УДК 536.242

Ю.П.Морозов, канд.техн.наук (Ін-т відновлюваної енергетики НАН України, Київ),
Є.В.Мейнарович, канд.фіз.-мат.наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

Аналітичний розв'язок задачі визначення температури гірського масиву після припинення теплової дії свердловини

Отримано аналітичний розв'язок задачі визначення температури гірського масиву після припинення теплової дії свердловини та обґрунтовано формулу наближеного розв'язку.

Получено аналитическое решение задачи определения температуры горного массива после прекращения теплового действия скважины и обоснована формула приближенного решения.

Серед підземних теплообмінників і акумуляторів теплоти у верхніх шарах Землі найбільш поширеними конструкціями є вертикальні теплообмінники, у яких процес теплообміну теплоносія з гірським масивом відбувається в результаті руху рідини у вертикально розміщених каналах (трубках), які встановлюють у бурових свердловинах.

Розглянемо варіант вертикального підземного теплообмінника за умови, що його верхній торець занурений у землю на глибину, при якій добові коливання температури не впливають на процес теплообміну в свердловині.

При русі теплоносія у вертикальному каналі (свердловині), якщо температура оточуючого гірського масиву відрізняється від температури теплоносія, відбувається процес теплообміну між ними.

Зробимо такі загальноприйняті [1] припущення:

1. Початкова температура гірського масиву постійна і дорівнює середньому значенню по глибині свердловини.
2. Теплоносій рухається у порожньому масиві, який має циліндричний горизонтальний перетин. Цей циліндричний канал утворено шляхом буріння свердловини.
3. Теплофізичні властивості теплоносія та гірського масиву постійні і не залежать від зміни температури.

В разі використання глибинних шарів Землі для створення підземних акумуляторів теплоти при акумулюванні та подальшому використанні глибинної теплоти можна виділити такі характерні теплові цикли: нагрівання оточуючого свердловину гірського масиву (зарядження акумулятора), зупинка подачі нагрітого теплоносія та охолодження нагрітого гірського масиву в період відбору теплоти теплоносієм (розрядження акумулятора). Цикли можуть повторюватися декілька разів.

У випадку використання глибинних гірських порід для створення підземних теплообмінників цикли їх роботи такі ж самі, як і підземних акумуляторів, але початковим циклом є охолодження оточуючого свердловину гірського масиву.

Під час зупинки нагрівання або охолодження гірського масиву теплові процеси відбуваються внаслідок нерівномірності температури в радіальному від осі свердловини напрямку. Зазначений тепловий процес прийнято називати "релаксацією" теплоти [2].

У зв'язку з вищевикладеним розглянемо задачі нагрівання або охолодження гірського масиву і припинення теплової дії свердловини.

Перша задача. Нехай суцільний циліндр чи труба радіусом R_c вертикально міститься в масиві Землі. Контакт теплоносія з металевою циліндричною трубою вважаємо таким, що температура теплоносія і металевої труби однакові. Сталий тепловий потік зі щільністю q із поверхні циліндра надходить до однорідного масиву. Треба знайти розподіл температури в масиві. На певній (достатньо великій) відстані R_∞ вплив гарячої труби (циліндра) на температуру масиву буде нехтовно малим.

Диференціальне рівняння, що описує температурне поле масиву, межові та початкова умови такі:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial T}{\partial R}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t};\ \left(R_c<R<R_\infty,\ t>0\right); \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=R_c}=-\frac{q}{\lambda_м};\ \left.T\right|_{R=R_\infty}=T_0;$$

$$\left.T\right|_{t=0}=T_0, \quad (2)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності, м^2/с; $\lambda_м$ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/м·К; q – щільність теплового потоку, що надходить до внутрішньої поверхні труби, Вт/м^2; R_c – радіус циліндра, м; R_∞ – достатньо велика відстань від порожнини (циліндричної), щоб впливом порожнини на температуру масиву на цій відстані можна знехтувати.

