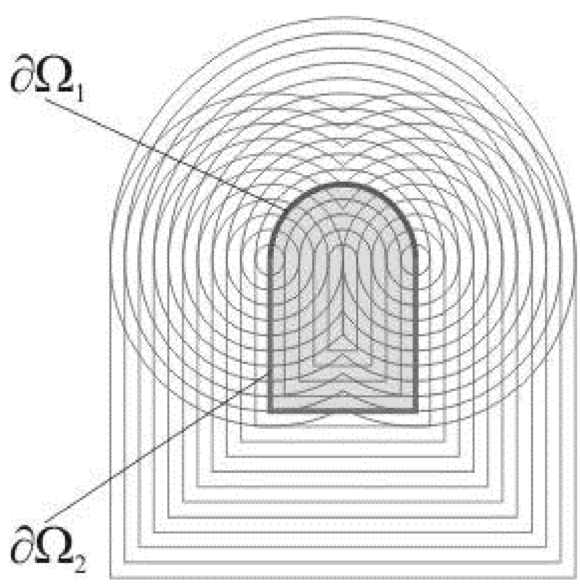
Таким чином, ставимо задачу знаходження системи базисних функцій, а саме: побудови для кожної з функцій $gut^i(x,y;\omega_i^*)$, $i=1,2$, такої системи функцій, щоб сума зсувів носіїв відповідних функції відносно вихідної границі або еквідистантної кривої до відповідних ділянок $\partial\Omega_i$ границі $\partial\Omega$ на величину половини носія вихідних функції у напрямку перпендикулярному до відповідної ділянки границі або еквідистантної кривої покривала вихідну область Ω. Це дозволяє розглядати задачу про пошук системи нескінченно диференційованих криволіній-них скінченних елементів, носії яких орієнтовані відносно границі $\partial\Omega$ області Ω.

Аналіз публікацій

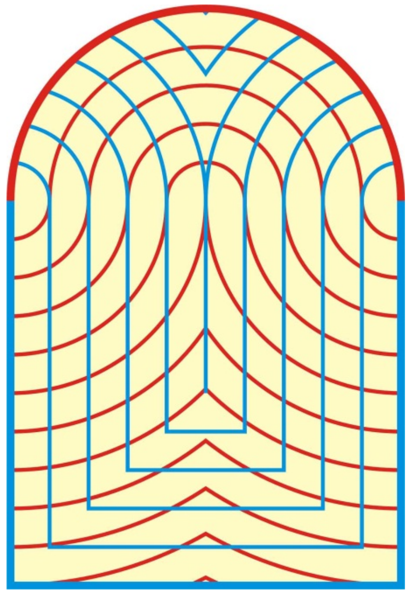
Прийоми побудови апроксимаційних просторів базисних функцій з компактним носієм, які являються криволінійними нескінченно диференційованими скінчен-ними елементами базуються на використанні математичних засобів теорії атомарних функцій [3] та теорії *R*-функцій [5]. В роботі суттєво використані результати досліджень з побудови геометрично структурованих атомарних функцій [4]. Описані підходи застосовувалися при моделюванні процесів твердіння відливка [7]. Описані математичні засоби можуть бути запропоновані при розробці числових методів для розв'язування математичних моделей в в'язко-пружному середовищі при дослідженні процесів, що виникають в дорожньому покритті при впливі на нього дорожнє-кліматичних факторів.

Формування системи ГСАФ для визначеної області

Нехай задана область $\Omega: \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, для якої знаходимо нормалізовані функції ω_1^*, ω_2^*. Ці функції дозволяють побудувати первісні системи ГСАФ для границь $\partial\Omega_1$ та $\partial\Omega_2$ вихідної області $\partial\Omega$, тобто отримуємо функції $gut^1(x, y, \omega_1^*)$, $gut^2(x, y, \omega_2^*)$. На основі алгоритму формування еквідистантних кривих [7] відносно границь $\partial\Omega_1$ та $\partial\Omega_2$ побудуємо систему таких кривих, які розташовані в середині та зовні цих границь. На рис. 1,а представлені ці криві.



