



## Література

1. Бровар, В.В. Теория фигуры Земли [Текст] / В.В. Бровар, В.А. Магницкий, Б.П. Шимбирев. – М.: Геодезлит, 1961. – 256 с.
2. Вировец, А.М. Высшая геодезия [Текст] / А.М. Вировец. – В 2 ч. – М.: Недра, 1970. – Ч. 1. – 248 с.
3. Волосов, П.С. Судовые комплексы спутниковой навигации [Текст] / П.С. Волосов, Ю.С. Дубинко, Б.П. Мординов, В.Д. Шинков. – Л.: Судостроение, 1983. – 272 с.
4. Грушинский, Н.П. Теория фигуры Земли [Текст] / Н.П. Грушинский. – М.: Недра, 1976. – 512 с.
5. Державний стандарт України. Геодезія. Терміни та визначення. ДСТУ 2393-94. – К.: Держстандарт, 1994. – 64 с.
6. Дурнев, В.И. Высшая геодезия [Текст] / В.И. Дурнев. – М.: Недра, 1967. – 206 с.
7. Еремеев, В.Ф. Теория ортометрических, динамических и нормальных висот [Текст] / В.Ф. Еремеев // Тр. ЦНИИГАиК. – 1951. – Вып. 86. – С. 11-50.
8. Еремеев, В.Ф. Несколько замечаний о вычислении нивелирных висот в зарубежных странах [Текст] / В.Ф. Еремеев // Геодез. и картогр. – 1964. – № 1. – С. 52-60.
9. Еремеев, В.Ф. Теория висот в гравитационном поле Земли [Текст] / В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина // Тр. ЦНИИГАиК. – 1972. – Вып. 191. – 215 с.
10. Закатов, П.С. Курс высшей геодезии [Текст] / П.С. Закатов. – М.: Недра, 1976. – 511 с.
11. Зданович, В.Г. Высшая геодезия [Текст] / В.Г. Зданович, А.Н. Белоликов, Н.А. Гусев, К.А. Звонарев. – М.: Недра, 1970. – 512 с.
12. Молоденский, М.С. Изучение фигуры физической поверхности Земли геометрическим (астрономо-геодезическим) методом [Текст] / М.С. Молоденский // Тр. ЦНИИГАиК. – 1950. – Вып. 75. – С. 3-10.
13. Молоденский, М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии [Текст] / М.С. Молоденский // Тр. ЦНИИГАиК. – 1945. – Вып. 42. – С. 10-60.
14. Молоденский, М.С. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли [Текст] / М.С. Молоденский, В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина // Тр. ЦНИИГАиК. – 1960. – Вып. 131. – 252 с.
15. Неумывакин, Ю.К. Земельно-кадастровые геодезические работы [Текст] / Ю.К. Неумывакин, М.И. Перский. – М.: Колос, 2005. – 184 с.
16. Староверов, В.С. Вища геодезія [Текст] / В.С. Староверов. – К.: «ВПОЛ», 1996. – 204 с.
17. Хаимов, З.С. Основы высшей геодезии [Текст] / З.С. Хаимов. – М.: Недра, 1984. – 360 с.
18. Шимбирев, Б.П. Теория фигуры Земли [Текст] / Б.П. Шимбирев. – М.: Недра, 1975. – 432 с.
19. Яковлев, Н.В. Высшая геодезия [Текст] / Н.В. Яковлев. – М.: Недра, 1989. – 445 с.

Надійшла 01.11.10

\* \* \*

УДК 528.48

М. П. Марущак

СПОСОБИ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО НІВЕЛЮВАННЯ  
ЕЛЕКТРОННИМ ТАХЕОМЕТРОМ

*Рассмотрены способы тригонометрического нивелирования электронным тахеометром, дающие возможность определять наклонное расстояние, вести измерения зенитных углов на две или три точки базиса, расположенные вертикально на вешке отражателя. Это позволяет по результатам уравнивания определять поправки к измеренным углам и линиям и таким образом повышать точность нивелирования. Описан пример расчета поправок.*

*The paper deals with the methods of trigonometric leveling by electronic tacheometer, that allow to measure slope distances and zenith angles at two or three points of a basis, which are located vertically on the range pole of a reflector. This allows to determine corrections to the measured angles and lines on the basis of the equalization results, and thus to improve the accuracy of leveling. The example of the corrections calculation is given.*

Сучасні електронні тахеометри використовуються в інженерних вишукуваннях, у будівництві, в архітектурі, при спостереженні за деформаціями будівель і споруд, при виконанні кадастрових та інших робіт. Застосування цих приладів значно підвищує продуктивність праці, спрощує процес оброблення польових даних, виключає помилки відлічування, скорочує час на камеральні роботи.