Нехай $U(R,t)=T(R,t)-T_0$. Тоді для $U(R,t)$ маємо задачу:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial U(R,t)}{\partial R}=\frac{1}{a}\frac{\partial U(R,t)}{\partial t};$$
$$\left(R_c<R<R_\infty, t>0\right); \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial U(R,t)}{\partial R}\right|_{R=R_c}=-\frac{q}{\lambda_м};\ \left.U(R,t)\right|_{R=R_\infty}=0; \quad (4)$$

$$\left.U(R,t)\right|_{t=0}=0. \quad (5)$$

Нам треба знайти функцію $U(R,t)$, що задовольняє рівняння (3), межові умови (4) та умову (5).

Розв'язок цих задач наведено в [3], він має такий вигляд:

$$U(R,t)=\frac{qR_c}{\lambda_м}\left\{\ln\frac{R_\infty}{R}-\pi\frac{R_\infty}{R_c}\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n)J_1\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)Z_0(\mu_n R)e^{-\mu_n^2\frac{at}{R_\infty^2}}}{\mu_n\left[J_0^2(\mu_n)-J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)\right]}\right\}. \quad (6)$$

Остаточно маємо:

$$T(R,t)=T_0+U(R,t). \quad (7)$$

Аналіз рівняння (6) показує, що для достатньо великих значень t можна записати [4]:

$$T(R,t)=T_0+\frac{qR_c}{2\lambda_м}\ln\frac{4at}{CR^2}+O\left(\frac{R_c^2}{at}\right),\ \text{або}$$

$$T(R,t)=T_0+\frac{qR_c}{2\lambda_м}\ln\frac{4at}{CR^2}, \quad (8)$$

де $\ln C=\gamma$, а $\gamma=0,57722...$ – стала Ойлера.

На рис. 1 наведено порівняння розрахунків визначення температури гірського масиву за точним розв'язком (6) і наближеним (8). З наведених результатів видно, що для проміжку часу 5 годин різниця у визначенні температури становить 0,3°C, для 10 годин – 0,1°C.

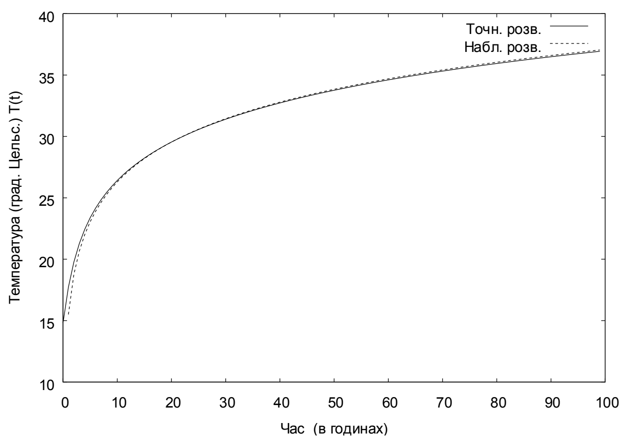

Рис. 1. Порівняння розрахунків визначення температури гірського масиву за точним (6) і наближеним (8) розв'язком:

$$q=600\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};\ T_0=10^\circ\text{C};\ a=0,0036\frac{\text{м}^2}{\text{год}};$$

$$\lambda_м=1,6\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}};\ R_c=0,025\,\text{м};\ R_\infty=20\,\text{м};\ R=0,05\,\text{м}.$$

Друга задача. Нехай суцільний циліндр чи труба з теплоносієм радіусом R_c вертикально міститься в масиві Землі. Тепловий потік із поверхні циліндра дорівнює нулеві, а початковий розподіл температури в масиві є деяка функція $T(R,0)=f(R)$. Тобто має місце охолодження масиву за часом. Треба знайти нестаціонарний розподіл температури в масиві.