а



в

Рис. 1. Визначення носіїв функцій, які описують скінченні елементи в визначеній області Ω

Крім цих кривих на рис. 1,а показана системи концентрованих кіл з центром в точках спряження ділянок вихідних границь $\partial\Omega_1$ та $\partial\Omega_2$.

Розглянемо ГСАФ для ділянок $\partial\Omega_1$ та $\partial\Omega_2$ вихідної границі $\partial\Omega$. Для ГСАФ побудованих на еквідістантних кривих (нехай k позначає номер відповідної кривої) буде виконуватись умова: $\sum_k gut_k^i(x, y, \omega_k) = 1$, де $k = 0,1,2,...,\ \ i = 1,2$.

Розглянемо добуток відповідних зсувів вихідних ГСАФ $gut^i(x,y,\omega_i)$, i=1,2:

$$Gut_{sp}(x, y) = gut_s^1(x, y, \omega_1) gut_p^2(x, y, \omega_1),$$

$s, p = 0,1,2,...$. Для точок області Ω буде виконуватись властивість:

$$\sum_s \sum_p Gut_{sp}(x, y, \omega_{i_{sp}}) = 1,$$
$$s, p = 0,1,2,..., \qquad i = 1,2.$$

На рис. 2,а та 2,б представлені дві ГСАФ з побудованих систем на основі зсувів функцій $gut^i(x,y,\omega_i)$, i=1,2, відносно відповідних ділянок $\partial\Omega_i$ границі $\partial\Omega$ вихідної області Ω. В результаті перетину даних ГСАФ формується криволінійний скінчений елемент, який має носій у вигляді перетинання носіїв ГСАФ, що його породжують. Такий криволінійний скінчений елемент може бути названий атомарним, бо він є нескінченно диференційованим та фінітним (тобто має скінчений носій).

Вид такого криволінійного скінченного елементу приведений на рис. 2,в, а на рис. 2,г показані лінії рівня отриманого елементу.

