УДК 625.8 : 624.048

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ

В.А. Богомолов, профессор, д.т.н., И.Л. Разницын, доцент, к.ф.-м.н., ХНАДУ,
М.В. Сидоров, доцент, к.ф.-м.н., ХНУРЭ

Аннотация. *Содержится доказательство эквивалентности некоторых реологических моделей теории линейной вязко-упругости. Приведены явные формулы перехода от одной модели к другой.*

Ключевые слова: *линейная вязко-упругость, обобщенная модель Кельвина, обобщенная модель Максвелла, эквивалентные модели.*

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРІЇ ЛІНІЙНОЇ В'ЯЗКО-ПРУЖНОСТІ

В.О. Богомолов, професор, д.т.н., І.Л. Разніцин, доцент, к.ф.-м.н., ХНАДУ,
М.В. Сидоров, доцент, к.ф.-м.н., ХНУРЕ

Анотація. *Міститься доведення еквівалентності деяких реологічних моделей теорії лінійної в'язко-пружності. Наведено явні формули переходу від однієї моделі до іншої.*

Ключові слова: *лінійна в'язко-пружність, узагальнена модель Кельвіна, узагальнена модель Максвела, еквівалентні моделі.*

ON EQUIVALENCE OF SOME MODELS OF LINEAR ELASTOVISCOUSITY THEORY

V. Bogomolov, Professor, Doctor of Technical Science, I. Raznicyn, Associate Professor, Candidate in Physics and Mathematics Science, KhNAHU, M. Sidorov, Associate Professor, Candidate in Physics and Mathematics Science, KhNURE

Abstract. *The given article gives proof of equivalence of some rheological models in the theory of linear elastoviscousity. The explicit formulas for transition from one model to another are presented.*

Key words: *linear elastoviscousity, generalized Kelvin model, generalized Maxwell model, equivalent models.*

Введение

В теории линейной вязко-упругости рассматриваются реологические модели, для наглядности изображаемые схемами, состоящими из соединенных амортизаторов (элементов вязкости) и пружин (элементов упругости). В случае одномерной системы связь между напряжением (σ) и деформацией (ε) выражается по известным правилам [1] в виде соотношения $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$, где P, Q – дифференциальные операторы от $D = \dfrac{d}{dt}$ с постоянными коэффициентами, зависящими от физических параметров модели (то есть от модулей пружин и коэффициентов вязкости амортизаторов).

Две модели, которым соответствуют уравнения $P_1(D)\sigma = Q_1(D)\varepsilon$ и $P_2(D)\sigma = Q_2(D)\varepsilon$, будем называть эквивалентными, если выполнены два условия

$$\deg P_1(s) = \deg P_2(s), \qquad (1)$$

$$\frac{Q_1(s)}{P_1(s)} \equiv \frac{Q_2(s)}{P_2(s)}. \qquad (2)$$

В [1] указаны типы моделей, состоящих из двух амортизаторов и двух пружин, таких, что для каждой модели одного типа существует эквивалентная ей модель другого типа.

Заметим, что вопрос эквивалентности моделей представляет не только теоретический интерес, но имеет также и практическое значение, так как используемые в известных программных средствах модели не всегда соответствуют физическим представлениям пользователей этих средств.

Цель и постановка задачи

Рассмотрим два типа моделей, схемы которых приведены соответственно на рис. 1 и 2.

Здесь и далее $k_{ij} > 0$, $p_{ij} > 0$ – коэффициенты вязкости амортизаторов и модулей пружин соответственно.

Целью настоящей публикации является доказательство (для n = 1,2) существования у каждой модели одного типа эквивалентной ей модели другого типа.