Диференціальне рівняння, що описує температурне поле масиву, межові та початкова умови такі:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial T}{\partial R}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t},\ \left(R_c<R<R_\infty, t>0\right); \quad (9)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=R_c}=0\,;\; T|_{R=R_\infty}=f\left(R_\infty\right)=T_0\,;$$

$$T(R,0)=f(R). \quad (10)$$

Нехай $T(R,t)=U(R,t)+T_0$. Тоді для $U(R,t)$ маємо таку задачу:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial U(R,t)}{\partial R}=\frac{1}{a}\frac{\partial U(R,t)}{\partial t}\,;$$
$$\left(R_c<R<R_\infty,t>0\right); \quad (11)$$

$$\left.\frac{\partial U(R,t)}{\partial R}\right|_{R=R_c}=0\,;\; U(R,t)\big|_{R=R_\infty}=0\,; \quad (12)$$

$$U(R,0)=f(R)-T_0. \quad (13)$$

Нам треба знайти функцію $U(R,t)$, що задовольняє рівняння (11), межові умови (12) та умову (13). Оскільки межові умови (12) однорідні, стаціонарний складник цієї задачі дорівнює нулеві.

Формулу можна представити у вигляді:

$$U(R,t)=\Re(R)\mathfrak{T}(t).$$

Якщо підставити цей вираз до (11), то отримаємо:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial\Re(R)\mathfrak{T}(t)}{\partial R}=\frac{1}{a}\frac{\partial\Re(R)\mathfrak{T}(t)}{\partial t}\,;$$

$$\frac{\mathfrak{T}(t)}{R}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial\Re(R)}{\partial R}=\frac{1}{a}\Re(R)\frac{\partial\mathfrak{T}(t)}{\partial t}\,;$$

$$\frac{1}{R\Re(R)}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial\Re(R)}{\partial R}=\frac{1}{a\mathfrak{T}(t)}\frac{\partial\mathfrak{T}(t)}{\partial t}\,;$$

$$\frac{1}{R\Re(R)}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial\Re(R)}{\partial R}=-\nu^2\,;\; \frac{1}{\mathfrak{T}(t)}\frac{\partial\mathfrak{T}(t)}{\partial t}=-a\nu^2,$$

тобто маємо два диференціальних рівняння, кожне з яких залежить лише від однієї змінної (ν^2 – константа відокремлювання):

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}R\frac{d\Re(R)}{dR}+\nu^2\Re(R)=0\,;$$

$$\left.\frac{d\Re(R)}{dr}\right|_{R=R_c}=0\,;\; \Re\left(R_\infty\right)=0\,;$$

$$\frac{d\mathfrak{T}(t)}{dt}+a\nu^2\mathfrak{T}(t)=0.$$

Розв'язками цих рівнянь будуть:

$\Re(R)=C_1J_0(\nu R)+C_2N_0(\nu R)$ та $\mathfrak{T}(t)=Ce^{-a\nu^2 t}$,(14)

де $J_0(\nu R)$; $N_0(\nu R)$ – функції Бесселя.

З межових умов випливає:

$$\left.\frac{d\Re(R)}{dR}\right|_{R=R_c}=\frac{d}{dR}\left[C_1J_0(\nu R)+C_2N_0(\nu R)\right]_{R=R_c}=0\,;$$

$$-C_1\nu J_1\left(\nu R_c\right)-C_2\nu N_1\left(\nu R_c\right)=0\,;$$

$$C_1J_0\left(\nu R_\infty\right)+C_2N_0\left(\nu R_\infty\right)=0\,;$$

$$C_1=-C_2\frac{N_0\left(\nu R_\infty\right)}{J_0\left(\nu R_\infty\right)}\,;\; C_1=-C_2\frac{N_1\left(\nu R_c\right)}{J_1\left(\nu R_c\right)}\,;$$

$$\Re(R)=C_2N_0(\nu R)-C_2\frac{N_1\left(\nu R_c\right)}{J_1\left(\nu R_c\right)}J_0(\nu R)=$$

$$=\frac{C_2}{J_1\left(\nu R_c\right)}\left(J_1\left(\nu R_c\right)N_0(\nu R)-N_1\left(\nu R_c\right)J_0(\nu R)\right)=$$

$$=C\left(N_1\left(\nu R_c\right)J_0(\nu R)-J_1\left(\nu R_c\right)N_0(\nu R)\right).$$