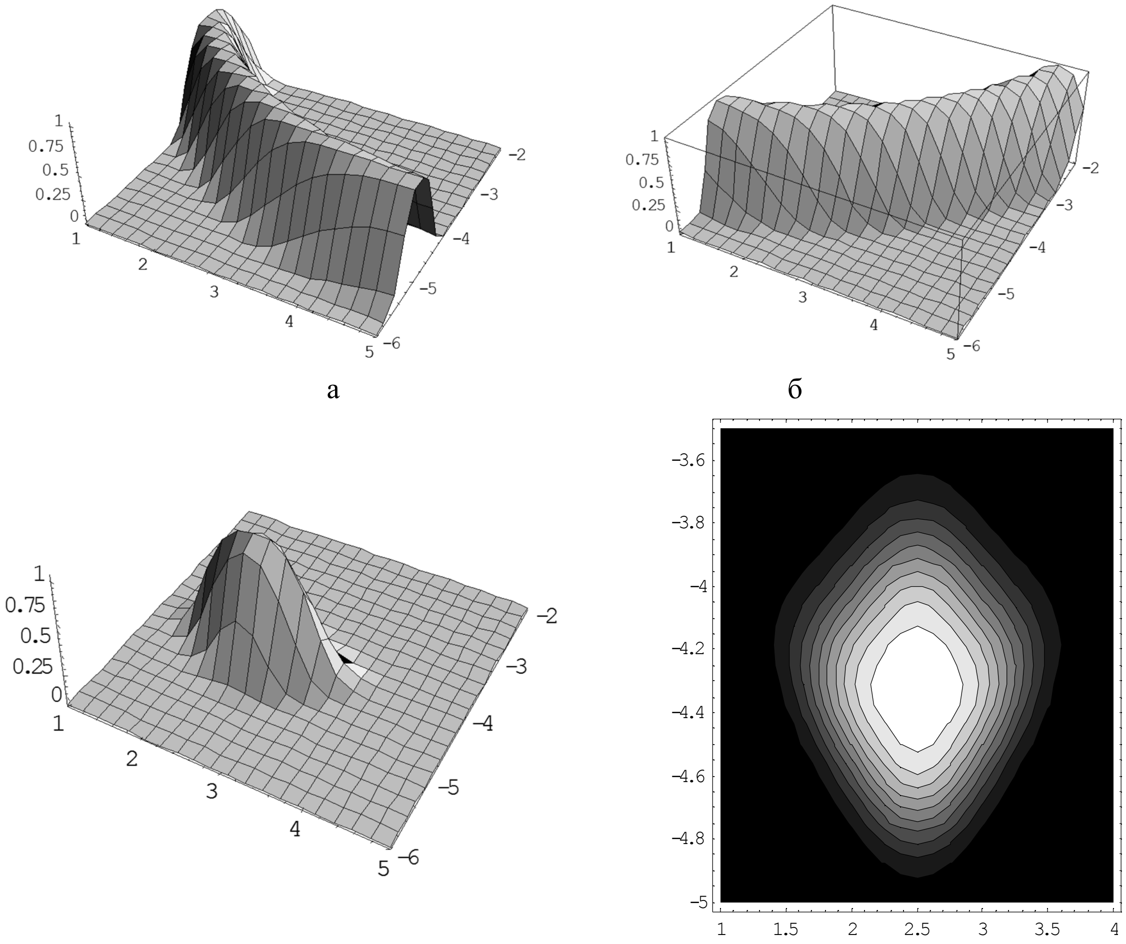


Рис.2. Побудова нескінченно диференційованого криволінійного скінченного елементу в) в результаті перетину геометрично структурованих атомарних функцій а) та б)); г) – лінії рівня отриманого криволінійного скінченного елементу

Результат пересічення двох вихідних ГСАФ описується функцією

$$Gut_{sp}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(t_1\omega_s^1+t_2\omega_p^2)]\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin t_1 2^{-k}}{t_1 2^{-k}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin t_2 2^{-k}}{t_2 2^{-k}}dt_1dt_2.$$

Відмітимо, що криволінійні елементи, які отримуються в безпосередньому контакті з вихідною границею $\partial\Omega$ мають носії, ділянки границі якого точно повторюють ділянок границі $\partial\Omega$ області Ω.

Визначена процедура побудови криволінійних скінчених елементів дозволяє здійснити для вихідної області «розбивку одиниці». На рис. 3 приведено зображення області, яка покрита зсувами ГСАФ.