Доказательство для *n* = 1

Дифференциальные уравнения моделей имеют вид

$$[p_{11} + (k_{11} + k_{12})D]\sigma = \\ = [k_{12}D(p_{11} + k_{11}D)]\varepsilon, \qquad (3)$$

$$[p_{22} + k_{22}D]\sigma = \\ = [D(k_{21}k_{22}D + p_{21}(k_{21} + k_{22}))]\varepsilon. \qquad (4)$$

Модели эквиваленты, если будет верно тождество

$$\frac{k_{12}s(p_{11} + k_{11}s)}{p_{11} + (k_{11} + k_{12})s} \equiv \\ \equiv \frac{s(k_{21}k_{22}s + p_{21}(k_{21} + k_{22}))}{p_{21} + k_{22}s}. \qquad (5)$$

Выполнение тождества (5) равносильно выполнению системы равенств

$$\begin{cases} \dfrac{k_{12}k_{11}}{k_{11} + k_{12}} = k_{21}, \\ \dfrac{p_{11}}{k_{11}} = \dfrac{p_{21}(k_{21} + k_{22})}{k_{21}k_{22}}, \\ \dfrac{p_{11}}{k_{11} + k_{12}} = \dfrac{p_{21}}{k_{22}}. \end{cases} \qquad (6)$$

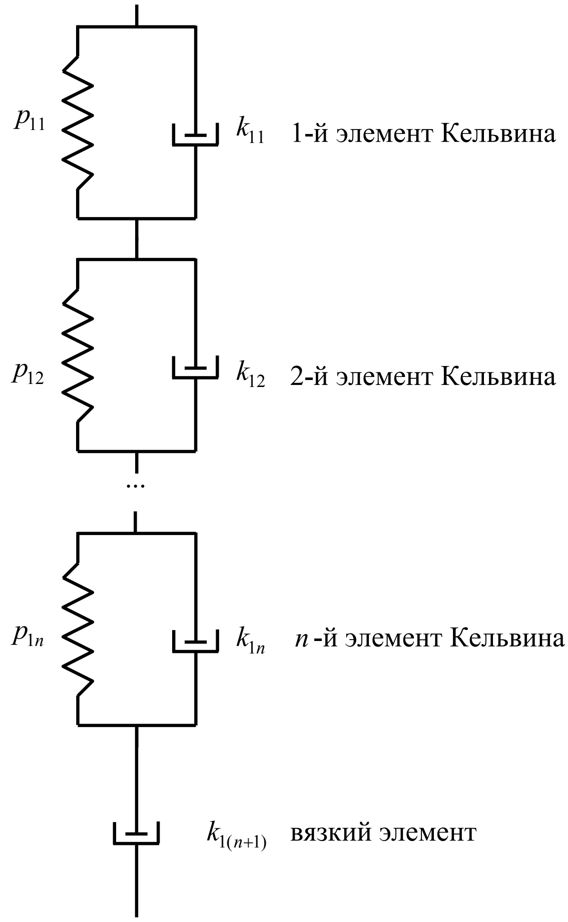

Рис. 1. Обобщенная модель Кельвина

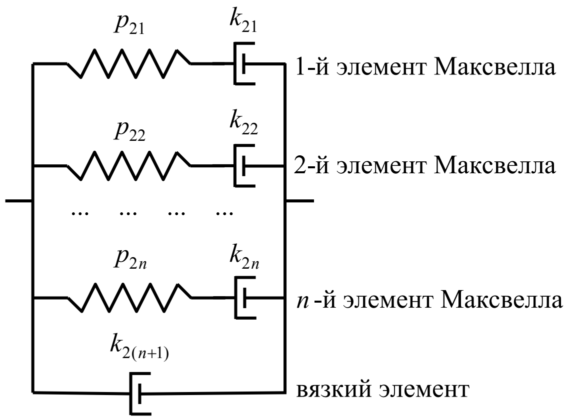

Рис. 2. Обобщенная модель Максвелла

Система (6) однозначно разрешима, как относительно параметров первой модели

$$k_{11} = \frac{k_{21}(k_{21}+k_{22})}{k_{22}} > 0\,, \quad k_{21} = k_{21}+k_{22} > 0\,,$$

$$p_{11} = \frac{p_{21}(k_{21}+k_{22})^2}{(k_{22})^2} > 0\,,$$

так и относительно параметров второй модели

$$k_{21} = \frac{k_{11}k_{12}}{k_{11}+k_{12}} > 0\,, \quad k_{22} = \frac{(k_{12})^2}{k_{11}+k_{12}} > 0\,,$$

$$p_{21} = \frac{p_{11}(k_{12})^2}{(k_{11}+k_{12})^2} > 0\,.$$

Таким образом, для $n=1$ доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любой модели одного типа существует, и притом единственная, эквивалентная модель другого типа.