При визначенні перевищень між пунктами електронним тахеометром застосовується спосіб тригонометричного нівелювання. Цей вид нівелювання за продуктивністю значно переважає геометричний,

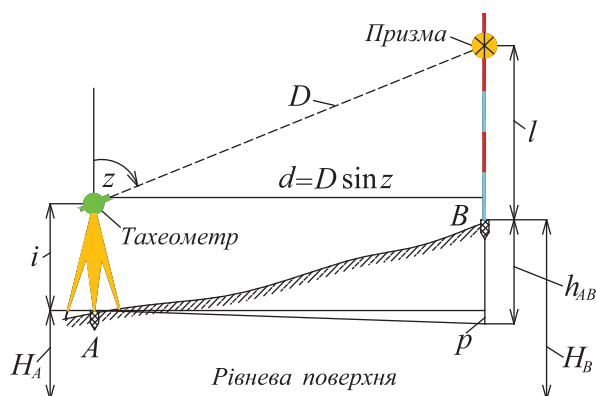
але поступається йому за точністю. Основними причинами цього є помилки вимірювання вертикального кута, відстані, висоти візирної цілі та приладу, а також вплив зовнішнього середовища.

При односторонньому нівелюванні на пунктах А і В встановлюють тахеометр і відбивач (мал. 1). Вимірюють похилу довжину лінії D, зенітний кут z, висоти відбивача l та приладу i. Перевищення між пунктами обчислюють за формулою [1]

$$h_{AB} = D \cos z + i - l + \frac{1-k}{2R} (D \sin z)^2, \quad (1)$$

де k – коефіцієнт рефракції (для Європи k=0,13); D – виміряна відстань; R – радіус Землі.

© М. П. Марущак, 2010



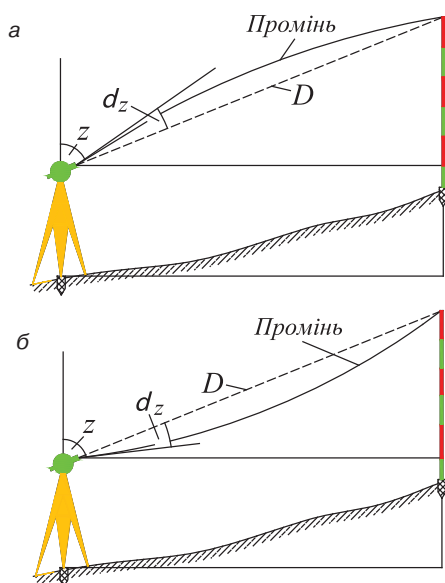
Мал. 1. Схема одностороннього тригонометричного нівелювання

Середню квадратичну похибку (СКП) перевищення, розрахованого за формулою (1) без врахування похибки поправки за кривину Землі та рефракцію, можна обчислити з виразу

$$m_h = \sqrt{\left(h_{AB} \frac{m_D}{D}\right)^2 + \left(D \sin z \frac{m_Z}{\rho}\right)^2 + m_i^2 + m_l^2}, \quad (2)$$

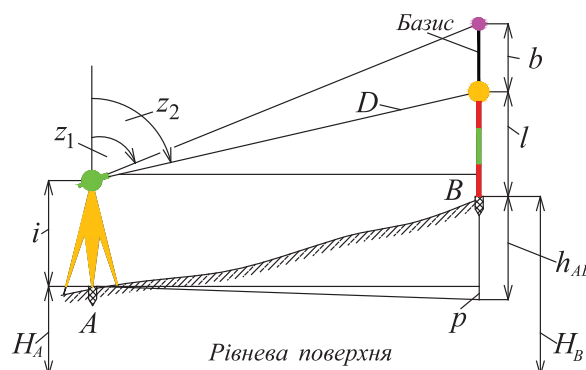
де  $m_D$ ,  $m_Z$ ,  $m_i$ ,  $m_l$  – СКП вимірювання відповідно довжини лінії, зенітного кута, висоти приладу і відбивача.

