



ВЛАСНІ ЧИСЛА ТА ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ТЕНЗОРА ГРАДІЄНТА СИЛИ ТЯЖІННЯ

Рассмотрен вопрос общего аналитического решения задачи нахождения собственных чисел и собственных векторов тензора гравитационного градиента и тензора градиента силы тяжести. Использована концепция мгновенного центра планетарного притяжения. Показано, что потенциал мгновенного центра и его производные удовлетворяют условиям уравнения Эйлера для однородных функций. Решение получено путем нахождения основных дифференциальных характеристик геометрии гравитационного поля. Результаты проиллюстрированы на примере распределения кривизны основной уровневой поверхности, вычисленной на базе модели гравитационного поля EGM2008 до 2160-й степени и порядка. Показана принципиальная возможность выделения границ современных литосферных плит типа “желоб” и “трансформный разлом” (а также зон океанических разломов) на основании данных о гравитационном поле Земли.

The problem of common analytical solution of the problem of eigenvalue and eigenvector determination for the gravitational gradient tensor and the gravity gradient tensor is considered. The conception of instantaneous center of the planetary attraction is used. It is shown that the potential of this instantaneous center and its derivatives satisfy to the Euler equation for homogeneous functions. The solution is obtained by the determination of differential geometry basic characteristics for the gravity field. The results were illustrated by curvature distribution of basic level surface calculated from the EGM2008 gravity field model up to 2160 degree and order. It is shown the fundamental possibility of the boundaries separation for present plates of the types “trench” and “transform fault” (and of oceanic fault zones) based on Earth gravity field data.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими і практичними завданнями. Огляд попередніх досліджень. Суттєве підвищення точності супутникових спостережень викликало необхідність врахування впливів різної природи на положення штучних супутників Землі (ШСЗ). Вплив несферичності або нецентральної гравітаційного поля Місяця на висотні геодинамічні супутники Землі став одним з них. Його можна просто враховувати, якщо в обчислення вводити так званий миттєвий центр C планетарної гравітації для апроксимації гравітаційного потенціалу в біжучій точці P [2,8,11,13]. До речі, в праці [8] миттєвий центр сили гравітаційного тяжіння застосовано для прискорення процесу обчислення орбіти ШСЗ з огляду на дуже велику кількість параметрів моделі точкових мас геопотенціалу. У праці [2] такий підхід було використано для підтвердження теорії руху ШСЗ. У статті [11] концепцію миттєвого центру було застосовано для врахування впливу нецентральної гравітаційного поля Місяця довільних степеня і порядку на висотні ШСЗ, включаючи супутники навігаційної системи NAVSTAR.

Незважаючи на те, що задачу обчислення компонент тензора гравітаційного градієнта L . Eötvös вперше розглянув ще у 1896 р. [6], сьогодні її актуальність породжена супутниковим експериментом GOCE з бортовим градієнтометром. Поява даних супутникової градієнтометрії GOCE та нові результати опрацювання вимірювань других похідних геопотенціалу зумовили необхідність розв'язання цієї задачі з використанням власних чисел та власних векторів тензора градієнта сили тяжіння [3].

Загальне аналітичне рішення даної задачі автору невідоме. Використаємо концепцію миттєвого центру сили гравітаційного тяжіння для знаходження головних напрямків та власних чисел тензора градієнта сили тяжіння, а також фундаментальних геометричних параметрів основної екви-

потенціальної поверхні гравітаційного поля Землі.

Виклад матеріалу дослідження. Моделювання потенціалу планети миттєвим центром гравітаційного тяжіння. Розглянемо задачу знаходження ефекту нецентральної поля для випадку гравітаційного потенціалу V Землі, відомого у формі:

$$V(P) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{N^*} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (1)$$

де \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} – повністю нормовані гармонічні коефіцієнти гравітаційного потенціалу Землі; $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ – повністю нормовані приєднані функції Лежандра степеня n і порядку m ; GM – добуток гравітаційної сталої на масу Землі; a – велика піввісь земного еліпсоїда, до якої віднесені коефіцієнти \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} ; N^* – максимальний степінь розкладу потенціалу V в ряд (1); r, φ, λ – сферичні полярні координати біжучої точки P , в якій обчислюється V .

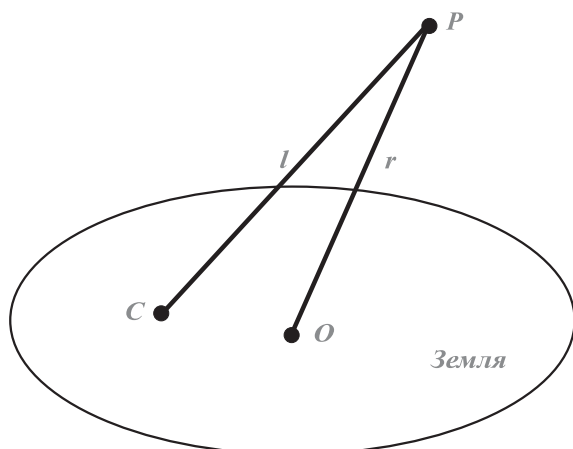
Нагадаємо, що функція V задана у геоцентричній декартовій системі координат $Oxyz$, яка тісно пов'язана з тілом планети. За виразом (1) знайдемо точне представлення потенціалу V і його перших похідних $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ у точці P на основі потенціалу однієї “ефективної” нецентральної маси (мал. 1), що розміщена у точці C :

$$V(P) = \frac{GM}{l}; \quad l = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2}. \quad (2)$$

У формулах (2) x, y, z – координати біжучої точки P ; x_c, y_c, z_c – координати нецентральної ефективної маси або миттєвого центру планетарного гравітаційного тяжіння, який розміщений у точці C . При використанні цих формул головним завданням стає визначення координат x_c, y_c, z_c . Оскільки функція V відома, то маємо одне рівняння з трьома невідомими. Для розв'язання задачі за допомогою виразу (1) знайдемо перші похідні V_x ,



V_y, V_z потенціалу V . Результат диференціювання за компонентами x, y, z набуває такої форми:



Мал. 1. До питання введення миттєвого центру C сили гравітаційного тяжіння

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial V}{\partial x} = F_x = -GM \frac{x-x_C}{l^3} = -F \cdot \cos \alpha_x; \\ V_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = F_y = -GM \frac{y-y_C}{l^3} = -F \cdot \cos \alpha_y; \\ V_z &= \frac{\partial V}{\partial z} = F_z = -GM \frac{z-z_C}{l^3} = -F \cdot \cos \alpha_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Після простих алгебраїчних перетворень одержуємо такі важливі співвідношення:

$$F(P) = \frac{GM}{l^2}; \quad \frac{V(P)}{F(P)} = l, \quad (4)$$

де l – відстань між притягуючим центром C та біжучою точкою P . Координати x_C, y_C, z_C цього центру можна знайти з рівнянь (3) і (4), приведених до такого вигляду:

$$\begin{aligned} x_C &= x + \frac{V}{F^2} V_x = x + \frac{l}{F} F_x = x + l \cdot \cos \alpha_x; \\ y_C &= y + \frac{V}{F^2} V_y = y + \frac{l}{F} F_y = y + l \cdot \cos \alpha_y; \\ z_C &= z + \frac{V}{F^2} V_z = z + \frac{l}{F} F_z = z + l \cdot \cos \alpha_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Отже, координати x_C, y_C, z_C можуть бути обчислені на основі виразів (4) і (5), а величина ефективної маси (як четвертий невідомий параметр) легко знайдена з рівняння $GM = lV(P)$. Однак навіть при застосуванні замість останнього звичної умови $GM = \text{const}$ потенціал (1) та його перші похідні збігаються зі значеннями, знайденими з виразів (2) і (3).