Доказательство для *n* = 2

Введем такое определение: модель первого (второго) типа будем называть кратной, если выполнено условие $\frac{p_{11}}{k_{11}} = \frac{p_{12}}{k_{12}}$ $\left(\frac{p_{21}}{k_{21}} = \frac{p_{22}}{k_{22}}\right)$, и некратной – в противном случае.

Для кратной и некратной моделей первого типа дифференциальные уравнения соответственно имеют вид

$$\begin{gathered}[k_{11}k_{12}\lambda + (k_{13}(k_{11}+k_{12}) + k_{11}k_{12})D]\sigma = \\ = [k_{11}k_{12}k_{13}D(\lambda + D)]\varepsilon\,, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\lambda = \frac{p_{11}}{k_{11}} = \frac{p_{12}}{k_{12}}$,

$$\begin{gathered}[k_{13}D((p_{11}+p_{12}) + (k_{11}+k_{12})D) + \\ +(p_{11}+k_{11}D)(p_{12}+k_{12}D)]\sigma = \\ = [k_{13}D(p_{11}+k_{11}D)(p_{12}+k_{12}D)]\varepsilon\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Для кратной и некратной моделей второго типа дифференциальные уравнения соответственно имеют вид

$$\begin{gathered}[\mu + D]\sigma = \\ = [((p_{21}+p_{22}+k_{23}\mu) + k_{23}D)D]\varepsilon\,, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\mu = \frac{p_{21}}{k_{21}} = \frac{p_{22}}{k_{22}}$,

$$\begin{gathered}[(p_{21}+k_{21}D)(p_{22}+k_{22}D)]\sigma = \\ = [k_{23}D(p_{21}+k_{21}D)(p_{22}+k_{22}D) + \\ + p_{21}k_{21}D(p_{22}+k_{22}D) + p_{22}k_{22}D(p_{21}+k_{21}D)]\varepsilon\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Замечание 1. Если поменять местами какие-то элементы Кельвина, то соответствующее дифференциальное уравнение не изменится, поэтому в дальнейшем такие модели отождествляются. Аналогичное утверждение верно и для модели второго типа.

Покажем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для каждой кратной модели одного типа существует эквивалентная ей кратная модель другого типа.

Действительно, кратные модели первого и второго типов эквиваленты, если верно тождество

$$\frac{k_{11}k_{12}k_{13}s(\lambda+s)}{k_{11}k_{12}\lambda + (k_{13}(k_{11}+k_{12}) + k_{11}k_{12})s} \equiv \\ \equiv \frac{((p_{21}+p_{22}+k_{23}\mu) + k_{23}s)s}{\mu+s},$$

которое равносильно выполнению системы равенств

$$\begin{cases} \dfrac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11}+k_{12}) + k_{11}k_{12}} = k_{23}, \\ \lambda = \dfrac{p_{21}+p_{22}+k_{23}\mu}{k_{23}}, \\ \dfrac{k_{11}k_{12}\lambda}{k_{13}(k_{11}+k_{12}) + k_{11}k_{12}} = \mu. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) разрешима относительно параметров первой модели; более того, она имеет бесчисленное множество решений, которое можно записать так:

$$k_{13} = \frac{p_{21}+p_{22}+k_{23}\mu}{\mu} > 0\,,$$

$$\lambda = \frac{p_{21}+p_{22}+k_{23}\mu}{k_{23}} > 0\,,$$

$$k_{11,\,12}=\frac{t\pm\sqrt{t\left(t-4k_{23}\left(\dfrac{k_{23}\mu}{p_{21}+p_{22}}+1\right)\right)}}{2}>0\,,$$

где произвольное число t удовлетворяет неравенству $t\geq 4k_{23}\left(\dfrac{k_{23}\mu}{p_{21}+p_{22}}+1\right)$.