Отже, власною функцією задачі (10) – (12) за радіусною координатою буде:

$$Z_0\left(\nu_nR\right)=N_1\left(\nu_nR_c\right)J_0\left(\nu_nR\right)-J_1\left(\nu_nR_c\right)N_0\left(\nu_nR\right),$$

а трансцендентне рівняння, що визначає ν_n, випливає з умови $\Re\left(R_\infty\right)=0$:

$$N_1\left(\nu_nR_c\right)J_0\left(\nu_nR_\infty\right)-J_1\left(\nu_nR_c\right)N_0\left(\nu_nR_\infty\right)=0.$$

Нехай тепер $\mu_n=\nu_nR_\infty$ ($\nu_n=\dfrac{\mu_n}{R_\infty}$). Тоді трансцендентне рівняння набирає вигляду:

$$N_0\left(\mu_n\right)J_1\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)-J_0\left(\mu_n\right)N_1\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)=0\,, \quad (15)$$

а радіусна власна функція:

$$Z_0\left(\mu_nR\right)=N_0\left(\mu_n\right)J_0\left(\mu_n\frac{R}{R_\infty}\right)-J_0\left(\mu_n\right)N_0\left(\mu_n\frac{R}{R_\infty}\right).$$

Отже, розв'язок рівняння (15) можна подати у вигляді:

$$U(R,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nZ_0\left(\mu_nR\right)e^{-\mu_n^2\frac{at}{R_\infty^2}}. \quad (16)$$

Сталі C_n знаходимо з початкової умови:

$$U(R,0)=f(R)-T_0\,;$$

$$f(R)-T_0=\sum_{n=1}^{\infty}C_nZ_0\left(\mu_nR\right). \quad (17)$$

Щоб знайти коефіцієнти розвинення C_n, помножимо (17) на $Z_0(\mu_k R)$ та проінтегруємо по R у межах $[R_c, R_\infty]$. Зауважимо, що функції Бесселя ортогональні з вагою R. Маємо:

$$\int_{R_c}^{R_\infty}\left[f(R)-T_0\right]Z_0(\mu_n R)RdR =$$

$$=\int_{R_c}^{R_\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_n Z_0(\mu_n R)Z_0(\mu_k R)RdR =$$

$$=C_n\int_{R_c}^{R_\infty}Z_0^2(\mu_n R)RdR\ ;$$

$$C_n=\frac{\int_{R_c}^{R_\infty}\left[f(R)-T_0\right]Z_0(\mu_n R)RdR}{\int_{R_c}^{R_\infty}Z_0^2(\mu_n R)RdR}.$$

Згідно з [5]:

$$\int x\left[Z_p(\alpha x)\right]^2 dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}\left\{\left[Z_p(\alpha x)\right]^2 - Z_{p-1}(\alpha x)Z_{p+1}(\alpha x)\right\},$$

де $Z_p(\alpha x)$ – будь-яка циліндрична функція. Отже

$$\int_{R_c}^{R_\infty}Z_0^2(\mu_n R)RdR=\frac{R^2}{2}\left[Z_0^2(\mu_n R)+Z_1^2(\mu_n R)\right]_{R_c}^{R_\infty}.$$

Оскільки $Z_0(\mu_n R_\infty)=0$; $Z_1(\mu_n R_\infty)=\dfrac{2}{\pi\mu_n}$;

$$Z_0(\mu_n R_c)=\frac{-2R_\infty}{\pi\mu_n R_c}\frac{J_0(\mu_n)}{J_1\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)};\ Z_1(\mu_n R_c)=0,$$

