УДК 62.–1–9

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ДЕФЕКТНЫХ ИЗДЕЛИЙ В ПАРТИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ВЫБОРОЧНОЙ ПРОВЕРКИ

В.А. Богомолов, проф., д.т.н., П.Ф. Горбачев, проф., д.т.н., А.В. Макаричев, доц., к.ф.-м.н., А.И. Коробко, доц., к.т.н., С.В. Свичинский, асп., Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Аннотация. *Сформирована аналитическая модель расчета вероятности появления и количества дефектных изделий в партии готовой продукции по результатам выборочной проверки. Входными параметрами в модели служат количество проверенных изделий, а также оценки математического ожидания и дисперсии оценочного показателя.*

Ключевые слова: *партия изделий, выборка, вероятность, оценочный параметр, случайная величина.*

ОЦІНКА КІЛЬКОСТІ ДЕФЕКТНИХ ВИРОБІВ У ПАРТІЇ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИБІРКОВОЇ ПЕРЕВІРКИ

В.О. Богомолов, проф., д.т.н., П.Ф. Горбачов, проф., д.т.н., О.В. Макарічев, доц., к.ф.-м.н., А.І. Коробко, доц., к.т.н., С.В. Свічинський, асп., Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *Сформовано аналітичну модель розрахунку імовірності появи і кількості дефектних виробів у партії готової продукції за результатами вибіркової перевірки. Вхідними параметрами у моделі виступають кількість перевірених виробів, а також оцінки математичного очікування та дисперсії оцінного параметра.*

Ключові слова: *партія виробів, вибірка, імовірність, оцінний параметр, випадкова величина.*

ESTIMATION OF THE NUMBER OF DEFECTIVE UNITS IN THE LOT ON THE RESULTS OF A SAMPLING CHECK

V. Bogomolov, Prof., D. Sc. (Eng.), P. Gorbachov, Prof., D. Sc. (Eng.), A. Makarychev, Assoc. Prof., Ph. D. (Phys.-Math.), A. Korobko, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.), S. Svichynskyi, Postgraduate, Kharkiv National Automobile and Highway University

Abstract. *An analytical model for probability calculation of both the occurrence and the number of defective units in a production lot based on the results of a sampling check is presented. Input factors of the presented model are the number of tested units as the well as estimation of mathematical expectation and variance of the evaluated parameter.*

Key words: *production lot, sampling, probability, evaluated parameter, random variable..*

Введение

Выборочный контроль – это контроль, при котором решение о контролируемой совокупности или процессе принимают по результатам проверки одной или нескольких выборок [1]. Следует отметить особенность выборочного контроля, которая заключается в колебании выборочных оценок. Это значит, что в любой выборке (одинакового размера) из одной и той же партии может иметь место разное количество дефектных изделий, а значит, по результатам контроля одной выборки можно принять партию, а по результатам другой – ту же партию забраковать.

Непосредственное влияние на результаты проверки оказывает количество проверяемых изделий – чем оно больше, тем точнее результаты проверки. Но увеличение количества проверяемых изделий приводит к увеличению ее стоимости, поэтому всегда необходимо найти рациональное значение объема выборки. Сделать это можно за счет создания аналитической модели для расчета вероятности появления и количества дефектных изделий в партии готовой продукции по результатам выборочной проверки, что позволит принимать обоснованные решения при организации выборочной проверки качества изделий в партии.

Анализ публикаций

Вопросы определения необходимого объема выборки при статистическом контроле качества, а также выбора плана контроля регламентированы рядом как зарубежных, так и национальных стандартов, которые являются идентичными международным [2–7]. В частности, серия стандартов ДСТУ-3Т ISO/TR 8550 [4–6] содержит руководства по выбору и применению системы, схемы или плана статистического приемочного контроля. Здесь же рассмотрены системы, описанные в различных стандартах, и указаны способы их сравнения для определения преимуществ и недостатков.