Аналогично система (11) разрешима относительно параметров второй модели и множество решений можно записать так:

$$k_{23}=\frac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}}>0\,,$$
$$\mu=\frac{k_{11}k_{12}\lambda}{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}}>0\,,\quad p_{21}=t\,,$$
$$p_{22}=\frac{\lambda(k_{13})^2k_{11}k_{12}(k_{11}+k_{12})}{(k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12})^2}-t>0\,,$$

где произвольное число t удовлетворяет неравенству $0<t<\dfrac{\lambda(k_{13})^2k_{11}k_{12}(k_{11}+k_{12})}{(k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12})^2}$.

Утверждение доказано.

Теперь рассмотрим некратные модели. В этом случае будет справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Для любой некратной модели одного типа существует, и притом единственная, эквивалентная некратная модель другого типа.

Действительно, модели первого и второго типов будут эквивалентны, если верно тождество

$$\begin{aligned}&\left[k_{13}s(p_{11}+k_{11}s)(p_{12}+k_{12}s)\right]:\\&:\left[k_{13}s((p_{11}+p_{12})+(k_{11}+k_{12})s)+\right.\\&\left.+(p_{11}+k_{11}s)(p_{12}+k_{12}s)\right]\equiv\\&\equiv\left[k_{23}s(p_{21}+k_{21}s)(p_{22}+k_{22}s)+\right.\\&\left.+p_{21}k_{21}s(p_{22}+k_{22}s)+p_{22}k_{22}s(p_{21}+k_{21}s)\right]:\\&:\left[(p_{21}+k_{21}s)(p_{22}+k_{22}s)\right],\end{aligned}\tag{12}$$

которое равносильно выполнению системы равенств

$$\begin{cases}\dfrac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}}=k_{23},\\ k_{13}=k_{21}+k_{22}+k_{23},\\ \dfrac{p_{11}}{k_{11}}+\dfrac{p_{12}}{k_{12}}=\dfrac{p_{21}}{k_{21}}+\dfrac{p_{22}}{k_{22}}+\dfrac{p_{21}+p_{22}}{k_{23}},\\ \dfrac{k_{13}(p_{11}+p_{12})+p_{11}k_{12}+p_{12}k_{11}}{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}}=\dfrac{p_{21}}{k_{21}}+\dfrac{p_{22}}{k_{22}},\\ \dfrac{p_{11}p_{12}}{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}}=\dfrac{p_{21}p_{22}}{k_{21}k_{22}}.\end{cases}\tag{13}$$

Проверим, что для модели первого типа существует эквивалентная ей модель второго типа.

Обозначим

$$b=\frac{p_{21}}{k_{21}}+\frac{p_{22}}{k_{22}}+\frac{p_{21}+p_{22}}{k_{23}}\,,$$
$$d=b^2-\frac{4p_{21}p_{22}(k_{21}+k_{22}+k_{23})}{k_{21}k_{22}k_{23}}=$$
$$=\left(\frac{1}{k_{23}}(p_{21}-p_{22})+\frac{p_{21}}{k_{21}}-\frac{p_{22}}{k_{22}}\right)^2+\frac{4p_{21}p_{22}}{(k_{23})^2}>0\,,$$
$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{d}\right)>0\,,\quad \alpha_2=\frac{1}{2}\left(b-\sqrt{d}\right)>0\,,$$
$$r=\frac{(k_{22})^2p_{21}+(k_{21})^2p_{22}}{k_{21}k_{22}(k_{21}+k_{22})}\,,$$
$$w=\frac{k_{23}(k_{21}+k_{22}+k_{23})}{k_{21}+k_{22}}\,.$$

Система (13) имеет относительно параметров первой модели два решения.

Первое решение

$$k_{11}=\frac{w\sqrt{d}}{\alpha_1-r}\,,\quad k_{12}=\frac{w\sqrt{d}}{r-\alpha_2}\,,$$
$$k_{13}=k_{21}+k_{22}+k_{23}\,,$$
$$p_{11}=\frac{\alpha_1w\sqrt{d}}{\alpha_1-r}\,,\quad p_{12}=\frac{\alpha_2w\sqrt{d}}{r-\alpha_2}\,.$$