Прийнявши  $D = 200$  м,  $m_D/D = 1/10\,000$ ,  $z = 87^\circ$ ,  $m_Z = 2''$ ,  $m_i = m_l = 0,5$  мм і підставивши в (2) ці числові значення, одержимо:  $m_h = 2,3$  мм. Розрахована величина похибки свідчить про те, що одностороннє тригонометричне нівелювання виконується з достатньою точністю. Але на практиці під впливом сонячної радіації та інших природних факторів стан атмосфери постійно змінюється, що призводить до рефракції візирного променя (мал. 2) і, як наслідок, до появи значних похибок ( $\delta_z = 45''$ ) при вимірюванні зенітних кутів [2, 3].



Мал. 2. Два випадки положення візирного променя: а – оупуклий; б – угнутий

Для зменшення впливу рефракції пропонується обладнати відбивач вертикальним базисом і вимірювати зенітні кути на його марки (мал. 3), що дозволить визначати поправки до зенітних кутів і таким чином підвищувати точність тригонометричного нівелювання.



Мал. 3. Схема нівелювання із застосуванням вертикального базису

Поправки у зенітні кути можна обчислити за формулою

$$\delta_{z_i} = -\frac{a_i W \rho}{[a^2]}, \quad (3)$$

де  $a_i$  – коефіцієнти;  $W$  – нев'язка;  $\rho = 206\,265''$ ;  $[a^2] = a_1^2 + a_2^2$ .

Коефіцієнти знаходять з виразів:

$$a_1 = \frac{b \sin z_2}{\sin^2(z_2 - z_1)};$$

$$a_2 = -D_0 \operatorname{ctg}(z_2 - z_1),$$

де  $b$  – довжина базису;  $z_1, z_2$  – зенітні кути, виміряні відповідно на верхню і нижню марки базису.

Нев'язку можна визначити із залежності

$$W = \frac{b \sin z_1}{\sin(z_2 - z_1)} = D_0 - D.$$

Виправлені зенітні кути становитимуть:

$$\bar{z}_i = z_i + \delta_{z_i}.$$

Перевищення можна обчислити за формулами

$$h_{AB} = D \operatorname{ctg} \bar{z}_1 \sin \bar{z}_2 + i - l - b + p; \quad (4)$$

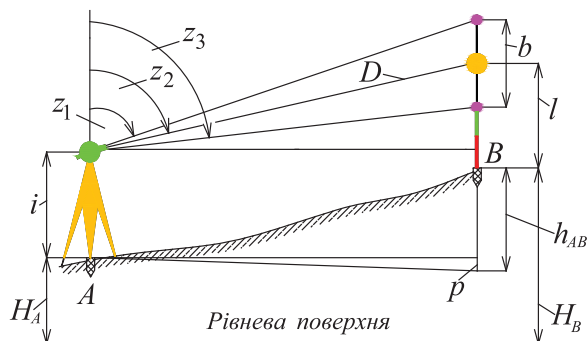
$$h_{AB} = D \cos \bar{z}_2 + i - l + p, \quad (5)$$

де  $p$  – поправка за кривину Землі.

Якщо базис розмістити симетрично призмі, то можна виміряти зенітні кути на три точки базису (мал. 4), що також підвищує точність нівелювання.

Поправки у зенітні кути одержують із виразу (3), але нев'язку і коефіцієнти обчислюють за формулами

$$W = \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{\sin^2 z_2}{2 \sin^2(z_2 - z_1)} + \frac{\sin^2 z_2}{2 \sin^2(z_3 - z_2)} - 1} - D = D_0 - D;$$



Мал. 4. Схема нівелювання на три точки вертикального базису

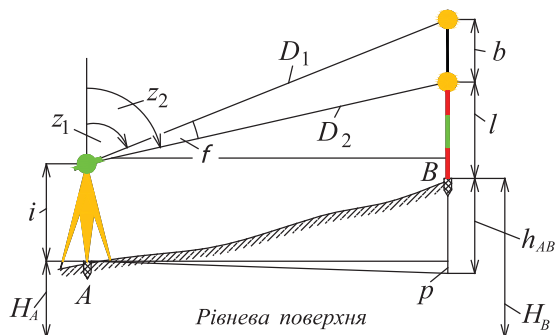
$$a_1 = \frac{1}{2} D_0 \operatorname{ctg}(z_2 - z_1);$$

$$a_2 = \frac{D_0}{\sin z_2} \left( \frac{\sin z_3}{\sin(z_3 - z_2)} - \frac{\sin z_1}{\sin(z_2 - z_1)} \right);$$

$$a_3 = -\frac{1}{2} D_0 \operatorname{ctg}(z_3 - z_2);$$

$$[a^2] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \quad (6)$$

Суттєве підвищення точності забезпечує спосіб нівелювання з вимірюванням відстаней на дві призми (мал. 5).