Стандарт [7] используется при решении задачи по определению количества элементов в выборке, чтобы с достаточной уверенностью утверждать, что результат правильный. Эта задача решается с использованием диаграммы Ларсена. Несовершенством такого способа решения указанной задачи является то, что он не позволяет определить вероятность того, что среди изделий в партии, не подвергшихся контролю, встретятся дефектные изделия.

Стоить отметить, что все описанные в обзоре подходы к выборочному контролю не позволяют аналитически определить влияние количества проверяемых изделий на вероятностные показатели качества всей партии в целом. При этом общеизвестной является зависимость дисперсии выборочного математического ожидания от количества единиц в выборке [8]. Наличие такой связи при естественных допущениях о характере рассеяния ошибок параметра является хорошей основой для разработки математического аппарата вероятностной оценки качества изделий в партии.

Цель и постановка задачи

Пусть в выпускаемой партии из N однотипных изделий каждое изделие может быть проверено по одному параметру. Пусть из партии выбрано наугад n изделий и все они проверяются по параметру A, значение которого должно попасть в промежуток $[A_{\min}, A_{\max}]$. Если значение A не попадает в заданный интервал, изделие считается дефектным.

В результате проверки n изделий возникают выборочные значения $A_1, A_2, \ldots A_n$ проверяемого параметра A. При этом принимается, что этот параметр нормально распределен с неизвестными математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

Необходимо построить аналитическую модель расчета вероятности появления и количества дефектных изделий в партии готовой продукции по результатам выборочной проверки в зависимости от количества проверенных изделий, а также оценок математического ожидания и дисперсии оценочного параметра.

Построение математической модели

Пусть величина

$$a = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n} \qquad (1)$$

обозначает выборочное математическое ожидание параметра A и величина

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i^2 - \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} A \right)^2 \qquad (2)$$

является выборочной дисперсией параметра A. Тогда отношение

$$u = \frac{s^2}{\sigma^2} \qquad (3)$$

имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы [8], плотность которого обозначается

$$f(u)=\frac{u^{n-3/2}\cdot e^{-x/2}}{2^{n-1/2}\cdot\Gamma\left(n-1/2\right)}, \qquad (4)$$

где $\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} b^{x-1}e^{-b}db$ – гамма-функция [8].

Кроме того, отношение

$$t=\frac{a-m}{\sqrt{D/n}}, \qquad (5)$$

где D – несмещенная оценка дисперсии при неизвестном математическом ожидании

$$D=\frac{n}{n-1}\cdot(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i^2-a^2), \qquad (6)$$

имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы и плотностью [8]

$$g(t)=\frac{\Gamma\left(n/2\right)}{\sqrt{\pi\cdot(n-1)}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}. \qquad (7)$$

Теперь стандартное отклонение оцениваемого параметра может быть выражено через переменную u

$$\sigma=\left(\frac{s^2}{u}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (8)$$

а его математическое ожидание – через переменную t

$$m=a-t\cdot\left(\frac{1}{n-1}\cdot s^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (9)$$

При известных математическом ожидании и дисперсии нормально распределенного параметра A вероятность его попадания в интервал $\left[A_{\min},A_{\max}\right]$ равна [9]

$$p(m,\sigma)=\Phi\left(\frac{A_{\max}-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{A_{\min}-m}{\sigma}\right), \qquad (10)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{b^2}{2}}db$ – интегральная функция Лапласа [9].

Для получения оценки этой вероятности по результатам наблюдений $\hat{p}(m,\sigma)$ необходимо подставить найденные зависимости σ (8) и m (9) в формулу (10) и проинтегрировать ее по отношениям u и t с известными плотностями распределения $f(u)$ и $g(t)$ соответственно.

$$\hat{p}(m,\sigma)=\int\limits_0^{\infty}f(u)du\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(t)\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{A_{\max}-\left\langle a-t\left(\frac{1}{n-1}s^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\rangle}{\left(\frac{s^2}{u}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)-\Phi\left(\frac{A_{\min}-\left\langle a-t\left(\frac{1}{n-1}s^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\rangle}{\left(\frac{s^2}{u}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]dt. \qquad (11)$$

Полученная зависимость (11) позволяет по результатам выборочной проверки определить вероятность попадания оцениваемого параметра в заданный интервал $\left[A_{\min},A_{\max}\right]$, то есть вероятность того, что изделие будет исправным в зависимости от количества проверенных изделий и выборочных оценок математического ожидания и дисперсии параметра.