Формули (4) і (5) забезпечують розв'язання розглянутої оберненої задачі. Це рішення прямо залежить від положення точки P : зі зміною P змінюються і x_C, y_C, z_C . Заміна гравітаційної дії одного або кількох тіл у цій точці на дію простої точкової маси (2) забезпечує не тільки практичні переваги,

а й важливе теоретичне трактування геометрії гравітаційного поля. Застосовуючи такий підхід, ми не тільки одержуємо точні характеристики (1) реального гравітаційного поля Землі в межах закону всесвітнього тяжіння, але й трансформуємо вирази (5) у просте векторне рівняння [12]:

$$\vec{OC} = \vec{OP} + \vec{PC}, \quad (6)$$

яке можна прямо використати для опису руху ШСЗ.

Щоб проілюструвати це рівняння, має сенс розглянути три точки на мал. 1 та пов'язані з ними три вектори: O – центр інерції Землі; P – біжуча точка; C – миттєвий центр сили гравітаційного тяжіння. Перший вектор – це вектор \vec{OP} завдовжки r (відстань між точками O і P). Другий – це вектор \vec{PC} завдовжки l (відстань між точками P і C). Третій вектор \vec{OC} має довжину d (відстань між точками O і C). Після простих алгебраїчних перетворень легко помітити, що \vec{OC} є сумою двох векторів.

Згадаємо тепер, що вектор $\text{grad} V$ є нормальним до рівневої поверхні $V(P) = \text{const}$, яка проходить через точку P . У нашому випадку цей вектор має напрям \vec{PC} і довжину l . Варто звернути увагу на чудову структуру формул (2-5): гравітаційний потенціал (1) об'ємного тіла можна легко замінити потенціалом (2) миттєвого центру в рамках закону всесвітнього тяжіння. Векторне співвідношення (6) пов'язано з геометрією розташування миттєвого центру C у напрямі \vec{PC} , який проходить через точку P і збігається з $\text{grad} V$.

Ще одне геометричне трактування стосується вектора $\text{grad} T$, оскільки збурюючий потенціал $T = W - U$ фактично відображує можливе відхилення (при $T \neq 0$) одного миттєвого центру реального потенціалу сили тяжіння W відносно другого центру, що відповідає нормальному потенціалу U . Розглядаючи потенціали W і U як сумарні потенціали гравітаційної та відцентрової сил, найкраще це проілюструвати на векторі збурення сили тяжіння δg , записаному в глобальних декартових координатах:

$$\delta g = \text{grad} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \vec{C}_W \vec{C}_U. \quad (7)$$

Геометрична інтерпретація (7) пов'язана з такими трьома точками: P – біжуча точка; C_U – миттєвий центр сили тяжіння нормальної Землі; C_W – миттєвий центр сили тяжіння реальної Землі. Якщо один з векторів являє собою $\text{grad} W = \vec{PC}_W$, то другий відповідає формі $\text{grad} U = \vec{PC}_U$. Тепер добре видно, що вектор збурення сили тяжіння можна подати у формі (7) зі скалярною величиною $\delta g = g_P \cdot \gamma_P$, яка дорівнює відстані між двома миттєвими центрами C_W і C_U [12].

Тензор градієнта сили тяжіння, або тензор Етвеша, $\mathbf{W} = \mathbf{W}_t$ другої валентності традиційно розглядається у локальній топоцентричній системі координат [6, 14] і складається з тензора – девіатора гравітаційного градієнта \mathbf{V} і (3×3) діагональної



матриці Ω , яка залежить від кутової швидкості ω обертання Землі.

Розглянемо спочатку тензор-девіатор $\mathbf{V}=\mathbf{V}_E$ у глобальній координатній системі [13] і знайдемо для цього другі похідні функції (2) за координатами x, y, z :

$$\begin{aligned} V_{xx} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = GM \frac{3(x-x_C)^2 - l^2}{l^5}; \\ V_{yy} &= \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = GM \frac{3(y-y_C)^2 - l^2}{l^5}; \\ V_{zz} &= \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = GM \frac{3(z-z_C)^2 - l^2}{l^5}; \\ V_{xy} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = GM \frac{3(x-x_C)(y-y_C)}{l^5}; \\ V_{yz} &= \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = GM \frac{3(y-y_C)(z-z_C)}{l^5}; \\ V_{xz} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = GM \frac{3(x-x_C)(z-z_C)}{l^5}. \end{aligned} \quad (8)$$

які є складовими тензора гравітаційного градієнта другої валентності й традиційно записуються у формі симетричної матриці, оскільки три похідні можуть бути знайдені на основі їх симетричних властивостей: $V_{xy}=V_{yx}$, $V_{xz}=V_{zx}$, $V_{yz}=V_{zy}$. Крім того, перший інваріант $\text{Trace}(\mathbf{V}_E) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ тензора гравітаційного градієнта дорівнює нулю – як наслідок рівняння Лапласа.

Приймаючи до уваги вищесказане, після підстановки виразів (4-5) у (8) отримуємо ще одну форму запису \mathbf{V}_E :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_E &= \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{3}{V} \begin{bmatrix} F_x^2 - F^2 & F_x F_y & F_x F_z \\ F_x F_y & F_y^2 - F^2 & F_y F_z \\ F_x F_z & F_y F_z & F_z^2 - F^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Рівняння Ейлера для потенціалу миттєвого центру і його похідних. Покажемо тепер, що і функція V у формі (2) та її похідні задовольняють певні умови однорідності. Для цього згадаємо лему Ейлера, згідно з якою однорідні функції пропорційні скалярному добутку свого градієнта на вектор змінних з коефіцієнтом пропорційності, рівним степеню однорідності, що може бути зображено у такому вигляді:

$$\mathbf{r} \nabla f(\mathbf{r}) = n f(\mathbf{r}); \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \text{grad}, \quad (10)$$

де ∇ – оператор Гамільтона, а скалярна функція $f(\mathbf{r})$ залежить від векторного аргументу $\mathbf{r}=(x,y,z)^T$ і має степінь однорідності n , якщо виконується умова (10). Перевіримо вирази (10) для гравітаційної сили (4) миттєвого центру прямим обчисленням таких співвідношень:

$$\begin{aligned} (x-x_C)V_{xx} + (y-y_C)V_{yy} + (z-z_C)V_{zz} &= \\ = 2GM \frac{(x-x_C)}{l^3} &= -2F_x; \\ (x-x_C)V_{xy} + (y-y_C)V_{yy} + (z-z_C)V_{yz} &= \\ = 2GM \frac{(y-y_C)}{l^3} &= -2F_y; \\ (x-x_C)V_{xz} + (y-y_C)V_{yz} + (z-z_C)V_{zz} &= \\ = 2GM \frac{(z-z_C)}{l^3} &= -2F_z, \end{aligned} \quad (11)$$