то

$$\int_{R_c}^{R_\infty}Z_0^2(\mu_n R)RdR=\frac{R^2}{2}\left[Z_0^2(\mu_n R)+Z_1^2(\mu_n R)\right]_{R_c}^{R_\infty}=\frac{R_\infty^2}{2}Z_0^2(\mu_n R_\infty)+\frac{R_\infty^2}{2}Z_1^2(\mu_n R_\infty)-\frac{R_c^2}{2}Z_0^2(\mu_n R_c)-\frac{R_c^2}{2}Z_1^2(\mu_n R_c)=$$

$$=0+\frac{R_\infty^2}{2}\left(\frac{2}{\pi\mu_n}\right)^2-\frac{R_c^2}{2}\left[\frac{-2R_\infty}{\pi\mu_n R_c}\frac{J_0(\mu_n)}{J_1\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)}\right]^2-0=\frac{2R_\infty^2}{(\pi\mu_n)^2}-\frac{2R_\infty^2}{(\pi\mu_n)^2}\left(\frac{J_0(\mu_n)}{J_1\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)}\right)^2=\frac{2R_\infty^2}{(\pi\mu_n)^2}\frac{J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)-J_0^2(\mu_n)}{J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)}.$$

Отже $$C_n=\frac{\int_{R_c}^{R_\infty}\left[f(R)-T_0\right]Z_0(\mu_n R)RdR}{\frac{2R_\infty^2}{J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)(\pi\mu_n)^2}\left[J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)-J_0^2(\mu_n)\right]}=\frac{J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)(\pi\mu_n)^2\int_{R_c}^{R_\infty}\left[f(R)-T_0\right]Z_0(\mu_n R)RdR}{2R_\infty^2\left[J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)-J_0^2(\mu_n)\right]};$$

$$T_0\int_{R_c}^{R_\infty}Z_0\left(\mu_n\frac{R}{R_\infty}\right)RdR=\left[T_0\frac{RR_\infty}{\mu_n}Z_1(\mu_n R)\right]_{R_c}^{R_\infty}=T_0\frac{2R_\infty^2}{\pi\mu_n^2},$$ тому що $Z_1(\mu_n R_\infty)=\dfrac{2}{\pi\mu_n}$; $Z_1(\mu_n R_c)=0$.

Отже

$$U(R,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)(\pi\mu_n)^2\int_{R_c}^{R_\infty}f(R)Z_0(\mu_n R)RdR}{2R_\infty^2\left[J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)-J_0^2(\mu_n)\right]}Z_0(\mu_n R)e^{-\mu_n^2\frac{at}{R_\infty^2}}-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_0J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)Z_0(\mu_n R)e^{-\mu_n^2\frac{at}{R_\infty^2}}}{J_1^2\left(\mu_n\frac{R_c}{R_\infty}\right)-J_0^2(\mu_n)}.$$

Остаточно маємо:

$$T(R,t)=T_0+T_0\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2\left(\mu_n\dfrac{R_c}{R_\infty}\right)Z_0(\mu_n R)e^{-\mu_n^2\frac{at}{R_\infty^2}}}{J_0^2(\mu_n)-J_1^2\left(\mu_n\dfrac{R_c}{R_\infty}\right)}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2\left(\mu_n\dfrac{R_c}{R_\infty}\right)(\pi\mu_n)^2\int\limits_{R_c}^{R_\infty}f(R)Z_0(\mu_n R)RdR}{2R_\infty^2\left[J_0^2(\mu_n)-J_1^2\left(\mu_n\dfrac{R_c}{R_\infty}\right)\right]}Z_0(\mu_n R)e^{-\mu_n^2\frac{at}{R_\infty^2}} \qquad (18)$$

Висновки. 1. Отримано аналітичний ров'язок задачі визначення температури гірського масиву після припинення теплової дії свердловини.

2. Проведено порівняння розрахунків температури гірського масиву при тепловій дії свердловини за точним і наближеним розв'язком, що дало можливість оцінити похибку наближеного розв'язку.

1. *Щербань А.Н., Кремнев О.А.* Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт. – К.: Издательство Академии наук УССР, 1959. – Т.1. – 430 с.

2. *Темкин А.Г.* Обратные методы теплопроводности. – М.: Энергия, 1973. – 464 с.

3. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С.* Сборник задач по математической физике. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 420 с.

4. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, Главная редакция физико-матеметической литературы, 1971. – 1108 с.