Зная $\hat{p}$, можно получить

$$\hat{q}=1-\hat{p}, \qquad (10)\ (12)$$

то есть оценку вероятности появления дефектного изделия в партии в результате проверки по одному параметру.

По этой вероятности (12) при большом количестве N изделий в партии с вероятностью не ниже заданного значения α можно получить верхнюю оценку для количества дефектных изделий $N_{\text{деф}}$, используя интегральную предельную теорему Муавра–Лапласа [10]

$$N_{\text{деф}} \le N' \cdot \hat{q} + x_\alpha \cdot \sqrt{N' \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}\,, \qquad (13)$$

где x_α – находится по таблицам для функции Лапласа $\Phi(x_\alpha)$ из уравнения

$$\alpha = \frac{1}{2} + \Phi(x_\alpha)\,; \qquad (14)$$

$$N' = N - n \qquad (15)$$

– скорректированное на объем выборки количество изделий в партии.

Кроме этого, можно также получить точную оценку для вероятности того, что среди оставшихся после проверки N' изделий в партии нет ни одного дефектного, с помощью зависимости [10]

$$P_k(N') = C_{N'}^k \cdot \hat{q}^k \cdot \hat{p}^{N'-k}\,, \qquad (16)$$

где k – количество дефектных изделий в партии среди оставшихся после проверки; $C_{N'}^k$ – количество сочетаний по k из N'.

Тогда

$$p_0(N') = \hat{p}^{N'}\,. \qquad (17)$$

Исходя из (17), можно определить вероятность того, что среди изделий в партии, не подвергшихся контролю, есть дефектные изделия

$$q_0(N') = 1 - \hat{p}^{N'}\,. \qquad (18)$$

Эту модель можно расширить на случай контроля качества выпускаемой продукции не по одному, а по нескольким, b, параметрам $b \ge 1$. Тогда вероятность того, что изделие будет исправным, $\hat{p}$ определится из

$$\hat{p} = \prod_{i=1}^{b} \hat{p}_i\,, \qquad (19)$$

где $\hat{p}_i$ – вероятность того, что изделие будет исправным, определенная, согласно (11), в зависимости от количества проверенных изделий и выборочных оценок математического ожидания и дисперсии i-го параметра. Дальнейшие расчеты для вероятностной оценки качества выпускаемой продукции в партии из N изделий выполняются по зависимостям (12)–(18) аналогично случаю выборочной проверки по одному параметру.

Оценка вероятности появления дефектного изделия в партии по результатам выборочного контроля

Практические результаты использования полученных зависимостей удобно рассмотреть на реальном примере с одним исследуемым параметром A, в котором диапазон его допустимых значений будет нормированным (табл. 1).

Таблица 1 Исходные данные для вероятностной оценки качества продукции в партии

Исходный параметр	Обозначение	Величина
Количество изделий в партии продукции, ед.	N	300
Допустимые значения параметра, минимальное и максимальное	$A_{\min}$ $A_{\max}$	0 1
Количество проверяемых изделий, ед.	n	3
Выборочное мат. ожидание параметра	a	0,5
Выборочное стандартное отклонение параметра	s	0,05
Критическое значение вероятности	α	0,95