які демонструють, що гравітаційна сила тяжіння миттєвого центру задовольняє точно всі вимоги рівняння Ейлера і має степінь однорідності $n=-2$. Використовуючи наступні позначення для різниць координат

$$\begin{aligned} \Delta x &= (x-x_C); & \Delta y &= (y-y_C); \\ \Delta z &= (z-z_C); & \Delta \mathbf{r} &= (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T, \end{aligned} \quad (12)$$

перепишемо рівняння (11) у компактнішій формі:

$$\mathbf{V}_E \Delta \mathbf{r} = \text{grad} V = \mathbf{F}, \quad (13)$$

яка тензор \mathbf{V}_E другого порядку пов'язує з вектором сили $\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)^T$ шляхом простого множення матриці \mathbf{V}_E на вектор різниць координат $\Delta \mathbf{r}$. Рівняння Ейлера (10) матиме місце і у випадку гравітаційного потенціалу (2) миттєвого центру. Перевіримо вирази (10) обчисленням таких співвідношень:

$$\begin{aligned} (x-x_C)V_x + (y-y_C)V_y + (z-z_C)V_z &= -\frac{GM}{l} = -V; \\ \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{F} &= -V, \end{aligned} \quad (14)$$

і в результаті отримуємо, що гравітаційний потенціал миттєвого центру задовольняє вимоги леми Ейлера та має степінь однорідності $n=-1$. Рівняння (14) просто пов'язує вектор $\mathbf{F}=\text{grad} V$ зі скалярною функцією V .

Таким чином, рівняння Ейлера (10) задовольняється як для функції V , так і для її похідних (3), що дає змогу об'єднати вирази (13) і (14) для точного відтворення потенціалу миттєвого центру через його перші або другі похідні:

$$V = -\Delta \mathbf{r}^T \mathbf{F} = -\Delta \mathbf{r}^T \mathbf{V}_E \Delta \mathbf{r}. \quad (15)$$

Якщо гравітаційний потенціал V та компоненти сил $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ або компоненти сил та другі похідні тензора \mathbf{v}_E – відомі величини, то співвідношення (13-15) дають змогу визначити за різними компонентами гравітаційного поля координати x_C, y_C, z_C положення миттєвого центру.

Значимо, що саме такий підхід знайшов широке застосування і в геофізиці для автоматизації процесу інтерпретації регіонального аномального поля сили тяжіння та аномального магнітного поля. Він відомий з 1972 р. [15] і отримав назву методу “оберненої згортки Ейлера”, в якому за відомими компонентами вектора градієнта $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$ збурюючого потенціалу та другими похідними l знаходять як положення, так і глибину аномальної маси в регіоні, що вивчається.



Власні числа та власні вектори тензора градієнта. Розглянемо тепер аналітичний розв'язок задачі на власні числа та власні вектори для тензора-девіатора гравітаційного градієнта (9), який дає можливість привести матрицю (9) до діагонального вигляду. Оскільки всі інваріанти (9) незалежні від лінійних перетворень системи координат, запишемо такі три інваріанти згідно з джерелом [13]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{trace} \mathbf{V}_E = 0; \\ I_2 &= -\frac{1}{2} \|\mathbf{V}_E\|_{R^3}^2 = -\frac{3F^4}{V^2} = -\frac{3F^2}{l^2} = -\frac{3V^2}{l^4}; \\ I_3 &= \frac{2F^6}{V^3} = \frac{2F^3}{l^3} = \frac{2V^3}{l^6} \end{aligned} \quad (16)$$

для розв'язання характеристичного рівняння

$$\lambda^3 + I_2\lambda - I_3 = 0. \quad (17)$$

При використанні тригонометричної форми розв'язку цього рівняння отримуємо таке значення характеристичного кута φ :

$$\varphi = \arcsin(1) = \pi/2, \quad (18)$$

а ще діагональну форму девіатора (9):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_E &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -F & 0 & 0 \\ 0 & -F & 0 \\ 0 & 0 & 2F \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -V & 0 & 0 \\ 0 & -V & 0 \\ 0 & 0 & 2V \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

і лише один власний вектор \mathbf{X}_3 :

$$\mathbf{X}_3 = F^{-1}[F_x, F_y, F_z]^T = F^{-1} \cdot \text{grad} V. \quad (20)$$

Результат з власними числами λ_3 і $\lambda_1 = \lambda_2$, поданими у виразі (19) згідно з тотожністю Гамільтона – Келлі $(\mathbf{V}_E - \lambda_3 \mathbf{I})^2 (\mathbf{V}_E - \lambda_1 \mathbf{I}) = 0$, унеможливає визначення власних векторів $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = 0$. Це зумовлено прийнятою моделлю (2). З іншого боку, відповідні похідні мають невизначеності для функції $\tan \varphi$ ($\varphi = \pm \pi/2$) при проведенні оцінювання точності у випадку застосування правила перетворення коваріацій [13].

Оскільки роль тензора градієнта сили тяжіння \mathbf{W} в геометрії гравітаційного поля важлива [6], розглянемо можливе геометричне трактування тензора гравітаційного градієнта \mathbf{V}_E (19). Спочатку знайдемо фундаментальні коефіцієнти диференціальних форм Гаусса першого $(\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G})$ і другого $(\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N})$ роду для рівневої поверхні $V(x, y, z) = V_0 = \text{const}$, яка проходить через точку P . Використовуючи формулу (2) у чистому вигляді, отримуємо важливий висновок:

$$\tilde{E} = 1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2; \quad \tilde{F} = \frac{F_x F_y}{F_z^2}; \quad \tilde{G} = 1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2; \quad (21)$$

$$\tilde{L} = \frac{F^2 - F_y^2}{F_z^2 l}; \quad \tilde{M} = \frac{F_x F_y}{F_z^2 l}; \quad \tilde{N} = \frac{F^2 - F_x^2}{F_z^2 l}, \quad (22)$$

тобто всі коефіцієнти диференціальних форм Гаусса прямо залежать від компонент сили гравітації F_x, F_y, F_z і відстані l до миттєвого центру.