Второе решение

$$k_{11}=\frac{w\sqrt{d}}{r-\alpha_2}\,,\quad k_{12}=\frac{w\sqrt{d}}{\alpha_1-r}\,,$$
$$k_{13}=k_{21}+k_{22}+k_{23}\,,$$
$$p_{11}=\frac{\alpha_2w\sqrt{d}}{r-\alpha_2}\,,\quad p_{12}=\frac{\alpha_1w\sqrt{d}}{\alpha_1-r}\,.$$

Остается проверить, что все компоненты решений положительны. Это будет верно, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \alpha_1 - r > 0, \\ r - \alpha_2 > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Легко видеть, что система (14) равносильна неравенству

$$(2r-b)^2 < d\,, \tag{15}$$

разность между левой и правой частями которого можно преобразовать к виду

$$-\frac{k_{21}k_{22}(k_{21}+k_{22}+k_{23})}{(k_{21}+k_{22})^2 k_{23}}\left(\frac{p_{21}}{k_{21}}-\frac{p_{22}}{k_{22}}\right)^2 < 0\,.$$

Также заметим, что полученные два решения соответствуют одной модели (см. замечание 1).

Аналогично проверим, что для каждой модели второго типа существует эквивалентная модель первого типа.

Обозначим

$$B = \frac{k_{13}(p_{11}+p_{12}) + p_{11}k_{12} + p_{12}k_{11}}{k_{13}(k_{11}+k_{12}) + k_{11}k_{12}}\,,$$

$$D = B^2 - \frac{4p_{11}p_{12}}{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}} =$$

$$= \left[(k_{13}(p_{11}-p_{12}) + (p_{11}k_{12}-p_{12}k_{11}))^2 + \right.$$

$$\left. + 4(k_{13})^2 p_{11}p_{12}\right] : \left[(k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12})^2\right] > 0\,,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\left(B+\sqrt{D}\right) > 0\,, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}\left(B-\sqrt{D}\right) > 0\,,$$

$$R = \frac{p_{12}(k_{11})^2 + p_{11}(k_{12})^2}{(k_{11}+k_{12})(k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12})}\,,$$

$$W = \frac{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}}{(k_{13})^2(k_{11}+k_{12})}\,.$$

Система (13) имеет относительно параметров второй модели два решения.

Первое решение

$$k_{21} = \frac{R-\beta_2}{W\sqrt{D}}\,, \quad k_{22} = \frac{\beta_1 - R}{W\sqrt{D}}\,,$$

$$k_{23} = \frac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}}\,,$$

$$p_{21} = \frac{\beta_1(R-\beta_2)}{W\sqrt{D}}\,, \quad p_{22} = \frac{\beta_2(\beta_1 - R)}{W\sqrt{D}}\,.$$

Второе решение

$$k_{21} = \frac{\beta_1 - R}{W\sqrt{D}}\,, \quad k_{22} = \frac{R-\beta_2}{W\sqrt{D}}\,,$$

$$k_{23} = \frac{k_{11}k_{12}k_{13}}{k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}}\,,$$

$$p_{21} = \frac{\beta_2(\beta_1 - R)}{W\sqrt{D}}\,, \quad p_{22} = \frac{\beta_1(R-\beta_2)}{W\sqrt{D}}\,.$$

Остается проверить, что все компоненты решений положительны. Это будет верно, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \beta_1 - R > 0, \\ R - \beta_2 > 0. \end{cases} \tag{16}$$

Система (16) равносильна неравенству

$$(2R-B)^2 < D\,, \tag{17}$$

разность между левой и правой частями которого равна

$$-4(k_{11})^2(k_{12})^2\left(\frac{p_{11}}{k_{11}}-\frac{p_{12}}{k_{12}}\right)^2 \times$$

$$\times (k_{13}(k_{11}+k_{12})+k_{11}k_{12}) < 0\,.$$

Также заметим, что полученные два решения соответствуют одной модели (см. замечание 1).

Утверждение доказано.

Выводы

Таким образом, для рассмотренных типов реологических моделей в случае $n=1$ и $n=2$ доказано, что для модели одного типа существует эквивалентная модель другого типа. Полученный результат позволяет предположить, что это утверждение верно и при любом n.

Литература

1. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости / Д. Бленд. – М.: Мир, 1965. – 200 с.

Рецензент: В.В. Филиппов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 23 января 2013 г.