Мал. 5. Схема нівелювання з вимірюванням відстаней на дві призми вертикального базису

Для врівноваження вимірних величин можна записати систему рівнянь поправок:

$$a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + a_3 \delta_3 + a_4 \delta_4 + W_1 = 0;$$

$$c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 + c_3 \delta_3 + c_4 \delta_4 + W_2 = 0, \quad (7)$$

де  $a_i, c_i$  – коефіцієнти (часткові похідні);  $\delta_1 = \delta_{z_1}, \delta_2 = \delta_{z_2}, \delta_3 = \delta_{D_1}, \delta_4 = \delta_{D_2}$  – поправки у зенітні кути і відстані;  $W_i$  – нев'язки.

Нев'язки визначають за формулами

$$W_1 = z_1 - z_2 + \varphi; \quad W_2 = D_1 \sin z_1 - D_2 \sin z_2,$$

де  $\varphi = \arcsin \frac{D_1^2 + D_2^2 - b^2}{2D_1 D_2}$ .

Коефіцієнти  $a_i$  та  $c_i$  становитимуть:

$$a_1 = 1; \quad a_2 = -1; \quad a_3 = -\frac{q(D_1 - D_2 \cos \varphi)}{D_1 D_2 \sin \varphi};$$

$$a_4 = -\frac{q(D_2 - D_1 \cos \varphi)}{D_1 D_2 \sin \varphi};$$

$$c_1 = \frac{1}{q} D_1 \cos z_1; \quad c_2 = -\frac{1}{q} D_2 \cos z_2; \quad c_3 = \sin z_1; \quad c_4 = -\sin z_2,$$

де  $q = \frac{1}{2}(D_1 \sin z_1 + D_2 \sin z_2)$ .

Розв'язавши систему рівнянь (7) за методом найменших квадратів, одержимо поправки у виміряні величини:

$$\delta_i = \frac{1}{p_i} (a_i K_1 + c_i K_2) \rho, \quad (8)$$

де  $K_i$  – корелати;  $p_i$  – вага вимірних величин. Корелати знаходять із виразів

$$K_1 = \frac{A_2 W_2 / q - A_3 W_1 / \rho}{A_1 A_3 - A_2^2}; \quad K_2 = \frac{A_2 W_1 / \rho - A_1 W_2 / q}{A_1 A_3 - A_2^2},$$

де  $A_1 = \left[ \frac{1}{p_i} a_i^2 \right]; \quad A_2 = \left[ \frac{1}{p_i} a_i c_i \right]; \quad A_3 = \left[ \frac{1}{p_i} c_i^2 \right]$ .

Вагу вимірних величин можна визначити за формулами

$$p_1 = p_2 = C / \Delta z^2; \quad p_3 = p_4 = C / m_D^2,$$

де  $C$  – довільне додатне число;  $\Delta z$  – гранична похибка вимірювання зенітних кутів із врахуванням впливу зовнішнього середовища;  $m_D$  – СКП вимірювання відстаней.

Для прикладу візьмемо такі теоретичні значення відстаней і кутів:  $D_1 = 245,864$  м,  $D_2 = 245,775$  м,  $b = 1$  м,  $z_1 = 84^\circ 46' 05,1''$ ,  $z_2 = 85^\circ 00' 00''$  (див. мал. 5).

Якщо виміряні величини  $D_1 = 245,870$  м,  $D_2 = 245,770$  м,  $z_1 = 84^\circ 45' 39''$ ,  $z_2 = 85^\circ 00' 30''$ , то

$$\varphi = 0^\circ 13' 54,9''; \quad W_1 = -56,1''; \quad W_2 = 0,00492 \text{ м};$$

$$q = 244,8403 \text{ м};$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = -1; \quad a_3 = -0,10212; \quad a_4 = 0,09808;$$

$$c_1 = 0,09170; \quad c_2 = -0,08734; \quad c_3 = 0,99582; \quad c_4 = -0,99621.$$