Параметри $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ і одиничний вектор (20) дозволяють легко знайти ортонормальні вектори \mathbf{X}_1 і \mathbf{X}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= p^{-1}[F_z, 0, -F_x]^T; \\ \mathbf{X}_2 &= F^{-1}[-F_x F_y p^{-1}, p, -F_y F_z p^{-1}]^T; \\ p &= \sqrt{F_x^2 + F_z^2}; \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

приймаючи до уваги очевидну умову для векторного добутку $\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$. Одержані три вектори $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ рухаються разом з миттєвим центром $C = C_V$ сили гравітації та формують ортонормальну систему координат, в якій одиничний вектор сили \mathbf{X}_3 є нормальним до поверхні $V(P) = \text{const}$, а два вектора \mathbf{X}_1 і \mathbf{X}_2 знаходяться у дотичній до точки P площині. Якщо через P проходить поверхня $V(P) = \text{const}$, то гауссову кривину можна знайти з рівняння

$$K = \frac{\tilde{L}\tilde{N} - \tilde{M}^2}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = \frac{1}{l^2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{F^2}. \quad (24)$$

Середня кривина в P так само виражається через відстань l до миттєвого центру:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\tilde{E}\tilde{N} - 2\tilde{F}\tilde{M} + \tilde{G}\tilde{L}}{2(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} = \frac{1}{l} = \frac{F}{V} = -\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2F} = \\ &= \frac{\text{Сила гравітації}}{\text{Гравітаційний потенціал}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Через відсутність сингулярностей у гравітаційному полі головні кривини $k_1 \neq k_2$ еквіпотенціальних поверхонь реального потенціалу V приймаються завжди додатними і характеризують так звані поверхні еліптичного типу. В межах вибраної моделі (2) завжди отримуємо $k_1 = k_2$ ($\lambda_1 = \lambda_2$) і лише точкову апроксимацію поверхні $V(P) = \text{const}$ еліптичного типу поверхнею сферичного типу, незважаючи на точне зображення заданих функцій F_x, F_y, F_z і V моделлю (2). В результаті середня кривина при використанні моделі (2) може трактуватися як просте співвідношення (25). Радіус кривини в цьому випадку являє собою вже відому величину – відстань $l(P)$ між P і миттєвим центром $C = C_V$.

Використовуючи рівняння (9), запишемо тепер тензор градієнта сили тяжіння \mathbf{W}_E у глобальній системі координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_E &= \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{xy} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{xz} & W_{yz} & W_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \omega^2 & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \omega^2 & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$



Легко помітити, що перший інваріант (26) завжди приймає ненульове значення:

$$\chi = \text{Trace}(\mathbf{W}_E) = 2\omega^2. \quad (27)$$

Тому для розв'язання задачі на власні числа необхідно побудувати девіатор $\text{dev}(\mathbf{W}_E)$ [1], використовуючи для цього вирази (26) і (27). У результаті матимемо:

$$\text{dev}(\mathbf{W}_E) = \frac{3}{V} \begin{bmatrix} 3F_x^2 - F^2 + \omega^2 V/3 & F_x F_y & F_x F_z \\ F_x F_y & 3F_y^2 - F^2 + \omega^2 V/3 & F_y F_z \\ F_x F_z & F_y F_z & 3F_z^2 - F^2 + \omega^2 V/3 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

тобто девіатор, який дає змогу отримати рішення поставленої задачі для \mathbf{W}_E . Тепер неважко визначити інваріанти (28):

$$I_1 = \text{trace}(\text{dev}(\mathbf{W}_E)) = 0; \\ I_2 = -\frac{1}{2} \|\text{dev}(\mathbf{W}_E)\|_{R^3}^2 = -\frac{3F^4}{V^2} - \frac{\omega^2(F^2 - 3F_z^2)}{V} - \frac{\omega^4}{3}; \\ I_3 = \frac{2F^6}{V^3} + \frac{F^2\omega^2(F^2 - 3F_z^2)}{V^2} - \frac{\omega^4(F^2 - 3F_z^2)}{3V} - \frac{2\omega^6}{27} \quad (29)$$

для вирішення кубічного характеристичного рівняння (17). Порівнявши інваріанти (29) і (16), розуміємо, що випадок (29) значно складніший, тому зможемо отримати лише наближений розв'язок, обмежуючись квадратами кутової швидкості Землі. При використанні тригонометричної форми розв'язку дістанемо таке значення характеристичного кута φ :

$$\varphi = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}\omega^2 V(F^2 - F_z^2)}{2F^4}, \quad (30)$$

а приведення матриці (26) до діагональної форми дає такий результат:

$$\mathbf{W}_E = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{l} + \frac{\omega^2 F_z^2}{F^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{l} + \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2F}{l} + \frac{\omega^2(F^2 - F_z^2)}{F^2} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Незважаючи на наближений характер елементів матриці (31), завжди витримується умова $\chi = \text{Trace}(\mathbf{W}_E) = 2\omega^2$, а всі корені $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ – на відміну від (19).

Таким чином, результат (31) знаходження власних чисел недевіаторної матриці (26) дуже близький до випадку тензора гравітаційного градієнта. Головні відмінності між (31) та (19) характеризуються відношеннями компонент гравітаційної сили до її значення F на квадрат кутової швидкості обертання Землі. Як і раніше, ми просто знаходимо лише одиничний власний вектор \mathbf{X}_3 :

$$\mathbf{X}_3 = g^{-1}[g_x, g_y, g_z]^T = g^{-1} \cdot \text{grad} W, \quad (32)$$

який має добре відомі фізичні та математичні властивості й традиційно виражається через градієнт потенціалу сили тяжіння. Як і в першому випадку, після знаходження коефіцієнтів диференціальної форми Гауса першого роду та одиничного вектора (32) отримуємо ортонормальні вектори \mathbf{X}_1 і \mathbf{X}_2 :

$$\mathbf{X}_1 = p^{-1}[g_z, 0, -g_x]^T; \\ \mathbf{X}_2 = g^{-1}[-g_x g_y p^{-1}, p, -g_y g_z p^{-1}]^T; \\ p = \sqrt{g_x^2 + g_z^2}, \quad g = |g| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}. \quad (33)$$

При цьому приймаємо до уваги, що $\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$. Одержані три вектори ($\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$) рухаються разом з іншим миттєвим центром $C = C_W$ сили тяжіння і формують ортонормальну натуральну топоцентричну систему координат, в якій одиничний вектор сили тяжіння $g = \mathbf{X}_3$ є нормальним до поверхні геоїда $V(P) = \text{const}$, а два інших вектори (\mathbf{X}_1 і \mathbf{X}_2) знаходяться у дотичній до точки P площині, за рахунок чого система ($\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$) являє собою астрономічну систему координат. У виразах (33) прийнято такі значення коефіцієнтів диференціальних форм Гауса першого ($\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$) і другого ($\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$) роду для поверхні $W(x, y, z) = W_0 = \text{const}$, яка проходить через точку P :

$$\tilde{E} = 1 + \left(\frac{g_x}{g_z}\right)^2; \quad \tilde{F} = \frac{g_x g_y}{g_z^2}; \quad \tilde{G} = 1 + \left(\frac{g_y}{g_z}\right)^2; \quad (34)$$

$$\tilde{L} = \frac{F \cdot (g^2 - g_y^2)}{g \cdot g_z^2 l} - \frac{\omega^2}{g} - \frac{3\omega^4 x^2}{Fgl}; \\ \tilde{M} = \frac{F \cdot g_x g_y}{g \cdot g_z^2 l}; \quad \tilde{N} = \frac{F \cdot (g^2 - g_x^2)}{g \cdot g_z^2 l} - \frac{\omega^2}{g} - \frac{3\omega^4 y^2}{Fgl}. \quad (35)$$