При этих условиях вероятность попадания параметра A в интервал $[A_{\min}, A_{\max}]$, в соответствии с (11), равна

$$\hat{p} = 0{,}99\,.$$

Оценка вероятности появления дефектного изделия в партии равна (12)

$$\hat{q} = 1 - 0{,}99 = 0{,}01\,.$$

Тогда количество дефектных изделий с вероятностью не ниже заданной не превысит значения (13)

$$N_{\text{деф}} \le 3{,}085 + 2{,}874 = 5{,}959 \approx 6\,.$$

Вероятность того, что среди оставшихся после проверки N' изделий в партии нет ни одного дефектного, равна (17)

$$p_0(N') = 0{,}99^{(300-3)} = 0{,}045,$$

а вероятность того, что среди изделий в партии, не подвергшихся контролю, есть дефектные изделия (18)

$$q_0(N') = 1 - 0{,}045 = 0{,}955.$$

Этот пример может служить иллюстрацией последовательности вероятностной оценки качества изделий в партии, однако он не дает указаний к собственно организации выборочного контроля, ведь выборочные моменты исследуемого параметра являются случайными величинами и каждая выборочная проверка в общем случае будет давать разные вероятностные оценки качества.

Удобным способом формирования выводов относительно качества продукции может служить задание определенного уровня качества изделий с помощью одного из приведенных в работе показателей:
– вероятности появления дефектного изделия в партии;
– максимального количества дефектных изделий, которое не будет превышено с вероятностью не ниже заданной;
– вероятности того, что среди изделий в партии, не подвергшихся контролю, встретятся (или не встретятся) дефектные изделия.

А что делать, если после выборочного контроля заданный уровень качества продукции не обеспечен? Средством решения этого вопроса или достижения понимания того, что заданный уровень качества не будет достигнут, является проведение дополнительных контрольных замеров.

Именно увеличение количества проверяемых изделий позволяет снизить дисперсию математического ожидания исследуемого параметра и сократить диапазон разброса возможных значений исследуемого параметра.

Ключевым элементом вероятностной оценки качества изделий в партии является расчет вероятности попадания исследуемого параметра в интервал допустимых значений (11). И именно эта вероятность в явном виде зависит от количества проверенных изделий, а все остальные показатели напрямую следуют из нее.

Поэтому хорошей иллюстрацией влияния объема выборки на вероятностные параметры качества продукции служит график $\hat{p} = f(n;\sigma)$ (рис. 1).

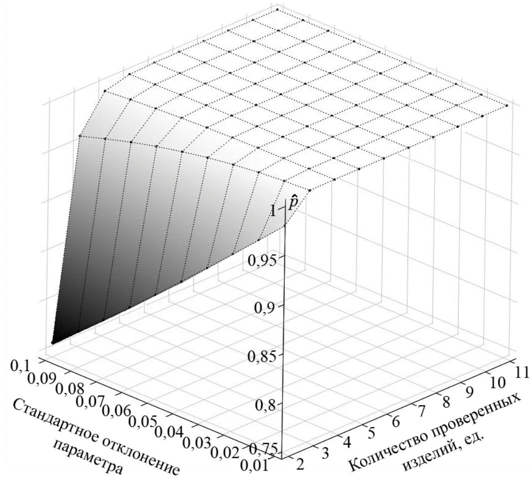

Рис. 1. Зависимость вероятности $\hat{p}$ от количества проверяемых изделий n и стандартного отклонения параметра σ (при m =0,5)

Выборочное математическое ожидание при этом считается постоянным, но его отклонение от середины интервала $[A_{\min}, A_{\max}]$ будет приводить к уменьшению вероятности попадания исследуемого параметра в интервал допустимых значений (рис. 2).

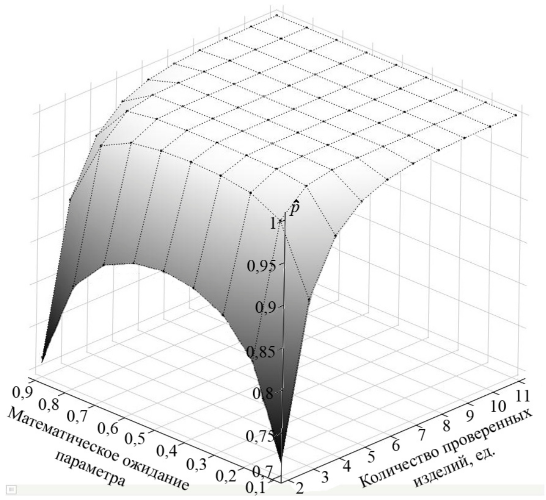

Рис. 2. Зависимость вероятности $\hat{p}$ от количества проверяемых изделий n и математического ожидания параметра m (при σ = 0,05)

Как следует из рис. 2, приближение выборочного математического ожидания исследуемого параметра к границам интервала его допустимых значений серьезно снижает искомую вероятность, но увеличение объема выборки позволяет повысить ее значение.