Для визначення ваг задамо похибки вимірювання зенітних кутів  $\Delta z = 10''$  і відстаней –  $m_D = 5$  мм. Тоді при  $C = 25$  одержимо:

$$p_1 = p_2 = 25 / 100 = 0,25; \quad p_3 = p_4 = 25 / 25 = 1.$$

Величини  $A_i$  та  $K_i$  становитимуть:

$$A_1 = 4(1^2 + 1^2) + 1(0,10212^2 + 0,09808^2) = 8,02005;$$

$$A_2 = 4(1 \cdot 0,09170 + 1 \cdot 0,08734) + 1(-0,10212 \cdot 0,99582 - 0,09808 \cdot 0,99621) = 0,51676;$$

$$A_3 = 4(0,09170^2 + 0,08734^2) + 1(0,99582^2 + 0,99621^2) = 2,04824;$$

$$K_1 = \frac{0,51676 \cdot 0,00492 / 244,8403 - 2,04824(-56,1) / 206265}{8,02005 \cdot 2,04824 - 0,51676^2} = 3,5115 \cdot 10^{-5};$$



$$K_2 = \frac{0,51676(-56,1)/206265 - 8,02005 \cdot 0,00492 / 244,8403}{8,02005 \cdot 2,04824 - 0,51676^2} =$$

$$= -1,8670 \cdot 10^{-5}.$$

Поправки у zenітні кути і відстані складуть:

$$\delta_{z_1} = 4(1 \cdot 3,5115 \cdot 10^{-5} - 0,09170 \cdot 1,8670 \cdot 10^{-5}) 206265'' = +27,6'';$$

$$\delta_{z_2} = 4(-1 \cdot 3,5115 \cdot 10^{-5} + 0,08734 \cdot 1,8670 \cdot 10^{-5}) 206265'' = -27,6'';$$

$$\delta_{D_1} = 1(-0,10212 \cdot 3,5115 \cdot 10^{-5} - 0,99582 \cdot 1,8670 \cdot 10^{-5}) 244,8403 =$$

$$= -0,0054 \text{ м};$$

$$\delta_{D_2} = 1(0,09808 \cdot 3,5115 \cdot 10^{-5} + 0,99621 \cdot 1,8670 \cdot 10^{-5}) 244,8403 =$$

$$= +0,0054 \text{ м}.$$

Виправлені кути і відстані дорівнюватимуть:

$$\bar{z}_1 = 84^\circ 45' 39'' + 27,6'' = 84^\circ 46' 06,6'';$$

$$\bar{z}_2 = 85^\circ 00' 30'' - 27,6'' = 85^\circ 00' 02,4'';$$

$$\bar{D}_1 = 245,870 - 0,0054 = 245,8646 \text{ м};$$

$$\bar{D}_2 = 245,770 + 0,0054 = 245,7754 \text{ м}.$$

Контроль обчислень:

$$W_1 = 84^\circ 46' 06,6'' - 85^\circ 00' 02,4'' + 0^\circ 13' 55,8'' = 0;$$

$$W_2 = 245,8646 \sin 84^\circ 46' 06,6'' - 245,7754 \sin 85^\circ 00' 02,4'' = 0.$$

Порівнявши одержані величини з теоретичними

$$A_{z_1} = 84^\circ 46' 06,6'' - 84^\circ 46' 05,1'' = 1,5'';$$

$$A_{z_2} = 85^\circ 00' 02,4'' - 85^\circ 00' 00,0'' = 2,4'';$$

$$\Delta_{D_1} = 245,8646 \text{ м} - 245,864 \text{ м} = 0,0006 \text{ м};$$

$$\Delta_{D_2} = 245,7754 \text{ м} - 245,775 \text{ м} = 0,0004 \text{ м},$$

приходимо до висновку, що нівелювання цим способом у даних умовах підвищує точність не тільки zenітних кутів, а і відстаней.

Необхідно зазначити, що при нівелюванні запропонованими способами рефракційні криві у вузькому діапазоні візування на марки короткої бази будуть переважно опуклими або угнутими, а тому вплив рефракції на точність вимірювання zenітних кутів повністю не виключається. Для суттєвого зменшення впливу рефракції тригонометричне нівелювання необхідно виконувати тахеометром, встановленим посередині між пунктами.

### Література

1. Баран, П.І. Тригонометричне нівелювання в інженерно-геодезичних роботах [Текст] / П.І. Баран, Ф.Ф. Соловйов, В.Я. Черноконь. – К.: Укргеодезкартографія, 1996. – 130 с.
2. Изотов, А.А. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования [Текст] / А.А. Изотов, Л.П. Пеллинен // Тр. ЦНИИГАиК. – 1955. – Вып. 102. – 176 с.
3. Островский, А.Л. Учет атмосферных влияний на астрономо-геодезические измерения [Текст] / А. Л. Островский, Б. М. Джуман, Ф. Д. Заблоцкий [и др.]. – М.: Недра, 1990. – 135 с.

Надійшла 10.11.10