Формули (34) і (35) залежать від компонент сили тяжіння, компонент сили гравітації та відстані l до миттєвого центру $C = C_V$. Після необхідних аналітичних перетворень вони дають змогу знайти гауссову і середню кривини поверхні геоїда $W(x, y, z) = W_0 = \text{const}$ у такому вигляді:

$$K = \frac{F^2}{g^2 l^2} - \frac{F\omega^2 \cdot (g^2 + g_z^2)}{g^4 l} - \frac{\omega^4 [3x^2(g^2 - g_x^2) + 3y^2(g^2 - g_y^2) - g_z^2 l^2]}{g^4 l^2}; \quad (36)$$

$$J = \frac{F}{gl} - \frac{\omega^2 \cdot (g^2 + g_z^2)}{2g^3} - \frac{3\omega^4 [x^2(g^2 - g_x^2) + y^2(g^2 - g_y^2)]}{2Fg^3 l}. \quad (37)$$

Якщо для середньої кривини отримано точну формулу (37), то співвідношення (36) для гауссової кривини є точним до четвертого степеня кутової швидкості Землі. Після обчислення середньої



кривини J загального земного еліпсоїда за формулою (37) отримуємо максимальну методологічну похибку в 0,1 %, яка оцінена порівнянням (37) з середньою кривиною еліпсоїда обертання, визначеною за відомим співвідношенням $J=(1/N+1/M)$, в якому N і M – радіуси кривини у першому вертикалі та меридіані.

Кривина рівневої поверхні та межі літосферних плит. Згадаємо рівняння Брунса щодо зміни сили тяжіння g з висотою H^* (ортометрична висота) [14]:

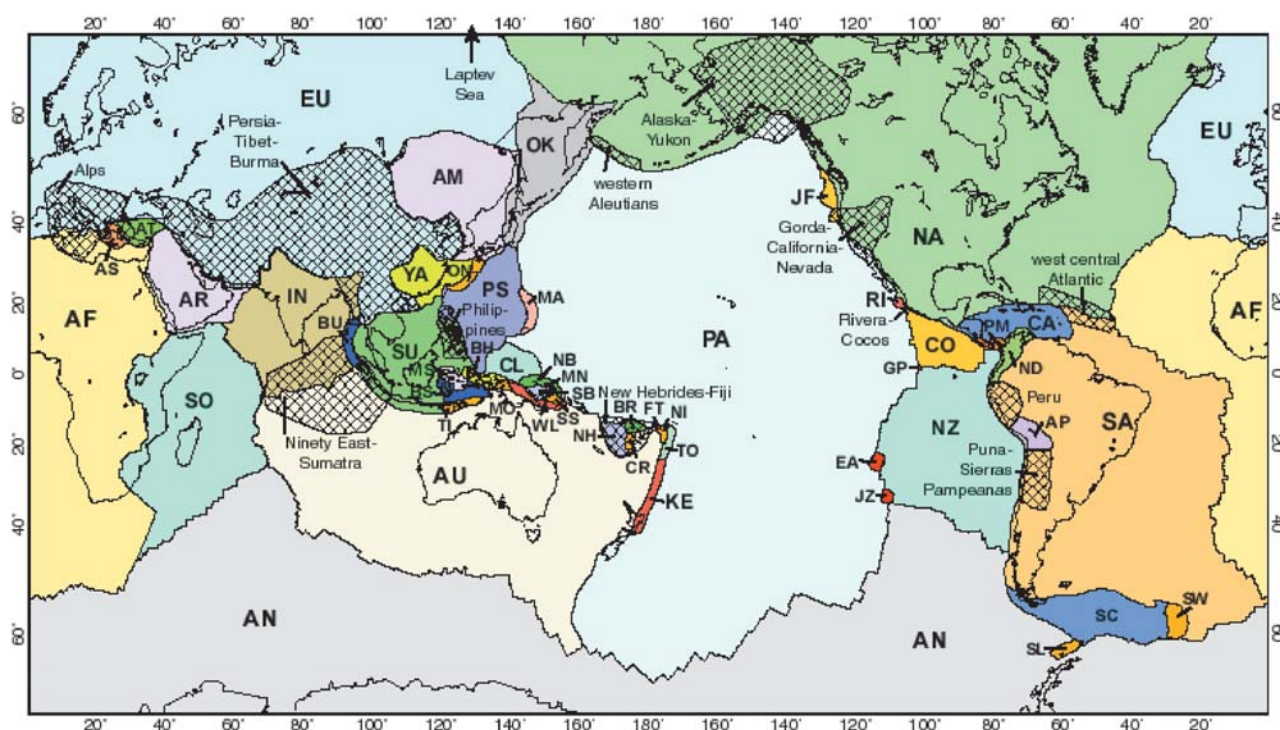
$$\frac{\partial g}{\partial H^*} = -2gJ + 4\pi G\delta - 2\omega^2, \quad (38)$$

в якому середня кривина J рівневої поверхні є геометричною характеристикою поверхні геоїда $W(P)=\text{const}$, δ (як густина планети) – це фізичний параметр, а ω (як кутова швидкість Землі) – астрономічна характеристика. Як швидкість, параметр (38) залежить головним чином від кривини J (всі інші величини правої частини рівняння (38) на поверхні геоїда змінюються мало). Саме тому слід приділити особливу увагу основним особливостям фігури геоїда і додатково вивчити кореляцію між його кривиною та розподілом земної поверхні на тектонічні плити (мал. 2). Оскільки різниці максимального та мінімального значень кривин як у випадку із загальноземним еліпсоїдом, так і у випадку з поверхнею $W(P)=\text{const}$ будуть найбільшими при використанні формул (36) і (37), то для уникнення фонового внеску відцентрової сили Φ далі братимемо до уваги лише кривину рівневої поверхні $V(P)=\text{const}$. Скористаємось формулами

(24) і (25), врахувавши, що параметр K є чутливішою характеристикою, ніж середня кривина J поверхні $V(P)=\text{const}$.

У ході порівняння меж моделей літосферних плит з особливостями гравітаційного поля планети використовують переважно дані про аномалії сили тяжіння Δg , отриманих для океанів супутниковими методами [5, 17]. Однак величини Δg або інші геодезичні функціонали відображують особливості топографії та батиметрії лише в різних трансформантах збурюючого або аномального потенціалу T , які уведено відносно нормального потенціалу еліпсоїда обертання. Розглянуті нижче середня та гауссова кривини, на відміну від традиційних трансформант, не пов'язані з еліпсоїдом обертання, а є інваріантними характеристиками гравітаційного поля планети. При достатньому рівні деталізації даного поля можна очікувати відповідні висновки відносно застосування цих кривин для вивчення, диференціації та уточнення меж нових тектонічних плит.