Выводы

Полученная с помощью двойного интеграла оценка вероятности $\hat{p}(m,\sigma)$ бездефектного изделия позволяет сгладить неточности, возникающие при точечных оценках математического ожидания $\overline{m}$ и среднеквадратического отклонения $\overline{\sigma}$ и дальнейшем их использовании при оценке искомой вероятности с помощью только функции Лапласа.

Приведенные в работе вероятностные показатели качества изделий в партии, т.е. вероятность появления дефектного изделия в партии, максимальное количество дефектных изделий, которое не будет превышено с вероятностью не ниже заданной, а также вероятность того, что среди изделий в партии, не подвергшихся контролю, встретятся (или не встретятся) дефектные изделия, непосредственно зависят как от выборочных оценок математического ожидания и стандартного отклонения проверяемого параметра, так и от количества проверенных изделий, что позволит минимизировать затраты на выборочную проверку для обеспечения заданного уровня показателей качества.

Литература

1. Статистичні методи контролю та регулювання якості. Терміни та визначення : ДСТУ 3514-97. – [Чинний від 1997–07–01]. – К. : Держстандарт України, 1996. – 34 с. – (Національний стандарт України).
2. Статистичний контроль. Вибірковий контроль за альтернативною ознакою. Частина 1. Плани вибіркового контролю, визначені приймальним рівнем якості для послідовного контролю партій (ISO 2859-1:1999, IDT) : ДСТУ ISO 2859-1:2001. – [Чинний від 2003–07–01]. – К. : Держстандарт України, 2001. – 90 с. – (Національний стандарт України).
3. Статистичний контроль. Плани послідовного вибіркового контролю для перевіряння відсотка невідповідностей за кількісною ознакою з визначеним стандартним відхилом (ISO 8423:2008, IDT) : ДСТУ ISO 8423:2010. – [Чинний від 2012–07–01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2012. – 90 с. – (Національний стандарт України)
4. Статистичний контроль. Настанови щодо вибирання та використання систем вибіркового приймального контролю для перевіряння окремих предметів у партіях. Частина 1. Контроль вибірковий приймальний (ISO/TR 8550-1:2007) : ДСТУ-ЗТ ISO/TR 8550-1:2009 [Чинний від 2012–01–01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2011. − 38 с.
5. Статистичний контроль. Настанови щодо вибирання та використання систем вибіркового приймального контролю для перевіряння окремих предметів у партіях. Частина 2. Контроль вибірковий за якісною ознакою (ISO/TR 8550-2:2007) : ДСТУ-ЗТ ISO/TR 8550-2:2009 [Чинний від 2012–01–01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2012. – 18 с.
6. Статистичний контроль. Настанови щодо вибирання та використання систем вибіркового приймального контролю для перевіряння окремих предметів у партіях. Частина 3. Контроль вибірковий за кількісною ознакою (ISO/TR 8550-3:2007) : ДСТУ-ЗТ ISO/TR 8550-3:2009. – [Чинний від 2012–01–01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2012. – 40 с.
7. Статистичний контроль. Критерії та довірчі інтервали для частки у генеральній сукупності (ISO 11453:1996) :ДСТУ ISO 11453:2004. – [Чинний від 2006–01–01]. – К.: Держспоживстандарт України, 2005. – 54 с.
8. Козлов М.В. Введение в математическую статистику / М.В. Козлов, А.В. Прохоров. – М.: Изд-во Московского университета, 1987. – 264 с.
9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей грузовых перевозок / Б.В. Гнеденко. – 7-е изд. – М.: УРСС, 2001. – 448 с.
10. Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1980. – 576 с.

Рецензент: Е.В. Нагорный, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 17 октября 2014 г.