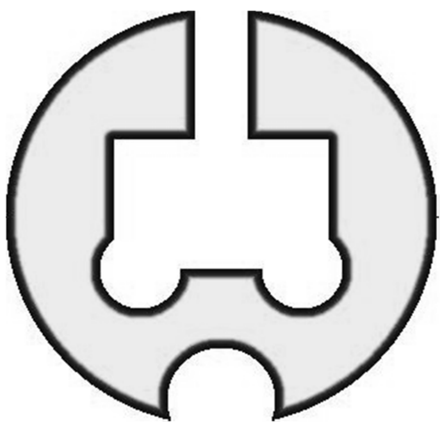
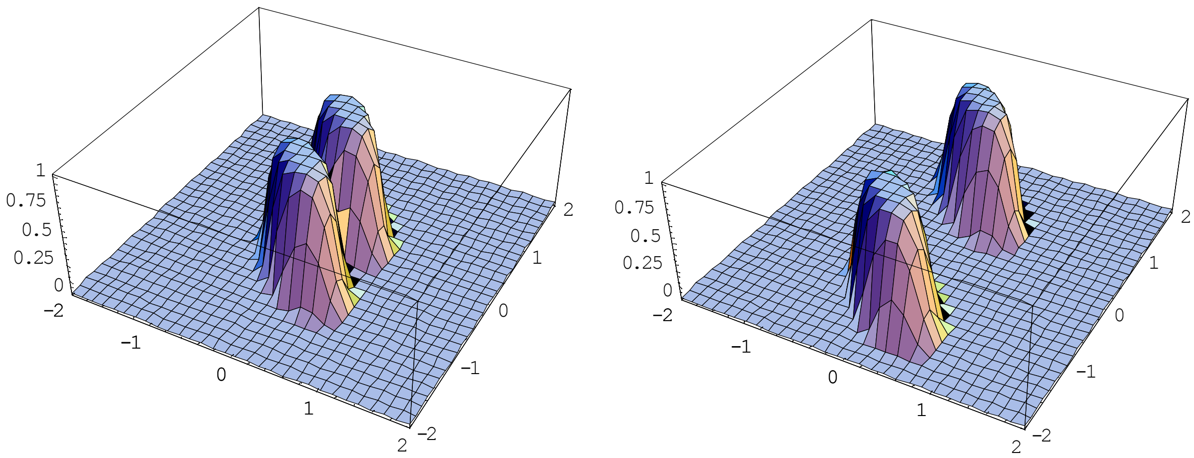


Рис. 3. Зображення області, що покрита зсувами геометрично структурованих відносно зовнішньої границі атомарних функцій

Алгоритм розбивки вихідної області на відповідні криволінійні елементи може бути реалізований на основі процедури, що дозволяє відбудовувати еквідистантні криві відносно границь геометрично складних областей [7].

На рис. 4,а і 4,б приведені приклади отриманих криволінійних скінчених елементів, які мають носії, що розташовані в різних місцях вихідної області і що вказує на можливості управління переміщеннями таких атомарних скінчених елементів.



а б

Рис. 4. Приклади управління переміщеннями атомарних скінченних елементів.

Висновки

В представленій роботі розглянута процедура побудови нескінченно диференційованих скінчених елементів з визначеною геометричною формою носія. Сукупність даних елементів, які розташовані за визначеними правилами, тобто їх носії зсунуті відносно один одного на задані відстані дозволяє реалізувати «розклад одиниці» для геометрично складної області.

Було розглянуто двовимірний випадок реалізації даної процедури (це спрощує візуалізацію алгоритмів, що розглянуті в роботі.), але її можна поширити на тривимірний випадок, який являється практично затребуваним при розробці обчислювальних методів.

На основі приведених скінчених елементів будується числовий метод на основі принципу «розкладання одиниці» розв'язування математичних моделей, а саме крайових задач математичної фізики, які описують фізичні процеси в складних областях.

Література

1. Рвачов В.Л. Про одну фінітну функцію / В.Л. Рвачов, В.О. Рвачов // ДАН УРСР. Сер. А, № 8, 1971. – С. 705-707.
2. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения //В.А. Рвачев / Успехи мат. наук. Т.45, вып. 1(271), 1990. – С. 77-103.
2. Рвачев В.Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах //В.Л. Рвачев, В.А. Рвачев / Киев: Наук. думка, 1979. – 196 с.
3. Колодяжний В.М. Геометрично структуровані атомарні функції // В.М. Колодяжний / Доповіді НАН України, № 6, 2003. – С. 12-15.
4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. // В.Л Рвачев./ Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с.
5. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей // К.В. Максименко-Шейко / Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 305 с.
6. Заславский В.А. Функциональное и алгоритмическое описание геометри-ческих особенностей фасонных отливок при моделировании литейных процессов // В.А. Заславский, В.М. Колодяжный / Кибернетика и системный анализ, № 2, 2004. – С. 161-169.

Рецензент: А.А. Тропіна, д.т.н., професор ХНАДУ.

Стаття поступила в редакцію 15 червня 2016 р.