Нагадаємо, що лише через 50 років після озвучення А. Л. Вегенером гіпотези про “дрейф континентів” кінематика літосферних плит знайшла своє реальне підтвердження як результат вивчення в 60-х роках XX ст. різних геологічних структур в океанах. Зокрема, визнання факту наявності в Атлантичному океані серединно-океанічних хребтів з рифтовими долинами дозволило висунути гіпотезу спредінга (конвекції в мантії під цими хребтами) як рушійної сили тектоніки плит, а відкриття смугових магнітних аномалій океанічної кори стало першим важливим доказом на користь

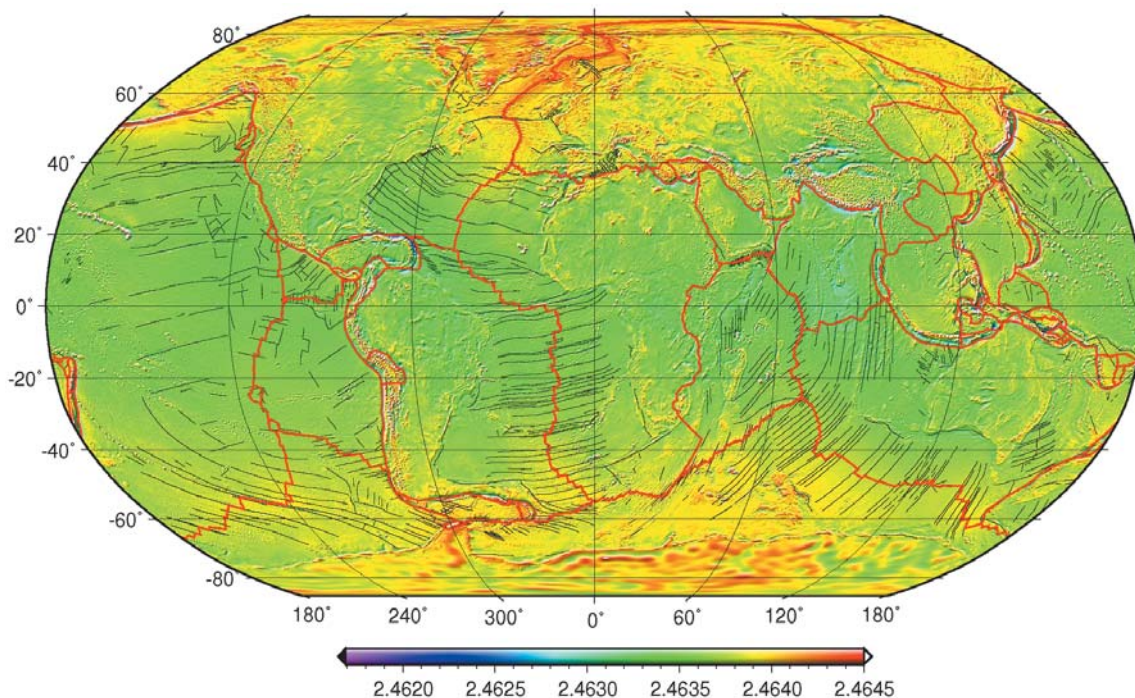


Мал. 2. Модель РВ2002 52-х тектонічних плит

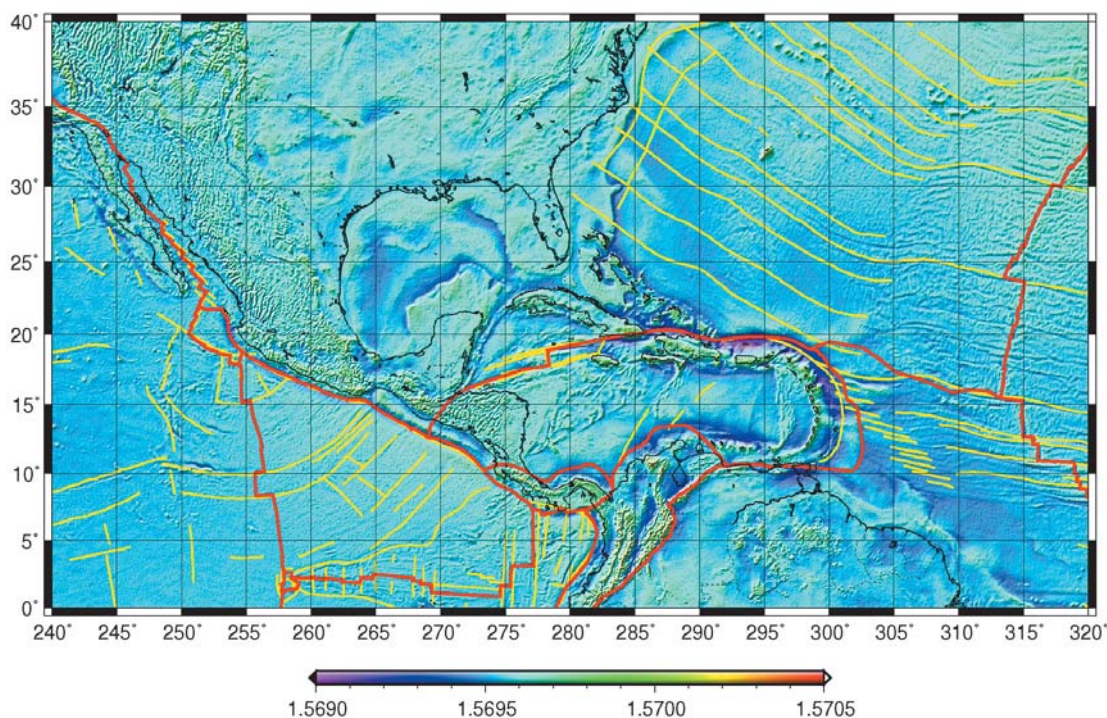


цієї гіпотези. Однак лише після впровадження високоточних супутникових технологій типу SLR та GNSS виникла можливість прямих вимірювань кінематики літосферних плит. Крім того, теорія спредінга, мабуть, і не знайшла б свого підтвердження без системного вивчення і побудови моделей світової топографії та батиметрії в рамках Міжнародної асоціації геодезії (IAG). Таким чи-

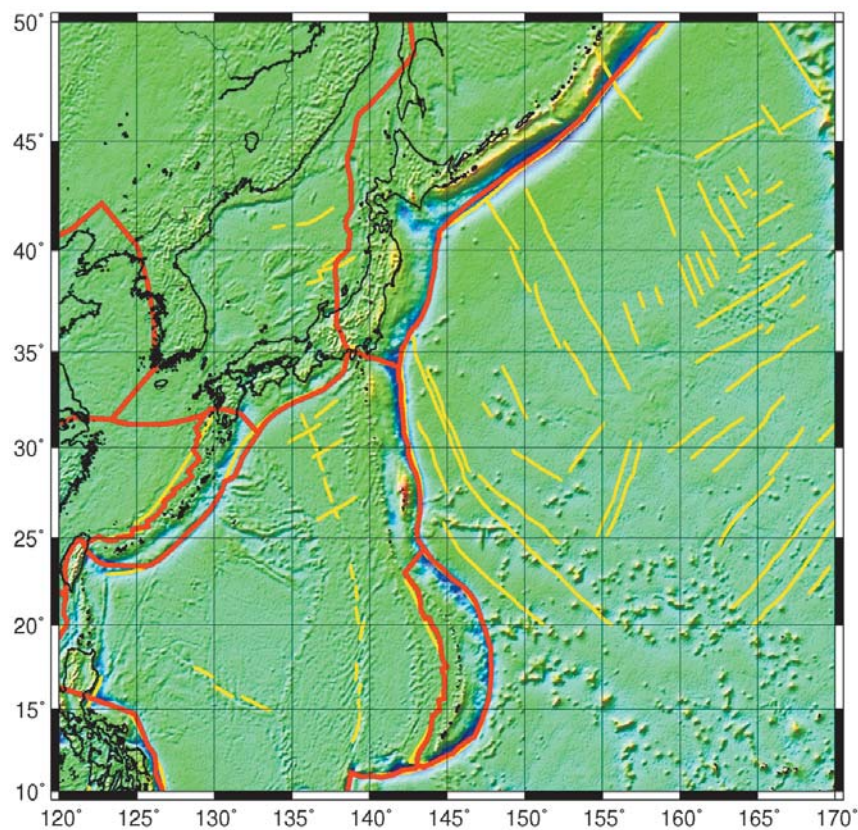
ном, методи супутникової та наземної геодезії фактично дають змогу розв'язувати задачі побудови моделей тектоніки плит за рахунок моніторингу гравітаційного поля Землі, її рельєфу і швидкостей руху земної кори [7, 9, 10]. Мал. 2 демонструє модель 52-х тектонічних плит PB2002 [4], яку прийнято для порівняння і яка є уточненням стандартної моделі NUVEL-1A.



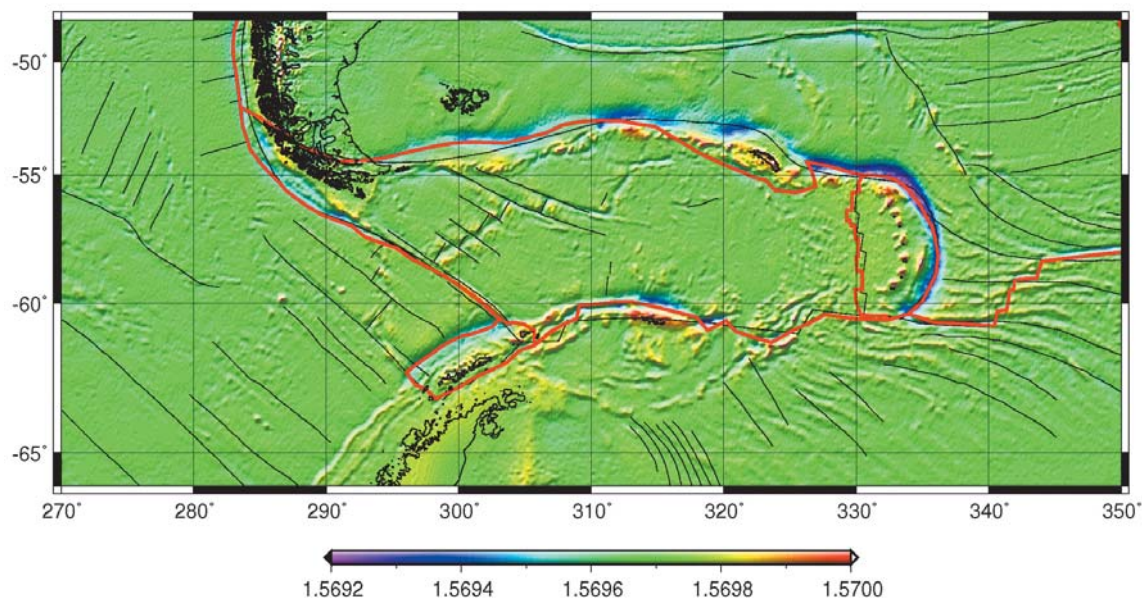
Мал. 3. Гауссова кривина $K \cdot 10^{14}$ [1/м²] поверхні $V=const$, межі тектонічних плит (—) і зони океанічних розломів (—) згідно з моделлю PB2002



Мал. 4. Середня кривина $J \cdot 10^7$ [1/м] поверхні $V=const$, межі тектонічних плит (—) і зони океанічних розломів (—) згідно з моделлю PB2002 в регіоні Карибської плити і плити Кокос



Мал. 5. Те саме в регіоні Філіппінської та Охотської плит



Мал. 6. Те саме в регіоні плити Скотія

З 2008 р. найдетальнішу інформацію для обчислення трансформант збурюючого потенціалу T дає модель гравітаційного поля EGM2008 [16]. Для побудови моделі EGM2008 вперше було використано аномалії сили тяжіння Δg з деталізацією поля ($5' \times 5'$), що відповідає 2160-му степеню і порядку розкладу V в ряд (1). Зауважимо, що при побудові

моделі EGM2008 приблизно 12 % площі континентів, включаючи Антарктиду, не було покрито вимірами Δg . У ній білі плями заповнювалися на основі згладжених супутникових даних GRACE. У нашому випадку модель EGM2008 було використано у формулах (24) і (25) для обчислення середньої J та гауссової K кривин еквіпотенціальної поверхні



$V(P)=\text{const}$. Зазначимо, що всі особливості поверхні $V(P)=\text{const}$, які відображено на мал. 3 у формі розподілу кривини K , повністю збігаються з більшістю меж моделі 52-х тектонічних плит [4]. Ще більша кореляція спостерігається між особливостями поверхні $V(P)=\text{const}$ та зонами океанічних розломів.

Малюнки 4-6 передають цю кореляцію ще яскравіше. За тестові регіони обрано характерні для максимального і мінімального значень кривин регіони Карибської, Філіппінської та Охотської плит, а також район плити Скотія, тобто області, в яких необхідно провести детальнішу диференціацію та уточнити простягання інших тектонічних плит [4].

Висновки. У дослідженні доведено доцільність розв'язання проблеми власних чисел і власних векторів тензору гравітаційного градієнта на основі концепції миттєвого центру тяжіння. З методологічної точки зору отримані результати мають особливу цінність для встановлення природним шляхом топоцентричної системи координат і обчислення геометричних характеристик гравітаційного поля Землі, зокрема основної рівневої поверхні планети. Проілюстрований у статті високий степінь кореляції між межами тектонічних плит і регіональними особливостями кривин поверхні $V=\text{const}$ свідчить про те, що може бути знайдено рішення задачі інтерпретації за рахунок сумісного використання даних про сейсмічну активність планети, топографії/батиметрії тощо. Для цього передусім необхідно дати відповідь на питання: межі яких типів найбільше корелюються зі змінами кривини поверхні $V=\text{const}$. Мал. 3 відображує три відомі типи меж тектонічних плит (жолоб, хребет, трансформний розлом) і дає підстави для таких висновків.

- Межі типу “жолоб” і “трансформний розлом” добре корелюються з особливостями поверхні $V=\text{const}$. Їх можна виділити на основі відомостей про кривину поверхні геоїда. На малюнку їм відповідають головним чином локальні мінімуми і меншою мірою – локальні максимуми значень J і K . У регіональному зрізі цей висновок дуже добре підтверджується змістом мал. 4 (глобальний максимум і глобальний мінімум кривин у регіоні Карибської плити), мал. 5 (мінімальне значення кривин у районі Маріанського жолоба) і мал. 6 (локальний максимум і локальний мінімум кривин у регіоні плити Скотія).

- Малюнки 3-6 дають підставу для висновку про надійність інструменту знаходження зон океанічних поперечних розломів лише на основі особливостей кривини поверхні $V=\text{const}$.

- Межі типу “хребет” можуть виділятися або не виділятися за даними про кривину поверхні геоїда. Наприклад, як засвідчує мал. 3, межі всіх плит, які проходять по Серединно-Атлантичному хребту, є очевидними. Однак, східну межу Східнотихоокеанського підняття, яке має спільні межі з плитами Кокос і Наска, не може бути знайдена лише за даними про J і K . Зауважимо, що в першому випадку маємо справу з таким хребтом, особливості

якого – рифтові зони. Східнотихоокеанське підняття вирізняється не зовсім чітко вираженими рифтовими долинами, що, безперечно, впливає на особливості гравітаційного поля, які проявляються в значеннях J і K .

Отже, дослідження кривини поверхні $V=\text{const}$ сприяє детальному вивченню особливостей поверхні геоїда і частково розв'язанню задачі стосовно виділення меж сучасних літосферних плит. Як свідчать автори публікацій [7, 10, 11], побудова тензора швидкостей деформацій дає змогу визначити межі тектонічних плит на основі застосування його інваріантів. Оптимальним при цьому буде сумісне використання значень J і K , даних про топографію, батиметрію та GNSS-визначеного поля швидкостей горизонтальних рухів земної кори для диференціації та уточнення меж сучасних літосферних плит.

Література

1. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления [Текст] / Н.Е. Кочин. – М.: Наука, 1951. – 427 с.
2. Мещеряков, Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля [Текст] / Г.А. Мещеряков. – М.: Наука, 1991. – 215 с.
3. Albertella, A. GOCE: The Earth Gravity Field by Space Gradiometry [Текст] / A. Albertella, F. Migliaccio, F. Sanso // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2002. – Vol. 83. – P. 1-15.
4. Bird, P. An updated digital model of plate boundaries [Текст] / P. Bird // Geochemistry Geophysics Geosystems. – 2003. – Vol. 4. – № 3. – P. 1-52.
5. Eagles, G. Opening history of Powell Basin, Antarctic Peninsula [Текст] / G. Eagles, R. A. Livermore // Marine Geology. – 2002. – Vol. 185. – P. 195-205.
6. Eotvos, L. Studies in the field of gravity and magnetism [Текст] / L. Eotvos // In: “Three fundamental papers of Lorand Eotvos” (1896), Transl. from Hungarian, ELGI. – Budapest, 1998. – P. 83-125.
7. Haines, A.J. A procedure for obtaining the complete horizontal motions within zones of distributed deformation from the inversion of strain rate data [Текст] / A. J. Haines, W. E. Holt // J. Geophys. Res. – 1993. – Vol. 98. – P. 12057-12082.
8. Heikkinen, M. Solving the Shape of the Earth by Using Digital Density Models [Текст] / M. Heikkinen // Rept. of the Finnish Geod. Inst. – Helsinki, 1981. – № 81:2. – 69 p.
9. Kreemer, C. On the determination of a global strain rate model [Текст] / C. Kreemer, J. Haines, W. E. Holt, et al. // Earth Planets Space. – 2000. – Vol. 52. – P. 765–770.
10. Kreemer, C. An integrated global model of present-day plate motions and plate boundary deformations [Текст] / C. Kreemer, W. E. Holt, J. Haines // Geophys. J. Int. – 2003. – Vol. 154. – P. 8-34.
11. Marchenko, A.N. On the influence of the Moon's gravitational field on the motion of the artificial satellites [Текст] / A.N. Marchenko // Manuscripta Geodaetica. –



1991. – Vol. 16. – No 6. – P. 360-366.

12. *Marchenko, A.N.* Parameterization of the Earth's Gravity Field: Point and Line Singularities [Tekst] / A.N. Marchenko // Published by Lviv Astronomical and Geodetic Society. – Lviv, Ukraine, 1998. – 210 p.

13. *Marchenko, A.N.* A note on the eigenvalue – eigenvector problem [Tekst] / A.N. Marchenko // In: Kühtreiber N. (Ed.), Festschrift dedicated to Helmut Moritz on the occasion of his 70th birthday. – Graz University of Technology. – 2003. – P. 143-154.

14. *Moritz, H.* Geometry, Relativity, Geodesy [Tekst] / H. Moritz, B. Hofmann-Wellenhof. – Wichmann, Karlsruhe. – 1993. – 367 p.

15. *Nabighian, M. N.* The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-sections: Its properties and use for automated anomaly interpretation [Tekst] / M. N. Nabighian // Geophysics. – 1972. – Vol. 37. – P. 507-517.

16. *Pavlis, N.K.* An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008 [Tekst] / N.K. Pavlis, S.A. Holmes, S.C. Kenyon, J.K. Factor // Geophysical Research Abstracts. – 2008. – Vol. 10. EGU2008-A-01891, 2008, EGU General Assembly, 2008.

17. *Polonia, A.* Antarctic/Scotia plate convergence off southernmost Chile [Tekst] / A. Polonia, L. Torelli // Geologica Acta. – 2007. – Vol. 5, No. 4. – P. 295-306.

Надійшла 12.01.10

* * *

КАЛЕНДАР ПОДІЙ

Назва заходу	Дата і місце проведення	Веб-сайт
XIV конференція користувачів ГС від ESRI „Інформаційні технології в управлінні територіальним розвитком”	м. Ялта, 24-28 травня 2010 р.	http://www.ecomm.kiev.ua/index.php?option=com_content&task=section&id=10&Itemid=248
58-й з'їзд німецьких картографів	Німеччина, м. Берлін та Потсдам, 8-10 червня 2010 р.	http://dkt2010.dgfk.net/
3-тя Міжнародна конференція з картографії та ГС (регіональний симпозиум для Центральної та Східної Європи)	Болгарія, м. Несебір, 15-20 червня 2010 р.	http://www/Cartography-GIS.com
Конференція INSPIRE “INSPIRE як основа співробітництва”	Польща, м. Краків, 22-25 червня 2010 р.	http://inspire.jrc.ec.europa.eu/events/conferences/inspire_2010/contact.cfm
ІнтерКарто – ІнтерГІС – 16	Російська Федерація, м. Ростов-на-Дону, 3-4 липня 2010 р. Австрія, м. Зальцбург, 6-8 липня 2010 р.	http://www.ssc-ras.ru (Ростов-на-Дону) http://www/intercartogis.org (Зальцбург)
IV Всеукраїнська науково-практична конференція “Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку-2010” (Національне картографування-2010)	м. Київ, 30 вересня – 1 жовтня 2010 р.	http://www.ukrmap.com.ua/index.php?name=News&op=Article&sid=55
Франкфуртський книжковий ярмарок	Німеччина, м. Франкфурт-на-Майні, 6-10 жовтня 2010 р.	http://www.buchmesse.de
34-та Національна картографічна конференція „Стан та перспективи польської картографії”	Польща, м. Варшава, 21-22 жовтня 2010 р.	Детальна інформація – katarzyna.przyszevska@gugik.gov.pl